AGB
P. 2/3

P 2/3

HAMBURG

P 2/3

Ausführliches Lehrbuch
der
höhern Mathematik.

Mit besonderer

Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens.

Bearbeitet und herausgegeben

von

Adam Burg,

ord. öff. Professor der höhern Mathematik am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

Dritter Band.

Enthaltend:

Die Differentialrechnung nebst ihrer Anwendung auf Gegenstände der höhern Analysis und Geometrie, als ersten Abschnitt; die Integralrechnung mit gleicher Anwendung, als zweiten Abschnitt; und die Elemente der Variationsrechnung, als Anhang.

Mit fünf Kupfertafeln.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold.

1833.

GYMNAS. BIBLIOTHEK ...MBERG

Staatliche
Bibliothek
Bamberg

Vorwort.

In Beziehung auf den vorliegenden dritten und letzten Band dieses Lehrbuches, hat der Verfasser aufser dem in der Vorrede zum ersten Bande bereits Angeführten, was Alles hier seine volle Anwendung findet, nur noch zu bemerken, dafs er Anfangs Willens war, dem ersten Abschnitte noch ein eigenes Capitel über die verschiedenen Ansichten und darauf gegründeten Principien der Differentialrechnung, nebst den aus ihrer Vergleichung sich ergebenden Bemerkungen beizufügen. Da jedoch dieser Band, in Folge der Wichtigkeit und Reichhaltigkeit der hierher gehörigen Materien, ohnehin schon die ursprünglich bestimmte Bogenzahl überschritten; so hat sich der Verfasser genöthiget gesehen, dieses nicht uninteressante Capitel hier wegzulassen, und bleibt dasselbe sonach einem besondern Werke vorbehalten, in welchem er sich überhaupt über das Wesen und die sogenannte Metaphysik des vielfältig besprochenen und beanstandeten Differentialcalculs weitläufiger, als es hier möglich gewesen wäre, zu verbreiten gedenket.

Es ist ferner nicht unwahrscheinlich, dafs der Verfasser, um mehreren achtbaren Wünschen entgegen zu kommen und seine eigene Lieblingsidee auszuführen, diesem Werke noch einen vierten, übrigens für sich bestehenden Band, welcher die Hauptlehren der Mechanik, in demselben Geiste behandelt, enthalten soll, folgen lassen wird.

Schlüfslich mufs der Verfasser noch der Geschicklichkeit und Unverdrossenheit der bei diesem durchaus schwierigen Satze angestellt gewesenen Setzer volle Gerechtigkeit widerfahren lassen, und überhaupt auch die Bereitwilligkeit des Herrn Verlegers, die Deutlichkeit und typographische Schönheit dieses Werkes auf alle mögliche Weise zu fördern, öffentlich und dankbar anerkennen.

Wien, am 14. März 1833.

Der Verfasser.

Inhalt des dritten Bandes.

Erster Abschnitt.

Die Differentialrechnung.

Erstes Capitel.

Von der Differentiation der Functionen einer Variablen.

Seite

Erklärung . 3

Differentiale der vorzüglichsten Functionen einer Variablen 4

Schema, welches die Regeln für die ersten Differentiale der Haupt-Functionen enthält 11

Uebungsbeispiele (von 1 bis 15) 13

Die höhern Differentiale 18

Beispiele (von 1 bis 6) 19

Entwicklung der höhern Differentiale, wenn dabei dx selbst wieder veränderlich ist 21

Beispiel . 24

Zweites Capitel.

Ableitung des *Taylor*'schen, *Maclaurin*'schen und *Lagrange*'schen Lehrsatzes.

Das *Taylor*'sche Theorem 25

Beispiele (von 1 bis 2) 29

Anwendung des *Taylor*'schen Satzes auf die Entwicklung der Functionen in unendliche Reihen 30

Beispiele (von 1 bis 4) —

Fälle, in welchen die *Taylor*'sche Formel nicht anwendbar ist 32

Beispiele (von 1 bis 3) —

» (von 1 bis 3) 34

Die *Maclaurin*'sche Formel 38

Beispiele (von 1 bis 4) 39

» (von 1 bis 3) 41

Lagrange's Umkehrungsformel 43

Beispiele (von 1 bis 2) 46

Drittes Capitel.

Von der Differentiation der Functionen mehrerer Variablen. Die partiellen Differentiale. Das *Taylor*'sche Theorem auf zwei veränderliche Gröſsen ausgedehnt. *Euler's* Lehrsatz über die homogenen Functionen.

Seite

Vollständiges und partielles Differential von $u = f(x, y)$. 49

Beispiele (von 1 bis 5) 51

Ueber die höhern Differentiale der Functionen mehrerer Variablen 52

Das *Taylor*'sche Theorem ausgedehnt auf Functionen von zwei Variablen 55

Anmerkung.

Anwendung dieses erweiterten Satzes auf die Entwicklung solcher Functionen in unendliche Reihen, sammt Beispiel 57

Entwicklung des durch die Gleichung

$$\left(\frac{d^{m+n} u}{d x^m \, d y^n}\right) = \left(\frac{d^{m+n} u}{d y^n \, d x^m}\right)$$

ausgesprochenen Satzes, sammt Beispiel 58

Bedingungsgleichung, welche bestehen muſs, wenn $P dx + Q dy$ das vollständige Differential einer Function $f(x, y)$ seyn soll, sammt Beispiel 62

Euler's Lehrsatz über die homogenen Functionen . . . 63

Beispiel . 65

Viertes Capitel.

Von der Differentiation der Gleichungen mit zwei oder mehreren veränderlichen Gröſsen.

Bestimmung des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, wenn $y = f(w)$ und $w = \varphi(x)$ ist 67

Beispiel . 69

Anmerkung.

Bestimmung der Quotienten $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$, wenn $u = f[x, y, \varphi(x, y)]$ ist, sammt Beispiel . . . 70

Bestimmung der Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, u. s. w., wenn $y = f(w)$ und $x = \varphi(w)$ ist —

Seite

Bestimmung des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung $f(x, y) = o$, wenn y eine Function von x ist, sammt Beispiel 73

Ferner der höhern Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w. sammt Beispiel 74

Entwicklung von du aus der Gleichung $u = f(x, y, z) = o$, wenn z eine Function von x und y ist 77

Ableitung der Differentialgleichungen, welche von den in der ursprünglichen Gleichung vorkommenden constanten Gröſsen unabhängig sind 78

Fünftes Capitel.

Anwendung und Gebrauch der Differentialrechnung in der Analysis.

I. Bestimmung der wahren Werthe gebrochener Functionen, welche unter der Form $\frac{o}{o}$ erscheinen . . 81

Beispiele (von 1 bis 8) 85

Ueber die Verfahrungsart, wenn der Null machende Factor irrational ist 87

Bestimmung der unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheinenden Bruchfunctionen, sammt Beispiel 89

Bestimmung des Productes zweier Functionen von der Form $o . \infty$, sammt Beispiel 90

Bestimmung der unter der Gestalt $\infty - \infty$ vorkommenden Differenz zweier Functionen, sammt Beispiel . . . 91

II. Bestimmung der gröſsten und kleinsten Werthe der Functionen.

A) Für Functionen *einer* Variablen.

Erklärung . 93

Entwicklung einer bequemen Regel zur Bestimmung der gröſsten und kleinsten Werthe einer Function $y = f(x)$. 95

Beispiele (von 1 bis 15) 99

Aufgaben über die Lehre des Maximums und Minimums (von 1 bis 15), sammt Auflösungen 109

B) Für Functionen *zweier* Variablen.

Entwicklung der hierzu nöthigen Regeln 131

Aufgaben hierüber (von 1 bis 5), sammt deren Auflösungen 136

Seite

Anmerkung.

Anwendung der Differentialrechnung zur Herleitung summirbarer Reihen 143

Beispiele hierüber (von 1 bis 4) 144

Sechstes Capitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der ebenen Curven oder krummen Linien von einfacher Krümmung.

Methode der Tangenten 147

Ausdrücke für die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale 149

Beispiel —

Gleichungen der Tangente und Normale 150

Beispiel —

Das Differential des Bogens einer Curve und der von dieser begrenzten Fläche 151

Das Differential des Curvensectors 153

Beispiel 155

Von den Asymptoten der Curven —

Beispiele (von 1 bis 2) 157

Kennzeichen für die Convexität und Concavität der Curven 159

Beispiele (von 1 bis 2) 161

Von den berührenden Curven 162

Beispiele (von 1 bis 2) 166

Krümmungskreis 169

Beispiel (Entwicklung des Krümmungshalbmessers für die Linien zweiter Ordnung) 172

Von den Evoluten der krummen Linien 174

Beispiele (von 1 bis 2) 178

Anmerkung.

Ueber das Verfahren, um aus der gegebenen Gleichung der Evolute jene der Evolvente zu finden . . . 181

Von den *besondern* Puncten der Curven.

Erklärung 181

A) Die gröfsten und kleinsten Ordinaten . . . 182

Erläuterung durch ein Beispiel 185

B) Die Wendungs- oder Flexionspuncte . . . 187

Beispiele (von 1 bis 4) 189

Seite

C) Die Rückkehrpuncte oder Spitzen 191
Beispiele (von 1 bis 3) 193
D) Die vielfachen Puncte 196
Beispiele (von 1 bis 4) 199
Anmerkung.
Die Spitzen als vielfache Puncte betrachtet, sammt Beispiel 203
E) Die conjugirten oder beigeordneten Puncte 204
Beispiele (von 1 bis 2) 205
Anmerkung.
Beispiele über die besondern Puncte zur Selbstübung 206

Siebentes Capitel.

Uebertragung mehrerer im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke auf Polarcurven.

Erklärung . 207
Ausdrücke für die Subtangente, Subnormale etc.; Element des Bogens, der Fläche; Krümmungshalbmesser . . 209
Formeln, um von Polarcoordinaten auf rechtwinkelige Coordinaten zurück zu gehen 211

Achtes Capitel.

Anwendung der bisher entwickelten Sätze auf einige transcendente Curven.

Die Cycloide oder Radlinie 213
Anmerkung.
Ableitung der allgemeinen Gleichung, in welcher die gemeine, gedehnte und verkürzte Cycloide enthalten ist 219
Note über die Trochoide 220
Die Epicycloide 221
Die Cardioide 223
Anmerkung.
Die Kreis-Evolvente 225
Die Hypocycloide 226
Anmerkung.
Ueber den besondern Fall, wenn der Durchmesser des Erzeugungskreises gleich ist dem Halbmesser des Grundkreises 227
Die logarithmische Linie 228

Seite

Von den Spirallinien 230
a) Die Archimedische Spirale —
b) Die hyperbolische Spirale 233
c) Die parabolische Spirale 234
d) Die logarithmische Spirale 236

Anmerkungen.

I. Rolllinien 239
Beispiel 240
II. Die Neoide oder Spinnlinie 241
III. Die Cissoide (des *Diokles*) 242
(Note.) Verfahren, um mittelst dieser Curve zwischen zwei gegebenen Linien, zwei mittlere geometrische oder stetige Proportionallinien zu construiren . 243
IV. Die Conchoide oder Muschellinie 244
V. Die Lemniscata 247
VI. Die Quadratrix 248

Neuntes Capitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der krummen Flächen und Curven von doppelter Krümmung.

Betrachtung über die Art und Weise, wie man von irgend einem Punct der Fläche zu einem folgenden fortgehen kann . 249
Bedingungsgleichung für die Continuität der Fläche . . 250
Die Linie des stärksten Falles 252
Beispiele (von 1 bis 2) 253
Berührungen der krummen Flächen 254
Berührungsebene 256
Beispiel . 258
Die Normale 259
Von den Berührungskugeln 260
Von der Krümmung der Flächen 262
Beispiel . 265
In jedem Puncte einer krummen Fläche können zwei, und auch nur zwei Krümmungslinien gezogen werden; diese stehen auf einander perpendikulär . . . 267
Bestimmung der Krümmungshalbmesser dieser beiden Linien 269
Dieser ist für die eine Krümmungslinie ein Maximum und für die andere ein Minimum (in der Note) 270

Seite

Von den gröfsten und kleinsten Ordinaten der Flächen . 272
Beispiel . 273
Die Curven von doppelter Krümmung 274
Developpable Flächen 277
Bestimmung der beiden Krümmungen einer Curve von doppelter Krümmung 280
Ausdruck für den Krümmungshalbmesser einer Curve von doppelter Krümmung 283
Beispiel . —
Die Evoluten einer Curve von doppelter Krümmung . . 284

Anmerkung.

Die loxodromische Linie 286

Zweiter Abschnitt.

Die Integralrechnung.

Einleitung . 291

Erstes Capitel.

Von der Integration der algebraischen Differential-, und zwar *A*) der rationalen und *B*) der irrationalen Functionen einer Variablen, oder Bestimmung des Integrals $\int X\,dx$.

A) Bestimmung des Integrals $\int X\,dx$, wenn X eine rationale Function von x ist.

a) Für ganze Functionen 295
Beispiele (von 1 bis 8) 298
b) Für gebrochene Functionen 300
Beispiele . 301
Bestimmung des Integrals $\int \frac{dx}{a + b x^2}$ 302
» » » $\int \frac{dx}{a - b x^2}$ 304
Weitere Beispiele (von 1 bis 3) mit der Entwicklung des Integrals $\int \frac{x^m\,dx}{x^n \mp a^n}$ 305

Seite

Bestimmung des Integrals $\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ 308

» » » $\int \frac{x\,dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ 310

B) Bestimmung des Integrals $\int X\,dx$, wenn X eine irrationale Function von x ist.

Bestimmung der Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)}}$ und $\int \frac{dx}{\sqrt{(a - b x^2)}}$. —

» » » $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x \pm \gamma x^2)}}$ u. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(\pm\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$ 312

Beispiele (von 1 bis 4) 315

Methoden, um den irrationalen Differentialausdruck $X\,dx$ rational zu machen, wenn X keine andere Irrationalgröfse als jene $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ enthält 318

Beispiele (von 1 bis 3) 320

Bestimmung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$ 321

Die Integration der Differentialgleichung der Kettenlinie 322

Bestimmung des Integrals $\int X\,dx$, wenn X den Bruch $\frac{a + b x}{a' + b' x}$ zur Potenz $\frac{p}{q}$ enthält 323

Zweites Capitel.

Von der Integration der binomischen Differentialformeln: $x^n\,dx\,(a + b x^m)^p$.

Entwicklung zweier Fälle, in welchen sich der vorige Differentialausdruck ebenfalls genau integriren läfst . . . 325

Beispiele (von 1 bis 3) 326

Reductionsformeln für das Integral $\int x^n\,dx\,(a + b x^m)^p$ 328

Formel, welche die Regel des theilweisen Integrirens enthält . 329

Reductionsformel des vorigen Integrals, nach welcher p vermindert (dabei aber n vergröfsert) wird . . —

Defsgl., nach welcher p vergröfsert (dabei n vermindert) wird —

Beispiele (von 1 bis 2) 331

Reductionsformel des vorigen Integrals, mittelst welcher p ungeändert bleibt, n aber vermindert wird . . . 333

Seite

Reductionsformel des vorigen Integrals, mittelst welcher p ungeändert bleibt, n aber vergröſsert wird . . 335

Beispiele (von 1 bis 4) —

Reductionsformeln für das obige Integral, nach welchen ohne Aenderung von n der Exponent p vermindert oder vermehrt wird 338

Beispiele (von 1 bis 2) 339

Entwicklung des Integrals $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ für $n = 1, 2, 3,$ etc. 341

» » » $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{(1-x^2)}}$ » » . 342

» der Integrale $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(x^2-1)}}$ und $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{(x^2-1)}}$. 344

Bestimmung der Integrale von der Form $\int x^q\,dx\,(ax^r + bx^s)^p$ 345

Beispiele (von 1 bis 2). Bestimmung der Integrale $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ und $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{(2ax-x^2)}}$. . . —

Reductionsformeln für einige besondere Fälle des Integrals $\int x^n\,dx\,(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^p$ sammt Beispiele 348

Reductionsformeln für die Integrale $\int x^n\,dx\,\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ und $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$ 350

Beispiele (von 1 bis 2) 351

Drittes Capitel.

Von der Integration einiger transcendenten Differentialformeln.

A) Bestimmung des Integrals $\int X\,dx$, wenn X logarithmische oder Exponentialgröſsen enthält 353

Beispiele (von 1 bis 3) über das Integral $\int X'\,dx\,l^n x$. . 354

Entwicklung des Integrals $\int X a^x\,dx$, nebst Beispiele . . 356

B) Bestimmung des Integrals $\int X\,dx$, wenn X Kreisfunctionen von x enthält 358

Entwicklung der Integr. $\int \sin. nx \cos. mx\,dx$, $\int \cos. nx \cos. mx\,dx$ und $\int \sin. nx \sin. mx\,dx$ 360

Beispiele, um nach diesen Formeln die Integrale $\int \sin.^n x\,dx$, $\int \cos.^m x\,dx$ und $\int \sin.^n x \cos.^m x\,dx$ zu bestimmen . - 361

Allgem. Reductionsformeln für das Integral $\int \sin.^n x \cos.^m x\,dx$ 362

Beispiele (von 1 bis 3) 368

Integration transcendenter Differentialformeln . . . 371

Seite

Beispiele: $\int \frac{dx}{(a + b \cos. x)^n}$ 372

$\int X\, dx\, arc. \sin. x$ 374

$\int x^n \cos. x\, dx$, $\int x^n \sin. x\, dx$, u. s. w. . . . 375

Viertes Capitel.

Von der Integration mittelst Reihen und innerhalb bestimmter Grenzen; allgemeine Näherungsmethode.

Das Integriren mittelst Reihen 377

Beispiele (von 1 bis 13) 378

Entwicklung der Integr. $\int \frac{dx \sqrt{(1 - e^2 x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ u. $\int \frac{dx}{\sqrt{[(1 - x^2)(a + x)]}}$ 385

Die *Bernoulli*'sche Reihe, sammt Beispiel 387

Taylor's Vereinfachung beim Gebrauche dieser Reihe (Anm.) 388

Von der Integration innerhalb bestimmter Grenzen . 389

Beispiele über die bestimmten Integrale (von 1 bis 3) . 393

Allgemeine Methode, ein Integral durch Näherung zu finden 396

Beispiel . 402

Fünftes Capitel.

Von der Integration der höhern Differentialausdrücke Einer, und der Partialdifferentiale mehrerer Variablen.

Bestimmung des Integrals y aus den Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. 405

Beispiel . 407

Bestimmung der höhern Integrale $\int^2 X\, dx$, $\int^3 X\, dx$, . . . mittelst der theilweisen Integrationsmethode —

Beispiel . 409

Integration der partiellen Differentiale —

Beispiele (von 1 bis 2) 411

Bedeutung des dreifachen Integrals $\int\int\int v\, dx\, dy\, dz$. . 413

Sechstes Capitel.

Von der Integration der vollständigen, dann homogenen Differentiale zweier oder mehrerer Variablen der ersten Ordnung.

Integration der vollständigen Differentialformeln . . 415

Anmerkung.

Ueber das Differentiiren unterm Integralzeichen . . 418

Seite

Beispiele (von 1 bis 2) 420
Bestimmung der ursprünglichen Function aus dem Differential einer Function von drei Variablen 421
Beispiel . 423
Integration der homogenen Differentialausdrücke der ersten Ordnung 424
Beispiele (von 1 bis 2) 425

Siebentes Capitel.

Anwendung der bisher entwickelten Integralformeln auf die Rectification und Quadratur der ebenen Curven; Quadratur oder Complanation der krummen Oberflächen und Cubatur der von solchen Flächen begrenzten Körper.

Rectification der Curven 427
Beispiele (von 1 bis 11) 428
Quadratur der Curven 439
Beispiele (von 1 bis 8) 440
Complanation und Cubatur der durch Umdrehung erzeugten Flächen und Körper 451
Beispiele (von 1 bis 3) 454
Quadratur und Cubatur der krummen Oberflächen und Körper überhaupt 459
Beispiele (von 1 bis 2) 465
Anmerkung in Bezug auf das bei der Rectification der Ellipse gefundene Integral $\int d\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin.^2 \varphi)}$ und der elliptischen Transcendenten 470

Achtes Capitel.

Von der Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen zwei Variablen.

Anführung der Methoden, nach welchen man aus der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ die ursprüngliche Gleichung oder Function findet 475
A) Von der Absonderung der veränderlichen Gröfsen . 476
Beispiele (von 1 bis 3) —
Die Absonderung ist für homogene Differentialgleichungen immer möglich 477
Beispiele (von 1 bis 2) 478

Seite
Absonderung der Variablen in der linearen Differentialgleichung $dy + Py\,dx = Q\,dx$ 479
Beispiele (von 1 bis 2) 480
Absonderung der Variablen in der *Riccati*'schen Differentialgleichung 481
Betrachtung jenes Falles, in welchem der Differentialgleichung $X\,dx = Y\,dy$ eine algebraische Integralgleichung entsprechen kann, obschon sich die Integrale $\int X\,dx$, $\int Y\,dy$ nicht algebraisch darstellen lassen 482
B) Aufsuchung des integrirenden Factors 484
Beispiele (von 1 bis 2) 489
Bestimmung dieses Factors für homogene Differentialgleichungen . 491
Beispiel . 492
Anmerkung.
Anwendung der Integralrechnung zur Auffindung summirbarer Reihen, sammt Beispiele 493
Entwicklung der *Euler*'schen Summationsformel 497

Neuntes Capitel.

Von der Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung, in welcher höhere Potenzen von dx und dy vorkommen; dann von den besondern oder particulären Auflösungen.

Allgemeine Integrationsmethode der Gleichung $dy^n + P\,dy^{n-1}\,dx + \ldots + U\,dy\,dx^{n-1} + V\,dx^n = 0$ 499
Beispiel . 501
Besondere Fälle, in denen man das vorgetragene allgemeine Verfahren umgehen kann, sammt erläuternden Beispielen (von 1 bis 5) 502
Von den besondern oder particulären Auflösungen 509
Beispiele (von 1 bis 3) 515
Zweites Verfahren, die besondern Auflösungen zu finden, wenn das erstere unbrauchbar ist 517
Beispiele (von 1 bis 2) 519

Zehntes Capitel.

Auflösung einiger geometrischen Aufgaben, welche auf die Integration von Differentialgleichungen zwischen zwei Variablen führen.

Aufgaben.

Seite

1. Die Curve finden, deren Subtangente eine gegebene Function der Abscisse ist 521
 Specielle Fälle *a*) und *b*) 522
2. Die Polarcurve finden, deren Subtangente gleich dem Leitstrahle ist —
3. Die Curve finden, bei welcher die Länge des Bogens *AM*, vom tiefsten Punct *A* bis zu einem andern beliebigen Punct *M* derselben, der trigonom. Tangente des Neigungswinkels proportional ist, welchen die in *M* gezogene Tangente mit der Horizontallinie bildet (Kettenlinie) 523
4. Die Curve finden, deren Krümmungshalbmesser sich wie die dritten Potenzen ihrer Normalen verhalten . . . 527
5. Die Curve finden, für welche in jedem Puncte der Krümmungshalbmesser der entsprechenden Normale gleich ist 528
6. Die Curve finden, deren Krümmungshalbmesser eine beständige Gröſse ist 529
7. Die Trajectorie, d. h. jene Curve finden, welche ein System von, zu derselben Gattung gehöriger Curven unter einem bestimmten Winkel schneidet 530
 a) Für ein System gerader Linien 532
 b) Die orthogonalen Trajectorien 533
 c) Die orthog. Traject. für ein System ähnlicher Ellipsen 534
8. Die Brennlinie durch Zurückwerfung, oder die Catacaustica zu finden 535
 a) Für den Kreis, wenn der strahlende Punct mit dem Endpunct des Durchmessers zusammenfällt 537
 b) Für die Ellipse, wenn der strahlende Punct mit dem einen Brennpunct zusammenfällt . . 539
 c) Für die gemeine Parabel, wenn der strahlende Punct im Brennpunct liegt 540
 d) Wenn die einfallenden Strahlen unter sich parallel sind —
 dd) Beispiel für die gem. Parabel —

Anmerkung. Seite

Brennlinie für den Halbkreis und die Cycloide bei parallel einfallenden Strahlen 541

Anhang.

Die Elemente der Variationsrechnung.

Einleitung . 545

Untersuchung des Einflusses, welchen eine Variation in der Relation $y = f(x)$ auf das unbestimmte Integral $\int V dx$ hat 550

Entwicklung von $\delta \int U$, wenn U eine Function von x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, u. s. w. ist 557

Entwicklung von $\delta \int V dx$, oder wenn U auf die Form $V dx$ gebracht werden kann 559

Ueber die gröſsten und kleinsten Werthe der unbestimmten Integralformeln.

A) Absolute Maxima und Minima 562

Bedingungsgleichungen fürs Maximum oder Minimum . . 566

Grenzengleichungen 568

Aufgaben.

1. Die kürzeste Linie zu finden, welche man *a*) zwischen zwei gegebenen Puncten, und *b*) zwischen zwei gegebenen, in einer Ebene liegenden Curven ziehen kann . 572

2. Dasselbe Problem aufzulösen, wenn die vorigen Gröſsen im Raume gegeben sind 577

Besondere Fälle *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) 578

Beispiele zur Erläuterung des letzten Falles (von 1 bis 2) 580

3. Die ebene Curve finden, welche zwei gegebene Puncte verbindend, durch Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt 583

4. Die Linie des schnellsten Falles (*Brachistochrone*) zu finden 585

B) Relative Maxima und Minima 589

5. Unter allen durch zwei gegebene Puncte gehenden gleich langen (isoperimetrischen) Curven jene zu finden, welche mit der Abscissenaxe und den beiden äuſsersten Ordinaten die gröſste oder kleinste Fläche einschlieſst 590

Erster Abschnitt.

Die Differentialrechnung.

Erstes Capitel.

Von der Differentiation der Functionen einer Variablen.

§. 1.

Erklärung.

Läſst man in $f(x)$, als irgend einer Function von x, die Variable x um eine unendlich kleine Gröſse zunehmen; so heiſst die Aenderung oder Differenz, welche dadurch in $f(x)$ hervorgebracht wird, das Differential der Function $f(x)$.

Nimmt man also in §. 176. (Bd. I.) Δx unendlich klein an, was ganz kurz dadurch angedeutet wird, daſs man das Operationszeichen Δ mit jenem d vertauscht, und statt Δx, dx, so wie anstatt $\Delta . f(x)$ (da auch diese Differenz, wie die folgende Entwickelung unmittelbar zeigt, unendlich klein ausfällt), $d . f(x)$ schreibt; so erhält man als Differential der Function $f(x)$:

$$d . f(x) = f(x + dx) - f(x) \quad . \; . \; . \; (1$$

Da sich ferner (Bd. I., §. 178., Anmerk.) im Allgemeinen $f(x + \Delta x)$ immer in eine Reihe von der Form

$$f(x) + P \Delta x + Q \Delta x^2 + R \Delta x^3 + \ldots$$

entwickeln läſst, so ist auch

$$f(x + dx) = f(x) + P dx + Q dx^2 + R dx^3 + \ldots,$$

also

$$d . f(x) = f(x + dx) - f(x) = P dx + (Q + R dx + \ldots) dx^2;$$

oder, wenn man beiderseits durch dx dividirt:

$$\frac{d . f(x)}{dx} = P + (Q + R dx + \ldots) dx;$$

und endlich, da der angenommenen Bedingung zufolge auch das Product $(Q + R dx + \ldots) dx$ unendlich klein ist (indem unter diesen Umständen der erste Factor $Q + Rdx + \ldots$ nicht Unendlich werden kann), dieses also (Bd. I., §. 19.) gegen die endliche Gröſse verschwindet und (um nämlich die Bedingung, daſs dx unendlich klein seyn soll, wirklich auszudrücken) weggelassen werden muſs (nicht »kann«):

$$\frac{d.f(x)}{dx} = P \ldots (2 \quad \text{oder auch} \quad d.f(x) = P dx \ldots (3.$$

Diese Ausdrücke (1 und (3 zeigen demnach, daſs man das Differential einer Function von x, nämlich $d.f(x)$ findet, indem man in $f(x)$ statt x, $x + dx$ setzt, $f(x + dx)$ entwickelt und davon die ursprüngliche Function $f(x)$ abzieht; oder von dieser Entwickelung überhaupt nur das zweite, d. i. jenes Glied nimmt, welches mit der ersten Potenz von dx verbunden ist.

Der Quotient (2 wird Differentialquotient, oder auch, da er den Coefficienten P, welcher in (3 mit dx multiplicirt ist, ausdrückt, Differentialcoefficient der Function $f(x)$ genannt.

Wir sind also jetzt im Stande, die Differentiale aller Functionen von einer variablen Gröſse nach dieser Fundamentalregel zu entwickeln; was sofort in den nachstehenden Paragraphen geschehen soll.

Differentiale der vorzüglichsten Functionen *einer* Variablen.

§. 2.

1) Wir wollen Kürze halber $\varphi(x)$ durch y, also $d.\varphi(x)$ durch dy bezeichnen. Dieſs vorausgesetzt, sey zuerst $y = Af(x)$, wo A irgend eine constante Gröſse bedeutet; so ist nach der Regel des vorigen Paragraphes:

$$dy = Af(x + dx) - Af(x) = A[f(x + dx) - f(x)];$$

oder, wegen $f(x + dx) - f(x) = d.f(x)$ [voriger Paragraph, Gl. (1]:

$$d.Af(x) = Ad.f(x) \ldots (1,$$

d. h. man kann die bei einer Differentiation vorkommenden constanten Factoren sogleich vor das Differentialzeichen d setzen.

2) Für $y = A + f(x) + f'(x) - f''(x) + \ldots$ ist

$$dy = A + f(x + dx) + f'(x + dx) - f''(x + dx) + \ldots$$
$$- [A + f(x) + f'(x) - f''(x) + \ldots]$$
$$= [f(x + dx) - f(x)] + [f'(x + dx) - f'(x)]$$
$$- [f''(x + dx) - f''(x)] + \ldots;$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (1 des vorigen Paragraphes:

$$d.[A + f(x) + f'(x) - f''(x) + \ldots]$$
$$= d.f(x) + d.f'(x) - d.f''(x) + \ldots (2;$$

d. h. das Differential einer algebraischen Summe von veränderlichen Gliedern wird gefunden, indem man das Differential eines jeden einzelnen Gliedes nimmt; dabei ist das Differential einer *constanten* Gröfse gleich *Null*.

3) Für $y = f(x) f'(x)$ ist

$$dy = f(x + dx) f'(x + dx) - f(x) f'(x)$$
$$= [f(x) + Pdx + \ldots][f'(x) + P'dx + \ldots] - f(x)f'(x)$$
$$= f'(x) P dx + f(x) P' dx;$$

oder endlich, wegen $P dx = d.f(x)$ und $P' dx = d.f'(x)$ [voriger Paragraph, Gl. (3]:

$$d.f(x)f'(x) = f'(x) d.f(x) + f(x) d.f'(x) \ldots (3$$

Setzt man, um diese leicht zu übersehende Regel auf drei veränderliche Factoren auszudehnen, in dieser gefundenen Formel von $d.XX' = X'dX + XdX'$, statt X', $X'X''$; so erhält man ganz einfach:

$$d.XX'X'' = X'X''dX + XX''dX' + XX'dX''.$$

Auf dieselbe Art kann man die Regel allgemein für jede beliebige Anzahl von Factoren finden:

Das Differential eines Productes aus mehreren veränderlichen Factoren wird nämlich gefunden, wenn man das Differential eines

jeden einzelnen Factors mit allen übrigen Factoren multiplicirt und diese Partialproducte zusammenaddirt.

Zusatz. Es ist nach dieser Regel auch $d.Af(x) = Ad.f(x) + f(x)dA$, oder wegen $dA = 0$, wenn nämlich A eine constante Gröſse bezeichnet, in Uebereinstimmung mit Gl. (1: $d.Af(x) = Ad.f(x)$.

4) Für $y = \frac{f(x)}{f'(x)}$ hat man wieder nach der obigen allgemeinen Regel:

$$dy = \frac{f(x+dx)}{f'(x+dx)} - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f(x) + Pdx + \ldots}{f'(x) + P'dx + \ldots} - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= \frac{f'(x)Pdx - f(x)P'dx}{[f'(x)]^2};$$

oder endlich, zufolge der im vorigen Paragraphe aufgestellten Gleichung (3:

$$d.\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f'(x)d.f(x) - f(x)d.f'(x)}{[f'(x)]^2} \ldots (4;$$

d. h. das Differential eines veränderlichen Bruches ist gleich dem Nenner in das Differential des Zählers, weniger dem Zähler in das Differential des Nenners, das Ganze getheilt durch das Quadrat des Nenners.

Zusatz. Setzt man in der gefundenen Formel von $d.\frac{X}{X'} = \frac{X'dX - XdX'}{X'^2}$, $X = A$; so wird wegen $dX = dA = 0$:

$$d.\frac{A}{X'} = \frac{-AdX'}{X'^2} \ldots (5$$

Ist hingegen der Nenner constant oder $X' = A$, so hat man eben so

$$d.\frac{X}{A} = \frac{AdX}{A^2} = \frac{dX}{A} \ldots (6;$$

so, daſs man in diesem Falle unter das Differential des Zählers nur den ungeänderten Nenner zu setzen hat (was auch mit (1 übereinstimmt, indem man hat

$$d.\frac{X}{A} = d.\frac{1}{A}X = \frac{1}{A}dX = \frac{dX}{A}\Big).$$

Anmerk. Alle hier abgeleiteten Regeln lassen sich auch unmittelbar aus den betreffenden Regeln und Formeln der endlichen Differenzen (I. Bd., zwölftes Capitel) herleiten, wenn man dort überall statt Δx, dx setzt, und dabei die im zweiten Capitel aufgestellten Grundsätze hinsichtlich der unendlich kleinen Gröfsen berücksichtigt.

§. 3.

Um jetzt die Differentiale der Hauptfunctionen zu entwickeln, hat man nach der im §. 1. aufgestellten Regel ganz einfach

1) für $f(x) = x^n$:

$$d.x^n = (x + dx)^n - x^n = n x^{n-1} dx \text{ *)}.$$

Ist n gebrochen und z. B. $n = \frac{1}{m}$, so ist

$$d.x^{\frac{1}{m}} = d.\sqrt[m]{x} = \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} dx = \frac{dx}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}.$$

Für den noch speciellern, aber sehr häufig vorkommenden Fall von $m = 2$ ist

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

2) Für $f(x) = a^x$ ist

$$d.a^x = a^{x+dx} - a^x = a^x(a^{dx} - 1) = a^x\, la\, dx$$

(wenn man nämlich nach §. 127., Bd. I., a^{dx} in eine Reihe auflöst).

Für den speciellen Fall von $a = e$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, ist $la = le = 1$ und $d.e^x = e^x dx$.

3) Für $f(x) = log.x$ hat man

$$d.log.x = log.(x + dx) - log.x = log.\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = M\frac{dx}{x}$$

[wenn man nach Bd. I., §. 129., Gl. 2), $log.\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$ in eine Reihe entwickelt].

Für natürliche Logarithmen, welche in der gan-

*) Man mufs hier $d.x^n$, welches statt $d.(x)^n$ steht, wohl von dx^n, welches Kürze halber anstatt $(dx)^n$ geschrieben wird, unterscheiden.

zen Differentialrechnung stillschweigend vorausgesetzt werden, hat man, wegen $M = 1$:

$$d.lx = \frac{dx}{x}.$$

4) Für $f(x) = sin.x$ ist

$$d.sin.x = sin.(x + dx) - sin.x$$
$$= sin.x\, cos.dx + sin.dx\, cos.x - sin.x$$

oder (wenn man für $cos.dx$ und $sin.dx$ nach §. 142. die Reihen setzt) auch

$$d.sin.x = sin.x\left(1 - \frac{dx^2}{2} + \ldots\right)$$
$$+ cos.x\left(dx - \frac{dx^3}{2.3} + \ldots\right) - sin.x = cos.x\, dx.$$

5) Für $f(x) = cos.x$ ist eben so

$$d.cos.x = cos.(x + dx) - cos.x$$
$$= cos.x\left(1 - \frac{dx^2}{2} + \ldots\right)$$
$$- sin.x\left(dx - \frac{dx^3}{2.3} + \ldots\right) - cos.x$$
$$= - sin.x\, dx.$$

6) Für $f(x) = tang.x$ ist

$$d.tang.x = d.\frac{sin.x}{cos.x}$$
$$= \frac{cos.x\, d.sin.x - sin.x\, d.cos.x}{cos.^2 x}$$ [Regel (4, vorig. Paragraph]
$$= \frac{(cos.^2 x + sin.^2 x)\, dx}{cos.^2 x}$$ [nach den vorigen Formeln in 4) und 5)]
$$= \frac{dx}{cos.^2 x}.$$

7) Für $f(x) = cot.x$ wird

$$d.cot.x = d.\frac{cos.x}{sin.x} = \frac{sin.x\, d.cos.x - cos.x\, d.sin.x}{sin.^2 x}$$
$$= \frac{-(sin.^2 x + cos.^2 x)\, dx}{sin.^2 x} = -\frac{dx}{sin.^2 x}.$$

8) Für $f(x) = sec.x$ hat man

$$d.sec.x = d.\frac{1}{cos.x} = \frac{-d.cos.x}{cos.^2 x} = \frac{sin.x\, dx}{cos.^2 x}$$
$$= sec.x\, tang.x\, dx.$$

9) Für $f(x) = cosec.\,x$ ist eben so

$$d.cosec.\,x = d.\frac{1}{sin.\,x} = -\frac{d.sin.\,x}{sin.^2 x} = -\frac{cos.\,x\,dx}{sin.^2 x}$$
$$= -cosec.\,x\,cot.\,x\,dx.$$

10) Für $f(x) = sinv.\,x$ hat man

$$d.sinv.\,x = d(1 - cos.\,x) = -d.cos.\,x = sin.\,x\,dx.$$

11) Für $f(x) = cosinv.\,x$ ist

$$d.cosinv.\,x = d(1 - sin.\,x) = -d.sin.\,x = -cos.\,x\,dx\ {}^{*)}.$$

12) Um endlich noch die Differentiale der Kreisbogen zu entwickeln, sey $x = sin.y$, also $y = arc.\,sin.\,x$ **); so folgt aus der ersten Gleichung auch

$dx = cos.y\,dy$, und daraus $dy = \frac{dx}{cos.y} = \frac{dx}{\sqrt{(1 - sin.^2 y)}}$;

also ist, wenn man substituirt:

$$d.arc.\,sin.\,x = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

13) Für $x = cos.y$ hat man eben so

$$y = arc.\,cos.\,x \quad \text{und} \quad dx = -sin.y\,dy;$$

also

$dy = -\frac{dx}{sin.y} = -\frac{dx}{\sqrt{(1 - cos.^2 y)}}$ oder $d.arc.\,cos.\,x = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$

14) Für $x = tang.y$ folgt

$$dx = \frac{dy}{cos.^2 y} \quad \text{und} \quad dy = cos.^2 y\,dx = \frac{1}{1 + tang.^2 y}\,dx$$

[wenn man nämlich (Trigonom. §. 11.) den Cosinus durch

*) Die Differentiale der Co functionen lassen sich am einfachsten aus jenen der betreffenden Functionen herleiten, wenn man in diesen statt x, $90 - x$, also statt dx, $d(90-x) = -dx$ setzt. So war z. B. $d.tang.\,x = \frac{dx}{cos.^2 x}$, folglich ist auch $d.tang\,(90 - x) = \frac{d(90 - x)}{cosin.^2 (90 - x)}$ oder $d.cot.\,x = \frac{-dx}{sin.^2 x}$; und so auch für die übrigen.

**) Dafs durch $arc.\,sin.\,x$ der Bogen bezeichnet wird, dessen Sinus x ist, wurde schon in der Trigonometrie (§. 12.) bemerkt; hier wollen wir noch hinzufügen, dafs mehrere, besonders die französischen Geometer, folgende Bezeichnung dafür eingeführt haben: $arc.\,(sin = x)$; eben so schreiben sie, wenn $tang.\,y = x$ ist, $y = arc\,(tang. = x)$, u. s. w.

die Tangente ausdrückt]; also ist

$$d.\,arc.\,tang.\,x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

15) Eben so ist für $x = cot.\,y$:

$$y = arc.\,cot.\,x \quad \text{und} \quad dx = -\frac{dy}{sin.^2 y};$$

folglich

$$dy = -sin.^2 y\,dx = -\frac{1}{1+cot.^2 y}\,dx \quad \text{(Trigonom. S. 26)}$$

$$\text{oder} \quad d.\,arc.\,cot.\,x = -\frac{dx}{1+x^2} \; *).$$

16) Für $x = sec.\,y$ ist

$$y = arc.\,sec.\,x \quad \text{und} \quad dx = d.\,sec.\,y = sec.\,y\;tang.\,y\;dy \; [8)],$$

$$\text{also} \quad dy = \frac{dx}{sec.\,y\;tang.\,y} = \frac{dx}{x\;tang.\,y};$$

oder wegen $tang.\,y = \sqrt{sec.^2 y - 1}$ (Trigonom. S. 26) auch, wenn man substituirt:

$$d.\,arc.\,sec.\,x = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

17) Eben so findet man (s. die Note)

$$d.\,arc.\,cosec.\,x = \frac{-dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

18) Endlich erhält man auf demselben Wege

$$d.\,arc.\,sinv.\,x = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

$$\text{und} \quad d.\,arc.\,cosinv.\,x = \frac{-dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}.$$

Wir wollen nun die in diesem Paragraphe entwickelten Differentialformeln, welche eben so viele Regeln enthalten, die sich leicht in Worte ausdrücken lassen, im folgenden Schema, ihrer Wichtigkeit und der leichtern Uebersicht

*) Es läfst sich überhaupt, ohne die Entwickelung immer zu wiederholen, $d.\,arc.\,co.f(x)$ ganz einfach aus $d.\,arc.f(x)$ auf folgende Art ableiten. Es ist nämlich z. B.

$$arc.\,cos.\,x = 90 - arc.\,sin.\,x,$$

folglich

$$d.\,arc.\,cos.\,x = d(90 - arc.\,sin.\,x) = -d.\,arc.\,sin.\,x;$$

und so allgemein

$$d.\,arc.\,co.f(x) = -d.\,arc.f(x).$$

wegen, zusammenstellen; zugleich aber diesen Formeln die nöthige Allgemeinheit dadurch verschaffen, dafs wir durchaus statt x, X schreiben, wo X jede Function von x bedeuten kann. Man erhält sofort nachstehende Formeln, welche für das ganze Geschäft des Differentiirens von der gröfsten Wichtigkeit, und also dem Gedächtnisse wohl einzuprägen sind:

I. $d.X^n = nX^{n-1}dX$;

a) $d.\sqrt[n]{X} = \frac{dX}{n\sqrt[n]{X^{n-1}}}$;

aa) $d.\sqrt{X} = \frac{dX}{2\sqrt{X}}$.

II. $d.a^X = a^X la\, dX$;

a) $d.e^X = e^X dX$.

III. $d.log.X = M\frac{dX}{X}$;

a) $d.lX = \frac{dX}{X}$.

IV. $d.sin.X = cos.X\, dX$.

V. $d.cos.X = -sin.X\, dX$.

VI. $d.tang.X = \frac{dX}{cos^2 X}$.

VII. $d.cot.X = -\frac{dX}{sin.^2 X}$.

VIII. $d.sec.X = sec.X\, tang.X\, dX$.

IX. $d.cosec.X = -cosec.X\, cot.X\, dX$.

X. $d.sinv.X = sin.X\, dX$.

XI. $d.cosinv.X = -cos.X\, dX$.

XII. $d.arc.sin.X = \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)}}$.

XIII. $d.arc.cos.X = \frac{-dX}{\sqrt{(1-X^2)}}$.

XIV. $d.arc.tang.X = \frac{dX}{1+X^2}$.

XV. $d.arc.cot.X = \frac{-dX}{1+X^2}$.

XVI. $d.arc.sec.X = \frac{dX}{X\sqrt{(X^2-1)}}$.

XVII. $d \, . \, arc. \, cosec. \, X = \frac{-dx}{X\sqrt{(X^2-1)}}.$

XVIII. $d \, . \, arc. \, sinv. \, X = \frac{dX}{\sqrt{(2X-X^2)}}.$

XIX. $d \, . \, arc. \, cosinv. \, X = \frac{-dX}{\sqrt{(2X-X^2)}}.$

Aus der Formel a) in III. folgt unmittelbar

$$\alpha) \quad dX = X d \, . \, lX;$$

eine in vielen Fällen sehr brauchbare Regel für das Differential einer Function X, die sich immer anwenden läſst, wenn man die Function X logarithmisch auflösen kann. So findet man nach dieser Regel das Differential von $X^{X'}$, einer Form, die uns noch fehlt:

$$\text{XX.} \quad d \, . \, X^{X'} = X^{X'} d \, . \, lX^{X'} = X^{X'} d \, . \, X' lX$$
$$= X^{X'} \left(X' \frac{dX}{X} + lX \, dX' \right);$$

welche Formel offenbar in jene I. oder II. übergeht, je nachdem man X' oder X als constant ansieht.

Zusatz 1. Wir haben hier die Formel I. mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes (wenigstens mittelst der beiden ersten Glieder desselben) abgeleitet; will man diesen dabei umgehen, so kann man auf folgende Art verfahren:

Es ist [3), §. 2.]

$$d \, . \, xx'x'' \ldots = \ldots x''x'dx + \ldots x''xdx' + \ldots x'xdx'' + \ldots,$$

also auch, wenn man die Gleichung durch $xx'x'' \ldots$ dividirt:

$$\frac{d \, . \, xx'x'' \ldots}{xx'x'' \ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'} + \frac{dx''}{x''} + \ldots$$

Nimmt man nun an, daſs n die Anzahl aller Factoren ist, und daſs diese sämmtlich unter einander gleich sind; so hat man

$$\frac{d \, . \, x^n}{x^n} = n \frac{dx}{x}, \quad \text{also} \quad d \, . \, x^n = nx^{n-1} dx,$$

die obige Formel I., deren Giltigkeit aber nach dieser Ableitung erst noch für negative und gebrochene Werthe von n erwiesen werden müſste, vorausgesetzt nämlich, daſs man

die Lehrmethode dergestalt verkehren, und die Differentialrechnung früher als die Binomialformel entwickeln wollte.

Zusatz 2. Die im vorigen Paragraphe [4)] entwickelte Regel für das Differential eines Bruches kann nun auch aus jener 3) für das Product, mit Zuziehung der Formel I., auf folgende Art gefunden werden:

Es ist

$$d.\frac{x'}{x} = d.x'x^{-1} = x^{-1}d.x' + x'd.x^{-1}$$
$$= \frac{dx'}{x} - 1.x'x^{-2}dx = \frac{x\,dx' - x'dx}{x^2}\ *).$$

Uebungs-Beispiele.

§. 4.

Wir wollen die bisher entwickelten Formeln und Regeln sogleich auf mehrere Beispiele anwenden.

1. Es sey $y = \left(2 + 3x^2 + \frac{4}{x^3} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right)^3$; so ist (nach I., §. 3.)

$$dy = 3\left(2 + 3x^2 + \frac{4}{x^3} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right)^2$$
$$\times\, d.\left(2 + 3x^2 + \frac{4}{x^3} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right),$$

und wegen

$$d.\left(2 + 3x^2 + \frac{4}{x^3} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right)$$
$$= 3d.x^2 + d.\frac{4}{x^3} - 2d.x^{-\frac{2}{3}}\ [(2, §. 2.]$$
$$= 3.2x\,dx - \frac{4.3x^2\,dx}{x^6} - 2.-\tfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx\ [\text{I. u. }(4, §. 2.]:$$
$$dy = 3\left(2 + 3x^2 + \frac{4}{x^3} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right)^2$$
$$\times\left(6x - \frac{12}{x^4} + \tfrac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)dx.$$

*) Wir rathen dem fleifsigen Anfänger zur Uebung und zu seinem eigenen Vergnügen die im vorigen Paragraphe in 3) und 4) aufgestellten Regeln auch noch nach der in der obigen Formel α) enthaltenen Regel abzuleiten.

2. Für $y = \sqrt[3]{\left[3\,a^x - \frac{x^2}{sin.\,x}\right]}$ erhält man [§. 3., I., *a*); II.; §. 2., 4); § 3., IV.]

$$dy = \frac{d.\left(3\,a^x - \frac{x^2}{sin.\,x}\right)}{3\sqrt[3]{\left[3\,a^x - \frac{x^2}{sin.\,x}\right]}} = \left[3\,a^x\,l\,a\,dx - \left(\frac{sin.\,x\,.\,2\,x\,dx - x^2\,.\,cos.\,x\,dx}{sin.^2\,x}\right)\right] : 3\sqrt[3]{\left[3\,a^x - \frac{x^2}{sin.\,x}\right]};$$

oder, wenn man reducirt:

$$dy = \frac{(3\,a^x\,sin.\,x\,l\,a - 2\,x + x^2\,cot\;x)\,dx}{3\,sin.\,x\sqrt[3]{\left[3\,a^x - \frac{x^2}{sin.\,x}\right]}}.$$

3. Um das Differential von $y = \sqrt{(e^x\,tang.^3\,x)}$ zu finden, hat man [§. 3., II., *aa*); §. 2., 3); §. 3., II., *a*); I. und VI.]

$$dy = \frac{d\,.\,e^x\,tang.^3\,x}{2\sqrt{(e^x\,tang.^3\,x)}} = \frac{e^x\,d\,.\,tang.^3\,x + tang.^3\,x\;d\,.\,e^x}{2\sqrt{(e^x\,tang.^3\,x)}};$$

und wegen $d\,.\,tang.^3\,x = 3\,tang.^2\,x\;d\,.\,tang.\,x = 3\,tang.^2\,x\,\frac{dx}{cos.^2\,x}$ und $d\,.\,e^x = e^x\,dx$ endlich, wenn man gleich reducirt:

$$dy = \frac{e^x\,tang.\,x\,(3 + sin.\,x\;cos.\,x)\,dx}{2\,cos.^2\,x\sqrt{(e^x\,tang.\,x)}}.$$

4. Für $y = (1 - \sqrt{a})^{sin.\,x}$ ist (§. 3., II.): $dy = (1 - \sqrt{a})^{sin.\,x}\,l(1 - \sqrt{a})\,d\,.\,sin.\,x$, oder wegen $d\,.\,sin.\,x = cos.\,x\;dx$:

$$dy = (1 - \sqrt{a})^{sin.\,x}\,l(1 - \sqrt{a})\,cos.\,x\;dx.$$

5. Es sey $y = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ [$= sin. x$]; so ist [§. 2., 4), Zus.)

$$dy = \frac{d.e^{x\sqrt{-1}} - d.e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}}.\sqrt{-1}\,dx - e^{-x\sqrt{-1}}.-\sqrt{-1}\,dx}{2\sqrt{-1}},$$

also $dy = \frac{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\,dx}{2}$ [$= cos. x\,dx$].

6. Für $y = l\,sin. x$ wird [§. 3., III., a); IV.]

$$dy = \frac{d.sin. x}{sin. x} = \frac{cos. x\,dx}{sin. x} = cot. x\,dx.$$

Eben so hat man für $y = l\,tang. x$ (§. 3., VI.):

$$dy = \frac{d.tang. x}{tang. x} = \frac{dx}{tang. x\,cos^2 x} = \frac{dx}{sin. x\,cos. x} = \frac{2\,dx}{sin. 2x};$$

und für $y = l\,cot. x$ (§. 3., VII.; oder kürzer, wenn man in der vorigen Gleichung statt x, $90 - x$ setzt):

$$dy = \frac{d.cot. x}{cot. x} = \frac{-dx}{cot. x\,sin.^2 x} = \frac{-dx}{sin. x\,cos. x} = \frac{-2\,dx}{sin. 2x}.$$

7. Für $y = sin.^3 x^2$ ist (§. 3., I.; IV.; I.):

$$dy = 3\,sin^2 x^2\,d.sin. x^2 = 3\,sin.^2 x^2\,cos. x^2\,d.x^2,$$

also zuletzt $dy = 6x\,sin.^2 x^2\,cos. x^2\,dx$.

8. Für $y = cos. l x$ folgt [§. 3., V.; III., a)]

$$dy = -sin. l x\,d.l x = -sin. l x\,\frac{dx}{x}.$$

9. Es sey $y = tang. a^{lx}$; so ist [§. 3., VI; II.; III., a)]

$$dy = \frac{d.a^{lx}}{cos.^2 a^{lx}} = \frac{a^{lx}\,l a\,d.l x}{cos.^2 a^{lx}} = \frac{a^{lx}\,l a\,dx}{x\,cos.^2 a^{lx}}.$$

10. Für $y = sec. \sqrt{\left(\frac{x}{l x}\right)}$ wird (§. 3., VIII.):

$$dy = sec. \sqrt{\left(\frac{x}{l x}\right)}\,tang. \sqrt{\left(\frac{x}{l x}\right)}\,d.\sqrt{\left(\frac{x}{l x}\right)};$$

es ist aber [I., aa)]: $d.\sqrt{\left(\frac{x}{l x}\right)} = \frac{d.\left(\frac{x}{l x}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{x}{l x}\right)}}$,

und [§. 2., 4); §. 3, III., a)]:

$$d\,.\,\frac{x}{l\,x} = \frac{l\,x\,dx - x\,\frac{dx}{x}}{l^2\,x} = \frac{(l\,x - 1)\,dx}{l^2\,x};$$

daher endlich

$$dy = sec.\sqrt{\left(\frac{x}{l\,x}\right)}\;tang.\sqrt{\left(\frac{x}{l\,x}\right)}\,.\,\frac{(l\,x - 1)\,dx}{2\,l^2\,x\sqrt{\left(\frac{x}{l\,x}\right)}}.$$

11. Für $y = (l\,sinv.\,x - a^{cos.\,x})^{x^2}$ folgt (§. 3., XX.):

$$dy = y\,d\,.\,x^2\,l\,(l\,sinv.\,x - a^{cos.\,x})$$

$$[§. 2., 3)] = y\left[l\,(l\,sinv.\,x - a^{cos.\,x})\,2\,x\,dx + \frac{x^2\,(d\,.\,l\,sinv.\,x - d\,.\,a^{cos.\,x})}{l\,sinv.\,x - a^{cos.\,x}}\right];$$

oder wegen

$$d\,.\,l\,sinv.\,x = \frac{d\,.\,sinv.\,x}{sinv.\,x} = \frac{sin.\,x\,dx}{sinv.\,x}\;(§. 3., X.)$$

und

$$d\,.\,a^{cos.\,x} = a^{cos.\,x}\,l\,a\;d\,.\,cos.\,x$$
$$= -\,a^{cos.\,x}\,sin.\,x\;l\,a\,dx\;(§. 3., II.; V.)$$

endlich

$$dy = y\left\{2\,l\,(l\,sinv.\,x - a^{cos.\,x}) + x\,\frac{\left(\frac{sin.\,x}{sinv.\,x} + a^{cos.\,x}\,sin.\,x\;l\,a\right)}{l\,sinv.\,x - a^{cos.\,x}}\right\}x\,dx.$$

12. Ist $y = arc.\,sin.\,(x^2 - l\,x)$, so ist (§. 3., XII.):

$$dy = \frac{d\,.\,(x^2 - l\,x)}{\sqrt{[1 - (x^2 - l\,x)^2]}} = \frac{\left(2\,x - \frac{1}{x}\right)dx}{\sqrt{[1 - (x^2 - l\,x)^2]}}.$$

13. Für $y = arc.\,tang.\left(l\,.\,\frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2} + x}\right)$ ist (XIV.), wenn man indeſs $\frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2} + x} = z$ setzt:

$$dy = \frac{d\;l\,z}{1 + l^2\,z};$$

und wegen

$$d.lz = \frac{d.z}{z} = d.\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}+x}\right) : z$$

$$= \frac{(\sqrt{1-x^2}+x)\, d.(\sqrt{1-x^2}-x) - (\sqrt{1-x^2}-x)\, d.(\sqrt{1-x^2}+x)}{z(\sqrt{1-x^2}+x)^2},$$

wobei $d.(\sqrt{1-x^2}-x) = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - dx$

und $d.(\sqrt{1-x^2}+x) = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + dx,$

also nach einer leichten Reduction

$$d.lz = \frac{[-(x+\sqrt{1-x^2})^2 + (x-\sqrt{1-x^2})^2]\,dx}{z(x+\sqrt{1-x^2})^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-4x\,dx}{z(x+\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{4x\,dx}{2x^2-1}$$

ist, endlich:

$$dy = \frac{4x\,dx}{(2x^2-1)(1+l^2 z)}.$$

14. Um das Differential von $y = llx$ zu finden, kann man indeſs $lx = z$ setzen; dadurch wird $y = lz$ und $dy = \frac{dz}{z}$, und wenn man zurück substituirt, wegen $dz = d.lx = \frac{dx}{x}$, auch:

$$dy = \frac{dx}{x\,lx}.$$

Eben so findet man durch Wiederholung, für $y = lllx$:

$$dy = \frac{dx}{x\,lx\,llx},$$

u. s. w.

15. Für $y = e^{a^x}$ setze man $a^x = z$, so wird $y = e^z$, und nach §. 3., II., a): $dy = e^z dz$; also wenn man den Werth von z wieder herstellt, wegen $dz = d.a^x = a^x\,la\,dx$ (§. 3., II.) endlich:

$$dy = e^{a^x} a^x\,la\,dx.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für $y = e^{e^{a^{\sin.x}}}$

$$dy = e^{e^{a^{\sin.x}}}\; e^{a^{\sin.x}}\; a^{\sin.x} \cos.x\; la\; dx,$$

u. s. f.

Die *höhern* Differentiale.

§. 5.

Aus den bisher abgeleiteten und bereits auf mehrere Beispiele angewendeten Regeln folgt offenbar, dafs allgemein genommen das Differential einer jeden Function gleich ist einer neuen Function, multiplicirt mit dem Differential der betreffenden variablen Gröfse, oder, was dasselbe ist, dafs in $d.f(x) = p\,dx$ der Coefficient $p = \frac{d.f(x)}{dx}$ selbst wieder irgend eine Function von x sey (in besondern Fällen kann dieser auch beständig seyn). Setzt man daher, da auf diese Weise auch p wieder nach denselben Regeln differentiirt werden kann, $dp = q\,dx$; so wird

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx} = \frac{ddf(x)}{dx^2} = \frac{d^2.f(x)}{dx^2},$$

wenn man nämlich dx dabei als beständig annimmt.

Setzt man ferner wieder, da eben so q (im Allgemeinen) irgend eine Function von x seyn wird, $dq = r\,dx$; so erhält man

$$r = \frac{dq}{dx} = \frac{d\,d^2 f(x)}{dx\;dx^2} = \frac{d^3.f(x)}{dx^3}, \text{ *)}$$

u. s. w.

Die Gröfsen p, q, r, . . . heifsen beziehungsweise **Differentialcoefficienten** der **ersten**, **zweiten**, **dritten**, . . . **Ordnung** der gegebenen Function $f(x)$; und da die vorigen Relationen geben:

$$d.f(x) = p\,dx,\quad d^2.f(x) = q\,dx^2,$$
$$d^3.f(x) = r\,dx^3, \text{ u. s. f. **)}$$

*) Wir erinnern auch hier wieder, dafs dx^2, dx^3, dx^n statt $(dx)^2$, $(dx)^3$, $(dx)^n$ steht, und nicht mit $d.x^2$, $d.x^3$, . . ., welches statt $d.(x^2)$, $d.(x^3)$, . . . gesetzt wird, und eben so wenig mit d^2x, d^3x, . . ., was für ddx, $dddx$, . . . steht, verwechselt werden darf.

**) Bezeichnet man $f(x)$ durch y, so hat man nach diesen Relationen: $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$, . . .; da nun p, q, r, . . . endliche Gröfsen, d. i. gewisse Functionen

so folgt, dafs diese der Reihe nach erhalten werden, indem man das erste, zweite, dritte, ... Differential der Function $f(x)$ beziehungsweise durch dx, dx^2, dx^3, ... dividirt.

Uebrigens sieht man auch, dafs jedes folgende Differential aus dem unmittelbar vorhergehenden gefunden oder entwickelt wird, wenn man dieses abermals nach den ursprünglichen Regeln differentiirt und dabei dx als eine constante Gröfse ansieht. Wir wollen im nächsten Paragraphe von einigen Functionen die höhern oder aufeinander folgenden Differentiale nach dieser Regel suchen.

§. 6.

Beispiele.

1) Für $f(x) = x^n$ erhält man

$$d.x^n = nx^{n-1}dx,$$

$$d^2.x^n = d(d.x^n) = n\,dx\,d.x^{n-1} = n(n-1)x^{n-2}dx^2,$$

$$d^3.x^n = d(d^2.x^n) = n(n-1)dx^2\,d.x^{n-2}$$
$$= n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3,$$

. .,

$$d^r.x^n = n(n-1)\ldots(n-r+1)x^{n-r}dx^r, \text{ folglich}$$

$$d^n.x^n = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\,dx^n.$$

Hier ist $p = nx^{n-1}$ (also eine neue Function von x), $q = n(n-1)x^{n-2}$ (detto), $r = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ (detto), u. s. w.

Ist daher n eine ganze positive Zahl, so sind alle folgenden Differentiale von x^n gleich Null, weil dx^n hier eine constante Gröfse ist. Im Gegentheile kann man ohne Ende fort differentiiren, wenn n negativ oder gebrochen ist.

a) Für $u = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots$ hat man eben so:

$$du = (A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + \ldots)dx,$$

von x sind; so folgt, dafs dy, d^2y, d^3y, ... beziehungsweise mit dx, dx^2, dx^3, ... von einerlei Ordnung sind; aus diesem Grunde werden auch dy und dx, d^2y und dx^2, d^3y und dx^3 etc. homogen genannt.

$$d^2 u = [A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \ldots]\, dx^2,$$

u. s. w.

2) Für $f(x) = a^x$ ist

$$d.a^x = a^x\, l a\, dx,$$
$$d^2.a^x = l a\, dx\, d.a^x = a^x\, l^2 a\, dx^2,$$
$$d^3.a^x = l^2 a\, dx^2\, d.a^x = a^x\, l^3 a\, dx^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$d^r.a^x = a^x\, l^r a\, dx^r.$$

Hier ist $p = a^x\, l a$, $q = a^x\, l^2 a$, $r = a^x\, l^3 a$, u. s. w.

3) Für $f(x) = l x$ erhält man

$$d.lx = \frac{dx}{x},$$
$$d^2.lx = dx\, d.\frac{1}{x} = -\frac{1.dx^2}{x^2},$$
$$d^3.lx = -dx^2\, d.\frac{1}{x^2} = +\frac{1.2\, dx^3}{x^3},$$
$$d^4.lx = 2\,dx^3\, d.\frac{1}{x^3} = -\frac{1.2.3\, dx^4}{x^4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$d^r.lx = (-1)^{r-1}\, 1.2.3\ldots(r-1)\frac{dx^r}{x^r}$$ (welches Gesetz von $r = 2$ angefangen gilt).

Hier ist $p = \frac{1}{x}$, $q = -\frac{1}{x^2}$, $r = \frac{2}{x^3}$, u. s. f.

4) Für $f(x) = sin.x$ folgt

$$d.sin.x = cos.x\, dx,$$
$$d^2.sin.x = dx.d.cos.x = -sin.x\, dx^2,$$
$$d^3.sin.x = -dx^2\, d.sin.x = -cos.x\, dx^3,$$
$$d^4.sin.x = -dx^3\, d.cos.x = sin.x\, dx^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$d^{2r-1}.sin.x = (-1)^{r+1}\, cos.x\, dx^{2r-1},$$
$$d^{2r}.sin.x = (-1)^r\, sin.x\, dx^{2r}.$$

Hier ist $p = cos.x$, $q = -sin.x$, $r = -cos.x$, u. s. w.

5) Für $f(x) = cos.x$ hat man eben so:

$$d.cos.x = -sin.x\, dx,$$
$$d^2.cos.x = -dx\, d.sin.x = -cos.x\, dx^2,$$

$$d^3.\cos.x = -dx^2\,d.\cos.x = \sin.x\,dx^3,$$
$$d^4.\cos.x = dx^3\,d.\sin.x = \cos.x\,dx^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$d^{2r-1}.\cos.x = (-1)^r\,\sin.x\,dx^{2r-1},$$
$$d^{2r}.\cos.x = (-1)^r\,\cos.x\,dx^{2r}.$$

Hier ist $p = -\sin.x$, $q = -\cos.x$, $r = \sin.x$, u. s. f.

6) Ist endlich $f(x) = arc.\sin.x$, so findet man auf dieselbe Art:

$$d.arc.\sin.x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$
$$d^2.arc.\sin.x = \frac{x\,dx^2}{\sqrt{[(1-x^2)^3]}},$$
$$d^3.arc.\sin.x = \frac{(1+2x^2)\,dx^3}{\sqrt{[(1-x^2)^5]}},$$
$$d^4.arc.\sin.x = \frac{(9x+6x^3)\,dx^4}{\sqrt{[(1-x^2)^7]}},$$
$$d^5.arc.\sin.x = \frac{(9+72x^2+24x^4)\,dx^5}{\sqrt{[(1-x^2)^9]}},$$

u. s. w.

Hier ist

$$p = 1 : \sqrt{(1-x^2)},\quad q = x : \sqrt{[(1-x^2)^3]},$$
$$r = (1+2x^2) : \sqrt{[(1-x^2)^5]},\ \text{etc.}$$

Anmerk. Wir wollen noch auf den Umstand insbesondere aufmerksam machen, daſs nach Beschaffenheit der Function, nach einer jedesmaligen Differentiation eine Constante herausfallen kann. Dieſs ist z. B. der Fall für die Function

$$u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

§. 7.

Oefters müssen die höhern Differentiale einer Function unter der Voraussetzung entwickelt werden, daſs dx nicht constant, sondern selbst wieder veränderlich ist; in diesem Falle werden die Ausdrücke zwar complicirter, bieten aber in ihrer Ableitung, wie sich an dem folgenden Beispiele schon ersehen läſst, keine weitere Schwierigkeit dar.

So findet man z. B. unter dieser Voraussetzung:

$$d^2.x^n = d.n\,x^{n-1}\,dx = n(n-1)\,x^{n-2}\,dx^2 + n\,x^{n-1}\,d^2x,$$

$$d^3 . x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3 + n(n-1)x^{n-2}2dx\,d^2x$$
$$+ n(n-1)x^{n-2}dx\,d^2x + nx^{n-1}d^3x,$$
u. s. w.;

oder auch

$$\frac{d^2 . x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}\frac{d^2x}{dx^2},$$
$$\frac{d^3 . x^n}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$+ 3n(n-1)x^{n-2}\frac{d^2x}{dx^2} + nx^{n-1}\frac{d^3x}{dx^3},$$
u. s. f.

Da aber dx auf unzählig verschiedene Arten veränderlich seyn kann, so sind offenbar in dem gegenwärtigen Falle die höhern Differentiale, oder was auf eins hinausläuft, die Differentialcoefficienten der höhern Ordnung, wie z. B. hier jener $\frac{d^3 . x^n}{dx^3}$, so lange unbestimmt, als nicht die Bedeutung oder die Werthe von $\frac{d^2x}{dx^2}$, $\frac{d^3x}{dx^3}$, u. s. f. festgesetzt sind. Es ist indefs schon hinreichend, wenn nur der Differentialcoefficient zweiter Ordnung, nämlich $\frac{d^2x}{dx^2}$, auf irgend eine Weise gegeben oder festgesetzt wird; weil sich dadurch auch alle folgenden, höhern Coefficienten leicht bestimmen lassen und sofort mit gegeben sind.

Ist z. B. dx constant, also $\frac{d^2x}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3x}{dx^3} = 0$, u. s. w.; so ist für unser Beispiel

$$\frac{d^3 . x^n}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}.$$

Ist hingegen $\frac{d^2x}{dx^2} = a$, nämlich constant; so folgt aus dieser Bedingungsgleichung: $d^2x = a\,dx^2$; also, wenn man differentiirt: $d^3x = 2a\,dx\,d^2x$, und daraus

$$\frac{d^3x}{dx^3} = 2a\frac{d^2x}{dx^2} = 2a^2;$$

wenn man nämlich für $\frac{d^2x}{dx^2}$ den vorigen Werth a setzt. Und so könnte man nöthigenfalls auch $\frac{d^4x}{dx^4}$ u. s. w. bestimmen und durch a ausdrücken. Bei dieser Annahme wäre also der

obige Differentialcoefficient

$$\frac{d^3 . x^n}{d x^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3} + 3n(n-1)ax^{n-2} + 2na^2 x^{n-1}$$

ebenfalls vollkommen bestimmt.

Ist allgemein $\frac{d^2 x}{d x^2} = X$ irgend eine Function von x, so ist auch $d^2 x = X d x^2$, und wenn man differentiirt: $d^3 x = d x^2 \, d X + 2 X d x \, d^2 x$, oder wenn man $d X = X' d x$ setzt und dann durch $d x^3$ dividirt:

$$\frac{d^3 x}{d x^3} = X' + 2 X \frac{d^2 x}{d x^2} = X' + 2 X^2.$$

Auf die nämliche Art würde man aus dieser Gleichung auch $\frac{d^4 x}{d x^4}$, dann aus der entstehenden wieder $\frac{d^5 x}{d x^5}$ u. s. f. vollkommen bestimmen können.

Es ist sonach klar, dafs wenn der Coefficient $\frac{d^2 x}{d x^2}$ auf irgend eine Weise festgesetzt wird, dadurch auch alle folgenden oder höhern Differentialcoefficienten vollkommen bestimmt sind.

Gewöhnlich wird dieser Coefficient der zweiten Ordnung dadurch festgesetzt, dafs man eine Function von x angibt, deren erstes Differential constant ist. Soll z. B. der obige Quotient $\frac{d^3 . x^n}{d x^3}$ in der Voraussetzung bestimmt werden, dafs $d . a^x = d u$ eine beständige Gröfse ist; so hat man $a^x l a d x = d u$, folglich, wenn man wieder differentiirt: $a^x l^2 a d x^2 + a^x l a d^2 x = 0$, und daraus ist $\frac{d^2 x}{d x^2} = - l a$ vollkommen bestimmt.

Mit diesem Werthe findet man ferner eben so

$$\frac{d^3 x}{d x^3} = 2 l^2 a,$$

und man hat unter dieser Voraussetzung:

$$\frac{d^3 . x^n}{d x^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3} - 3n(n-1) l a x^{n-2} + 2 n l^2 a x^{n-1},$$

welcher Ausdruck ebenfalls vollkommen bestimmt ist.

Beispiel.

Zur Uebung soll endlich noch $d^2.a^x$ unter der Voraussetzung entwickelt werden, daſs dx veränderlich, und $d.\sin.x = du$ beständig ist.

Es ist

$$d^2.a^x = d.a^x la\,dx = a^x l^2 a\,dx^2 + a^x la\,d^2x,$$

also

$$\frac{d^2.a^x}{dx^2} = a^x l^2 a + a^x la \frac{d^2x}{dx^2}.$$

Um nun hier $\frac{d^2x}{dx^2}$ zu bestimmen, hat man der Voraussetzung gemäſs:

$$\cos.x\,dx = du,$$

daher, wenn man abermals differentiirt:

$$-\sin.x\,dx^2 + \cos.x\,d^2x = 0,$$

und daraus

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{\sin.x}{\cos.x} = \tang.x.$$

Es ist daher endlich

$$\frac{d^2.a^x}{dx^2} = a^x l^2 a + a^x \tang.x\,la,$$

oder auch

$$d^2.a^x = a^x la(la + \tang.x)\,dx^2;$$

wobei dieses Differential offenbar vollkommen bestimmt ist.

Anmerk. Obschon in der Anwendung die Natur des Gegenstandes oder der Aufgabe immer entscheiden muſs, unter welcher Voraussetzung die höhern Differentiale zu entwickeln sind; so wollen wir dennoch schon hier bemerken, daſs in der Regel dx dabei als constant angenommen wird. Aus diesem Grunde, und weil für den entgegengesetzten Fall das in diesem Paragraphe Vorgetragene hinreichend ist, werden auch wir bei unsern folgenden Entwickelungen, wenn nichts weiter bemerkt wird, dx immer als beständig voraussetzen.

Zweites Capitel.

Ableitung des *Taylor*'schen, *Maclaurin*'schen und *Lagrange*'schen Lehrsatzes.

Das *Taylor*'sche Theorem.

§. 8.

Setzt man in $d.f(x) = p\,dx = f'(x)\,dx$ (§. 5.), statt x, $x+y$; so wird

$$d.f(x+y) = f'(x+y)\,d.(x+y).$$

Sieht man dabei y als constant an, so ist $d.(x+y) = dx$ und daher

$$\frac{d.f(x+y)}{dx} = f'(x+y);$$

betrachtet man dagegen y als die variable und x als die constante Gröſse, wodurch $d.(x+y) = dy$ wird; so folgt auch

$$\frac{d.f(x+y)}{dy} = f'(x+y):$$

d. h. der Differentialcoefficient von $f(x+y)$ bleibt ungeändert, man mag in der Function $f(x+y)$ x oder y als die veränderliche Gröſse ansehen *).

Dieſs vorausgeschickt, wollen wir nun ganz allgemein $f(x+y)$ in eine Reihe nach Potenzen von y entwickeln. Dazu setze man, da das erste Glied der Reihe kein y enthalten darf und gleich $f(x)$ seyn muſs, indem für $y = 0$

*) Dasselbe gilt auch noch für die höhern Differentialcoefficienten; denn es ist

$$\frac{d^2.f(x+y)}{dx^2} = \frac{d.f'(x+y)}{dx} = \frac{d.f'(x+y)}{dy} = \frac{d^2.f(x+y)}{dy^2}.$$

Und eben so ist allgemein:

$$\frac{d^n.f(x+y)}{dx^n} = \frac{d^n.f(x+y)}{dy^n}.$$

die identische Gleichung $f(x) = f(x)$ entstehen soll:

$$f(x+y) = f(x) + Ay^{\alpha} + By^{\beta} + Cy^{\gamma} + \dots$$

wobei offenbar die von y unabhängigen Coefficienten A, B, C, ... gewisse Functionen von x seyn müssen, die wir sofort nebst den Exponenten α, β, γ, ... zu bestimmen haben.

Sieht man y als constant an und nimmt beiderseits das Differential, so entsteht, wenn sogleich durch dx dividirt wird:

$$\frac{d.f(x+y)}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx} + y^{\alpha}\frac{dA}{dx} + y^{\beta}\frac{dB}{dx} + y^{\gamma}\frac{dC}{dx} + \dots$$

Wird dagegen x als beständig und y als veränderlich angesehen, so hat man eben so, wenn man beiderseits differentiirt und durch dy dividirt:

$$\frac{d.f(x+y)}{dy} = A\alpha y^{\alpha-1} + B\beta y^{\beta-1} + C\gamma y^{\gamma-1} + \dots$$

Es ist demnach zufolge des vorigen Satzes, d. i. wegen $\frac{d.f(x+y)}{dx} = \frac{d.f(x+y)}{dy}$:

$$\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{dA}{dx}.y^{\alpha} + \frac{dB}{dx}.y^{\beta} + \frac{dC}{dx}.y^{\gamma} + \dots =$$

$$A\alpha y^{\alpha-1} + B\beta y^{\beta-1} + C\gamma y^{\gamma-1} + \dots$$

Damit nun diese beiden Reihen in Bezug auf die von $f(x)$, A, B, ... unabhängige Gröfse y von einerlei Form erscheinen, darf man blofs setzen:

$$\alpha - 1 = 0,\ \beta - 1 = \alpha,\ \gamma - 1 = \beta, \text{ u. s. w},$$

wodurch $\alpha = 1$, $\beta = \alpha + 1 = 2$, $\gamma = \beta + 1 = 3$, etc.,

also

$$\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{dA}{dx}y + \frac{dB}{dx}y^2 + \frac{dC}{dx}y^3 + \dots =$$

$$A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots$$

wird. Aus dieser Gleichung hat man ferner nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$A = \frac{d.f(x)}{dx},\quad 2B = \frac{dA}{dx} = \frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx},$$

also (da dx als constant genommen wird)

$$B=\frac{d^2.f(x)}{2\,dx^2},\quad C=\frac{dB}{3\,dx}=\frac{d^3.f(x)}{2.3\,dx^3},\quad D=\frac{dC}{4\,dx}=\frac{d^4.f(x)}{2.3.4\,dx^4},$$

u. s. w.

Diese Werthe endlich von α, β, γ, . . . A, B, C, . . . in die oben für $f(x+y)$ angenommene Reihe substituirt, geben:

$$\text{I.}\quad f(x+y)=f(x)+\frac{d.f(x)}{dx}\frac{y}{1}+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{y^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^3\,f(x)}{dx^3}\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots\ ^{*)}$$

Diese Reihe, welche nach ihrem Erfinder *Brook Taylor* (geb. zu Edmonton unweit London 1685; gest. 1731) die *Taylor*sche genannt wird und in der höhern Analysis von der gröſsten Wichtigkeit ist, zeigt die Zu- oder Abnahme, also überhaupt die Veränderung der Function $f(x)$, wenn in der letztern die Variable x um eine ganz willkürliche Gröſse zu oder abnimmt (im letztern Falle darf man in I. nur statt $+y$, $-y$ setzen) **).

*) Diese Ableitung zeigt, daſs die entwickelten Werthe von A, B, C, . . . eine nothwendige Folge sind von der Annahme $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, . . . Für jene Fälle also, in welchen es nicht möglich ist, $f(x+y)$ in eine nach steigenden, ganzen Exponenten von y fortlaufende Reihe zu entwickeln (was, wie wir sehen werden, nur für specielle oder particuläre Werthe von x eintreten kann) werden sich auch diese Coefficienten unter keiner endlichen Form darstellen lassen, und dadurch die Unmöglichkeit einer solchen Entwicklung anzeigen. (M. s. §. 11.)

**) Die Wichtigkeit dieses Theorems hat verschiedene Ableitungen desselben veranlaſst; wir wollen davon noch ein paar der einfachsten anführen.

1. Setzt man allgemein $f(x)=Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\ldots$, wo A, B, C, . . . kein x mehr enthalten oder von dieser Variablen unabhängig seyn sollen, und läſst man x um die willkürliche Gröſse h zunehmen; so wird

$$f(x+h)=A(x+h)^\alpha+B(x+h)^\beta+C(x+h)^\gamma+\ldots,$$

oder, wenn man entwickelt, auch:

$$f(x+h)=Ax^\alpha+A\alpha x^{\alpha-1}h+A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\frac{h^2}{2}+\ldots$$
$$+Bx^\beta+B\beta x^{\beta-1}h+B\beta(\beta-1)x^{\beta-2}\frac{h^2}{2}+\ldots$$

Anmerk. Ist die Function $f(x)$ nicht etwa so beschaffen, dafs von ihren aufeinander folgenden Differentialen endlich eines constant, also alle folgenden Null werden; so bildet die *Taylor*'sche Formel I. offenbar eine unendliche Reihe, bei deren Anwendung wieder die nöthige Vorsicht hinsichtlich ihrer Con-

$$+ Cx^{\gamma} + C\gamma x^{\gamma-1} h + C\gamma(\gamma-1) x^{\gamma-2} \frac{h^2}{2} + \ldots$$

$+$ u. s. f.

Nimmt man nun diese Glieder nach verticalen Columnen zusammen, so erhält man wegen $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots = f(x)$,

$$A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + \ldots = \frac{d.f(x)}{dx},$$

$$A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + \ldots = \frac{d^2.f(x)}{dx^2}$$

u. s. w. [§. 6., 1, a)]:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{d.f(x)}{dx} h + \frac{d^2.f(x)}{dx^2} \frac{h^2}{2}$$
$$+ \frac{d^3.f(x)}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots,$$

wie oben.

2. Es war (Bd. I. §. 84.) für die Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$:

$$1)\quad a_{n+1} = a_1 + n\Delta^1 a_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 a_1$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 a_1 + \ldots$$

Setzt man nun $a_1 = f(x)$, $a_2 = f(x+\Delta x)$, $a_3 = f(x+2\Delta x)$, ... $a_{n+1} = f(x+n\Delta x)$, d. i. läfst man in der obigen Reihe immer das folgende aus dem vorhergehenden Gliede dadurch entstehen, dafs man in $f(x)$, x um Δx zunehmen läfst; so hat man nach dieser Formel 1):

$$f(x+n\Delta x) = f(x) + n\Delta^1.f(x) + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2.f(x) + \ldots$$

Man setze ferner $n\Delta x = h$, also $n = \frac{h}{\Delta x}$; so wird auch:

$$f(x+h) = f(x) + \Delta^1.f(x) \frac{h}{\Delta x} + \Delta^2.f(x) \frac{h(h-\Delta x)}{2.\Delta x^2} + \ldots$$

Nimmt man jetzt Δx unendlich klein an und setzt $\Delta x = dx$, wodurch auch statt $\Delta.f(x)$, $\Delta^2.f(x)$..: $d.f(x)$, $d^2.f(x)$, .. gesetzt werden mufs; so hat man nach gehöriger Reduction, da das unendlich Kleine gegen das Endliche verschwindet, wieder wie oben:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{d.f(x)}{dx} h + \frac{d^2.f(x)}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3.f(x)}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

vergenz zu beobachten ist. Wendet man auf diese Reihe, deren Gesetz klar vor Augen liegt, den im §. 125. (I. Bd.) entwickelten Lehrsatz an, und setzt Kürze halber $\frac{d^n . f(x)}{d x^n} = \varphi(x)$, also $\frac{d^{n+1} . f(x)}{d x^{n+1}} = \frac{d . \varphi(x)}{d x}$; so folgt, daſs diese Reihe I. convergire oder divergire, je nachdem für $n = \infty$ der Quotient

$$\frac{\frac{d . \varphi(x)}{d x} . \frac{y^{n+1}}{1 . 2 . 3 \ldots (n+1)}}{1 - \frac{\frac{d . \varphi(x)}{d x}}{\varphi(x)} . \frac{y}{n+1}}$$

verschwindet oder nicht verschwindet. So ist z. B. für $f(x) = a^x$ dieser Quotient gleich

$$\frac{a^x \frac{(y\, l\, a)^{n+1}}{1 . 2 . 3 \ldots (n+1)}}{1 - \frac{y\, l\, a}{n+1}};$$

woraus sofort folgt, daſs in diesem Falle die unendliche Reihe I. für jeden endlichen Werth von y und $l\,a$ convergire; wovon man sich auch leicht durch die wirkliche Entwicklung der Reihe selbst überzeugen kann.

Lagrange hat auf eine sehr scharfsinnige Weise die Grenze des Fehlers, welchen man begeht, indem man in der *Taylor*schen Reihe nur einige ihrer ersten Glieder beibehält, dadurch bestimmt, daſs er die Grenzen für den Betrag des Restes, d. i. des vernachlässigten Theils der Reihe aufsuchte. Man kann nach ihm (m. s. z. B. *Lacroix*'s Differential- und Integralrechnung, in 4to, 2. Aufl., S. 380) sehr leicht (wenn nämlich die Glieder der Reihe gleiche Zeichen besitzen) folgenden Satz ableiten: der Betrag der aus der Entwicklung von $f(x+h)$ entspringenden unendlichen Reihe von irgend einem Gliede angefangen, ist immer gleich diesem Gliede selbst, in dieses statt x $x + d$ gesetzt, wo d einen zwischen Null und h liegenden Werth hat.

§. 9.

Beispiele.

1. Ist $f(x) = 2x^2 - 3x$ und läſst man x um die Gröſse a zunehmen; so ist nach der *Taylor*'schen Reihe I., wegen

$$\frac{d.f(x)}{dx}=4x-3,\ \frac{d^2.f(x)}{dx^2}=4,\ \frac{d^3.f(x)}{dx^3}=0,\ \frac{d^4.f(x)}{dx^4}=0$$

u. s. w., die Zunahme der Function:

$$f(x+a)-f(x)=(4x-3)a+4\frac{a^2}{2}=4ax-3a+2a^2.$$

2. Ist $f(x)=sin.\,x$, und läſst man den Bogen x um $1'$ zunehmen; so erhält man, wenn die Länge des Bogens von einer Minute durch b bezeichnet wird, wieder nach I.:

$$f(x+1'),\ \text{d. i. } sin.\,(x+1')$$
$$=sin.\,x+\frac{d.\,sin.\,x}{dx}b+\frac{d^2.\,sin.\,x}{dx^2}\frac{b^2}{2}+\ldots$$
$$=sin.\,x+cos.\,x\,b-sin.\,x\frac{b^2}{2}-cos.\,x\frac{b^3}{2.3}+\ldots$$

Da nun $b=\cdot00029089$ ist, und auch $sin.\,x$ höchstens die Einheit erreichen kann; so kann man bis auf sieben Decimalstellen genau $sin.\,(x+1')=sin.\,x+cos.\,x\,b$ setzen.

§. 10.

Die *Taylor*'sche Reihe dienet nicht bloſs dazu, die Veränderung der Function zu finden, welche diese durch eine Zu- oder Abnahme der veränderlichen Gröſse erleidet; sondern sie kann auch zur Entwicklung der Functionen in unendliche Reihen benützt werden, wie aus den nachstehenden Beispielen erhellet.

Beispiele.

1. Es sey $f(x)=x^n$, also $f(x+y)=(x+y)^n$; so ist [§. 6., 1)]

$$\frac{d.f(x)}{dx}=\frac{d.x^n}{dx}=nx^{n-1},\quad \frac{d^2.f(x)}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2},$$
$$\frac{d^3.f(x)}{dx^3}=n(n-1)(n-2)x^{n-3}\ \text{u. s. w.};$$

also nach der Formel I. (§. 8.):

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}y^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}y^3+\ldots\ ^*).$$

*) Soll diese Ableitung des binomischen Satzes folgerecht und

2. Setzt man $f(x) = a^x$, so ist $f(x+y) = a^{x+y}$, und daher wegen [§. 6., 2)]

$$\frac{d.f(x)}{dx} = \frac{d.a^x}{dx} = a^x la, \quad \frac{d^2.a^x}{dx^2} = a^x l^2 a, \quad \frac{d^3.a^x}{dx^3} = a^x l^3 a, \text{ etc.:}$$

$$a^{x+y} = a^x + a^x la.y + a^x l^2 a.\frac{y^2}{2} + a^x l^3 a.\frac{y^3}{2.3} + \ldots$$

Setzt man nun in dieser Entwicklung $x = 0$, so folgt, wegen $a^x = a^0 = 1$:

$$a^y = 1 + la.y + l^2 a.\frac{y^2}{2} + l^3 a\frac{y^3}{2.3} + \ldots \text{ (Vgl. §. 127. Bd. I.)}$$

3. Für $f(x) = lx$ wird $f(x+y) = l(x+y)$; daher wegen [§. 6, 3)]

$$\frac{d.f(x)}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2.f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^3.f(x)}{dx^3} = \frac{1.2}{x^3},$$

$$\frac{d^4.f(x)}{dx^4} = -\frac{1.2.3}{x^4}, \text{ u. s. w.:}$$

$$l(x+y) = lx + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^3}{3x^3} - \frac{y^4}{4x^4} + \ldots$$

Setzt man nun $y = 1$ und $\frac{1}{x} = z$, so erhält man, da $l(x+1) - lx = l\left(1 + \frac{1}{x}\right) = l(1+z)$ ist:

$$l(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots \text{ [Vergl. §. 129., 3)].}$$

4. Es sey endlich noch $f(x) = sin.x$, also $f(x+y) = sin.(x+y)$; so ist, wegen [§. 6., 4)]

$$\frac{d.f(x)}{dx} = \frac{d.sin.x}{dx} = cos.x, \quad \frac{d^2.sin.x}{dx^2} = -sin.x,$$

$$\frac{d^3.sin.x}{dx^3} = -cos.x, \quad \frac{d^4.sin.x}{dx^4} = sin.x, \text{ u. s. f.:}$$

$$sin.(x+y) = sin.x + cos.x.y - sin.x\frac{y^2}{2} - cos.x\frac{y^3}{2.3}$$
$$+ sin.x\frac{y^4}{2.3.4} + cos.x\frac{y^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

wirklich von Nutzen seyn, so mufs die Regel für $d.x^n$ nach §. 3., Zusatz 1, entwickelt und insbesondere für negative und gebrochene Werthe von n erwiesen werden.

Diese Ableitung zeigt zugleich, dafs für einen ganzen positiven Werth von n die Reihe mit dem $n+1^{sten}$ Gliede abbricht [weil der n^{te} Differentialcoefficient von x^n, s. §. 6., 1), constant wird], dagegen in allen übrigen Fällen ohne Ende fortläuft.

Setzt man jetzt $x = 0$, so erhält man, wegen $sin. x = 0$ und $cos. x = 1$:

$$sin. y = y - \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^5}{2.3.4.5} - \text{etc. [Vergl. §. 142., 3)].}$$

Diese Beispiele mögen hinreichen, die Anwendung der *Taylor*'schen Reihe in dieser Beziehung zu zeigen.

Von jenen Fällen nun (m. s. die Note zu §. 8.) in welchen die *Taylor*'sche Reihe nicht angewendet werden kann, soll im folgenden Paragraphe gehandelt werden.

Fälle, in welchen die *Taylor*'sche Formel nicht anwendbar ist.

§. 11.

Die Anwendbarkeit der *Taylor*'schen Formel gründet sich offenbar (m. vergl. die Note *) zu §. 8., S. 27) auf die Voraussetzung, dafs sich $f(x + h)$ in eine Reihe nach ganzen positiven Exponenten von h entwickeln lasse; und so lange x unbestimmt bleibt, ist diefs, wie wir im §. 178. (Anmerk. Bd. I.) gesehen haben, auch immer und ohne Ausnahme der Fall. Werden dagegen der Variablen x bestimmte Werthe beigelegt, so kann es allerdings geschehen, dafs die Entwicklung von $f(x + h)$ für einen solchen besondern Werth, z. B. für $x = a$, wenigstens von einem gewissen Gliede an, nach negativen oder gebrochenen Exponenten von h fortschreitet und eine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von h rein unmöglich ist.

Beispiele.

1. Um diefs durch ein paar einfache Beispiele nachzuweisen, sey zuerst $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, und es werde verlangt $f(x + h)$ für den bestimmten Werth von $x = a$ in eine Reihe nach h zu entwickeln.

Da nun hier $f(x + h) = \sqrt{(x + h)^2 - a^2}$ ist, so hat man für $x = a$:

$$f(a+h) = \sqrt{(a+h)^2 - a^2} = \sqrt{2ah + h^2} = h^{\frac{1}{2}}(2a+h)^{\frac{1}{2}}$$
$$= h^{\frac{1}{2}}\left[(2a)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}}h + \ldots\right]$$
$$= (2a)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

woraus offenbar hervorgeht, dafs für diesen Werth von $x = a$ (für welehen nämlich in $f(x)$ der Ausdruck unterm Wurzelzeichen Null wird), die Reihe von $f(x+h)$ nicht mehr nach ganzen Potenzen von h fortschreiten kann.

2. Sey ferner $f(x) = \dfrac{X}{(x-a)^n}$, wo X den Factor $x - a$ nicht weiter enthalten soll, und sey wieder für den Werth von $x = a$, $f(x+h)$ in eine Reihe zu entwickeln.

Es ist, wenn sich für diesen Werth von x, X in eine Reihe von der Form $A + Bh + Ch^2 + \ldots$ auflösen läfst:

$$f\binom{x+h}{a} = \frac{A + Bh + Ch^2 + \ldots}{\binom{x+h-a}{a}^n}, \text{ d. i.}$$

$$f(a+h) = \frac{A + Bh + Ch^2 + \ldots}{h^n} = Ah^{-n} + Bh^{-n+1} + Ch^{-n+2} + \ldots$$

eine Reihe, welche (für positive Werthe von n) wenigstens in den erstern Gliedern negative Potenzen von h enthält.

3. Es sey endlich $f(x) = l(x-a)$, und es soll abermals für den besondern Werth von $x = a$, $f(x+h)$ in eine Reihe nach Potenzen von h entwickelt werden.

Hier ist

$$f(x+h) = l(x+h-a) = l[(x-a)+h]$$
$$= l(x-a) + l\left(1 + \frac{h}{x-a}\right)$$
$$= l(x-a) + \frac{h}{x-a} - \frac{h^2}{2(x-a)^2} + \ldots,$$

also durch eine Reihe ausgedrückt, deren Glieder für $x = a$ Unendlich werden; zum Beweis, dafs es unmöglich ist, für diesen besondern Werth von x, $l(x - a + h) = lh$ in eine nach ganzen positiven Exponenten von h fortlaufende Reihe zu entwickeln.

Aus diesen Beispielen gehet nun deutlich hervor, dafs

wenn $f(x)$ eine Wurzelgröfse, einen Bruch oder eine logarithmische Gröfse enthält, $f(x+h)$ für jenen bestimmten Werth von x, für welchen beziehungsweise die Gröfse unter dem Wurzelzeichen, der Nenner des Bruches, oder endlich die Gröfse, auf welche sich das Logarithmenzeichen bezieht, Null wird, nicht in eine Reihe nach ganzen positiven Exponenten von h entwickelt werden kann; sondern, dafs die Entwicklung im ersten Falle gebrochene, im zweiten Falle negative Exponenten von h, und im letzten Falle die transcendente Gröfse lh enthalte, die sich [vergl. Bd. I. §. 129., 1)] ebenfalls nicht nach Potenzen von h [sondern von $(h-1)$] auflösen läfst.

Die *Taylor*'sche Formel nun (I., §. 8.) zeigt die Unmöglichkeit, $f(x+h)$ in diesen angeführten Fällen in eine nach ganzen positiven Exponenten von h fortlaufende Reihe zu entwickeln, dadurch an, dafs ihre Coefficienten, d. i. die auf einander folgenden Differentialcoefficienten von $f(x)$ (für den bestimmten Werth von x) entweder gleich von vorne herein, oder wenigstens von einem gewissen Gliede angefangen, Unendlich werden; wie wir an den folgenden Beispielen deutlich genug sehen können*). In einem solchen Falle mufs man daher auf die Bequemlichkeit, welche die Anwendung der *Taylor*'schen Formel sonst gewährt, wenigstens von jenem Gliede angefangen, von welchem an die Zunahme h mit negativen oder gebrochenen Exponenten erscheint, Verzicht leisten und $f(x+h)$ dadurch bestimmen, dafs man in der gegebenen Function $f(x)$ sogleich $x = a + h$ setzt und $f(a+h)$ auf gewöhnlichem Wege entwickelt.

Beispiele.

1. Es sey $f(x) = 2ax - x^2 + \sqrt{(x^2 - a^2)}$ mit der

*) Man hat die allgemeine Formel in diesen erwähnten Fällen mangelhaft genannt (*cas dans lesquels la règle générale est en défaut*); allein sie ist es offenbar nicht und wäre es gerade im entgegengesetzten Falle, wenn sie nämlich die Unmöglichkeit der Forderung in den bezeichneten Fällen nicht anzeigte.

Forderung gegeben, $f(x+h)$ für den bestimmten Werth von $x = a$ zu entwickeln.

Sucht man zum Behufe der Anwendung der *Taylor*'schen Formel die Differentialcoefficienten dieser Function, so erhält man

$$\frac{d.f(x)}{dx} = 2a - 2x + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}, \quad \frac{d^2.f(x)}{dx^2} = -2 - \frac{a^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

u. s. w.

Setzt man also jetzt $x = a$, so wird $f(x) = a^2$, $\frac{d.f(x)}{dx} = \infty$, $\frac{d^2.f(x)}{dx^2} = -\infty$ u. s. w.; folglich wäre nach der *Taylor*-schen Reihe:

$$f(a+h) = a^2 + \infty h - \infty h^2 + \ldots$$

zum offenbaren Beweis, dafs in diesem Falle die gesuchte Entwicklung nicht nach g a n z e n p o s i t i v e n Exponenten von h fortschreiten kann.

Und es ist in der That nach der gewöhnlichen Methode für dieses Beispiel:

$$f(a+h) = 2a(a+h) - (a+h)^2 + \sqrt{[(a+h)^2 - a^2]}$$
$$= a^2 - h^2 + \sqrt{(2ah + h^2)}$$

oder wegen

$$\sqrt{(2ah+h^2)} = h^{\frac{1}{2}}(2a+h)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

endlich:

$$f(a+h) = a^2 - h^2 + \sqrt{(2a)}.h^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{(2a)}} h^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

2. Es sey $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x-a)^2}$, und es soll $f(x+h)$ für $x = a$ entwickelt werden.

Hier ist

$$\frac{d.f(x)}{dx} = \frac{(x-a)^2(3x^2-3) - (x^3-3x)\,2(x-a)}{(x-a)^4}$$
$$= \frac{3(x-a)(x^2-1) - 2(x^3-3x)}{(x-a)^3}, \text{ u. s. w.}$$

also für $x = a$:

$$f(x) = \frac{a^3 - 3a}{0} = \infty, \quad \frac{d.f(x)}{dx} = \frac{-2(a^3-3a)}{0} = -\infty \text{ u. s. w},$$

woraus sofort wieder folgt, dafs die Entwicklung von $f(a+h)$ nicht nach ganzen positiven Potenzen von h fortschreiten kann.

Man hat in der That, auf gewöhnliche Art:

$$f(a+h) = \frac{(a+h)^3 - 3(a+h)}{(a+h-a)^2} = \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3a - 3h}{h^2}$$

$$= (a^3 - 3a)h^{-2} + (3a^2 - 3)h^{-1} + 3ah^0 + h;$$

die Entwicklung enthält also auch negative Exponenten von h.

3. Wollte man endlich für $f(x) = a + 2x + l(x-a)$ nach der *Taylor*'schen Formel, $f(x+h)$ wieder für den besondern Werth von $x = a$ entwickeln; so hätte man

$$\frac{d.f(x)}{dx} = 2 + \frac{1}{x-a}, \quad \frac{d^2.f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{(x-a)^2}, \text{ u. s. f.,}$$

also für $x = a$:

$$f(x) = 3a + l0 = -\infty, \quad \frac{d.f(x)}{dx} = 2 + \frac{1}{0} = \infty,$$

$$\frac{d^2.f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{0} = -\infty \text{ u. s. w.};$$

folglich nach der genannten Formel:

$$f(a+h) = -\infty + \infty h - \infty h^2 + \ldots$$

woraus abermals die Unmöglichkeit einer Entwicklung nach ganzen positiven Exponenten von h hervorgeht.

Man hat in der That nach der gewöhnlichen Methode für dieses Beispiel:

$$f(a+h) = a + 2(a+h) + l(a+h-a) = 3a + h + lh$$

und es ist bekannt, dafs lh keineswegs in eine Reihe nach Potenzen von h entwickelt werden kann.

Anmerk. Wird allgemein für $x = a$

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + \ldots + Sh^n + Th^{n+\frac{p}{q}} + Uh^{n+1} + \ldots$$

wo $\frac{p}{q} < 1$ ist; so findet man bei diesem Werthe von x für die n ersten Differentialcoefficienten von $f(x)$, d. i. für $B, C, \ldots S$ bestimmte endliche Werthe; dagegen werden diese vom $n+1^{\text{sten}}$ angefangen sämmtlich Unendlich, derge-

stalt, daſs man sich zur Entwicklung von $f(a+h)$ bis einschlüssig zu dem Gliede Sh^n der *Taylor*'schen Formel bedienen könnte, die weitern Glieder aber auf gewöhnliche Art bestimmen müſste *).

*) Es ist nämlich, wegen

$$\frac{d.f(x+h)}{dx} = \frac{d.f(x+h)}{dh}, \quad \frac{d^2.f(x+h)}{dx^2} = \frac{d^2.f(x+h)}{dh^2}$$

u. s. w. (s. §. 8.) wenn man in $f(x+h) = A + Bh + \ldots$

$\ldots + Sh^n + Th^{n+\frac{p}{q}} + \ldots$ h als veränderlich ansieht:

$$\frac{d.f(x+h)}{dx} = \frac{d.f(x+h)}{dh} = B + 2Ch + \ldots + nSh^{n-1}$$
$$+ \left(n + \frac{p}{q}\right) Th^{n-1+\frac{p}{q}} + \ldots$$

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dx^2} = \frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} = 2C + 2.3Dh + \ldots$$
$$\ldots + n(n-1)Sh^{n-2} + rTh^{n-2+\frac{p}{q}} + \ldots$$

. .

$$\frac{d^n.f(x+h)}{dx^n} = \frac{d^n.f(x+h)}{dh^n} = n(n-1)\ldots 2.1.Sh^0$$
$$+ kTh^{\frac{p}{q}} + \ldots$$

$$\frac{d^{n+1}.f(x+h)}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n+1}.f(x+h)}{dh^{n+1}} = k'T\frac{1}{h^{1-\frac{p}{q}}} + \ldots$$

Setzt man nun, um die Differentialcoefficienten $\frac{d.f(x)}{dx}$, $\frac{d^2.f(x)}{dx^2}$, . . . zu erhalten, in diesen Ausdrücken $h = 0$; so erhält man dafür aus den vorstehenden Gleichungen der Reihe nach, bis einschlüssig zu jenem der n^{ten} Ordnung, endliche bestimmte Werthe (nämlich B, $2C$, ... $n(n-1) \ldots 2.1\,S$); dagegen werden alle folgenden Unendlich, so daſs man auf diesem Wege die Coefficienten T, U, . . . nicht bestimmen kann. Auf dieselbe Art überzeugt man sich, daſs wenn in der Entwicklung von $f(x+h)$ negative Exponenten von h vorkommen, gleich der erste Differentialcoefficient Unendlich wird.

Die *Maclaurin*'sche Formel.

§. 12.

Zur Entwicklung der Functionen in Reihen dienet vorzüglich die nach ihrem Erfinder *Maclaurin**) (*Colin M.*, geb zu Kilmoddan in Schottland 1698; gest. zu York 1746) benannte Formel; sie beruht auf der in den Beispielen des §. 10. angewandten Verfahrungsart und kann aus der *Taylor*schen Formel, gleichsam als Folgesatz, leicht und zwar auf folgende Weise abgeleitet werden.

Setzt man in der *Taylor*'schen Reihe:

$$f(x+y) = f(x) + \frac{d\, f(x)}{d\, x} y + \frac{d^2. f(x)}{d\, x^2} \frac{y^2}{2} + \ldots$$

$x = 0$ und bezeichnet das, was aus $f(x)$ und den auf einander folgenden Differentialcoefficienten für diesen Werth von x wird, kurz durch $f(x_0)$, $\frac{d\, .f(x_0)}{d\, x}$ u. s. w.; so erhält man

$$f(y) = f(x_0) + \frac{d\, . f(x_0)}{d\, x} \frac{y}{1} + \frac{d^2. f(x_0)}{d\, x^2} \frac{y^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

oder, wenn man für die ganz willkürliche Gröfse y, x schreibt, endlich:

$$\text{II. } f(x) = f(x_0) + \frac{d\, .f(x_0)}{1\,.\,d\,x} x + \frac{d^2. f(x_0)}{1\,.\,2\,.\,dx^2} x^2 + \frac{d^3. f(x_0)}{1\,.\,2\,.\,3\,dx^3} x^3 + \ldots$$

Man erhält demnach zur Entwicklung von $f(x)$ in eine nach steigenden (ganzen, positiven) Potenzen von x fortlaufende Reihe, die Coefficienten zu x^0, x^1, x^2, . . . wenn man in $f(x)$ und den auf einander folgenden Differentialcoefficienten $x = 0$ setzt und die letztern noch beziehungsweise durch 1, 1.2, 1.2.3, u. s. w. dividirt**).

*) Wie *Lacroix* (*Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral.* 4. *Édit. Paris* 1828 in 8. S. 29) in einer Note anführt, so hat Herr *Placock* bemerkt, dafs dieser Satz, welcher fälschlich dem englischen Geometer *Maclaurin* zugeschrieben wird, schon von *Stirling* (geb. gegen Ende des siebzehnten Jahrhunderts; er studirte zu Oxford und scheint bald nach der, im Jahre 1764 veranstalteten zweiten Auflage seiner *Methodus differentialis* gestorben zu seyn) im J. 1717 aufgestellt wurde. (*Lineae tertii ordinis. — Oxford* 1717.)

**) Eine von dem *Taylor*'schen Satze unabhängige Entwicklung dieser Formel II. ist folgende:

Beispiele.

1. Um nach dieser Formel II. $f(x) = a^x$ in eine Reihe nach x zu entwickeln, hat man, da [§. 6., 2)] die auf einander folgenden Differentialcoefficienten der Reihe nach sind: $a^x la$, $a^x l^2 a$, $a^x l^3 a$, . . . offenbar:

$$f(x_0) = a^0 = 1, \quad \frac{d.f(x_0)}{dx} = a^0 la = la, \quad \frac{d^2.f(x_0)}{2\,dx^2} = \frac{a^0 l^2 a}{2} = \frac{l^2 a}{2},$$

$$\frac{d^3.f(x_0)}{2.3\,dx^3} = \frac{a^0 l^3 a}{2.3} = \frac{l^3 a}{2.3} \text{ u. s. w.; folglich}$$

$$a^x = 1 + \frac{la}{1} x + \frac{l^2 a}{1.2} x^2 + \frac{l^3 a}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

2. Für $f(x) = lx$ ist $\frac{d.f(x)}{dx} = \frac{1}{x}$, etc., also

$$f(x_0) = lo = -\infty, \quad \frac{d.f(x_0)}{dx} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ u. s. w.;}$$

ein Zeichen, daſs sich lx in keine Reihe nach Potenzen von x entwickeln lasse.

Man setze, wenn sich die Function $f(x)$ wirklich in eine Reihe nach steigenden Potenzen von x entwickeln läſst (was der Verlauf der Rechnung immer zeigen wird)

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

so hat man:

$$\frac{d.f(x)}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

$$\frac{d^2.f(x)}{dx^2} = 2C + 2.3Dx + \ldots$$

$$\frac{d^3.f(x)}{dx^3} = 2.3D + \ldots$$

Setzt man nun in diesen Gleichungen (weil es, wie wir schon gehörigen Orts angeführt haben, gleichgiltig und erlaubt ist, die von x unabhängigen Coefficienten bei was immer für einen Werth von x zu bestimmen) $x = 0$, so erhält man daraus der Reihe nach:

$$A = f(x_0), \quad B = \frac{d.f(x_0)}{dx}, \quad C = \frac{d^2.f(x_0)}{2\,dx^2}, \quad D = \frac{d^3.f(x_0)}{2.3\,dx^3}$$

und nach diesem Gesetze weiter; wodurch die angenommene Reihe in die obige II übergeht.

Werden einige dieser Coefficienten Unendlich, so ist es ein Beweis, daſs sich die gegebene Function $f(x)$ in keine solche Reihe entwickeln läſst.

3. Es sey $f(x) = a^{sin.x}$, so ist, wenn man Kürze halber $sin.x = z$ setzt:

$$\frac{d.f(x)}{dx} = a^z l a \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = a^z l^2 a \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + a^z l a \frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$\frac{d^3.f(x)}{dx^3} = a^z l^3 a \left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 3 a^z l^2 a \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + a^z l a \frac{d^3 z}{dx^3}$$

u. s. w.;

folglich, da für $x = 0$ auch $z = 0$, $\frac{dz}{dx} = cos.x = 1$, $\frac{d^2 z}{dx^2} = - sin.x = 0$, $\frac{d^3 z}{dx^3} = - cos.x = - 1$ u. s. w. wird:

$$f(x_0) = a^0 = 1, \quad \frac{d.f(x_0)}{dx} = l a, \quad \frac{d^2.f(x_0)}{dx^2} = l^2 a,$$

$$\frac{d^3.f(x_0)}{dx^3} = l^3 a - l a, \quad \frac{d^4.f(x_0)}{dx^4} = l^4 a - 4 l^2 a, \text{ u. s. f.},$$

demnach endlich

$$a^{sin.x} = 1 + \frac{la}{1} x + \frac{l^2 a}{1.2} x^2 + \frac{(l^3 a - la)}{1.2.3} x^3 + \frac{(l^4 a - 4 l^2 a)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots$$

4. Es sey noch $f(x) = arc.sin.x$, folglich [wenn man die im §. 6., 6) entwickelten Differentialcoefficienten berücksichtiget] $f(x_0) = arc.sin.0 = 0$, $\frac{d.f(x_0)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$,

$$\frac{d^2.f(x_0)}{2\,dx^2} = 0, \quad \frac{d^3.f(x_0)}{2.3\,dx^3} = \frac{1}{2.3}, \quad \frac{d^4\,f(x_0)}{2.3.4dx^4} = 0, \quad \frac{d^5.f(x_0)}{2.3.4.5dx^5} = \frac{9}{2.3.4.5}$$

u. s. w.; demnach

$$arc.sin.x = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3\,x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5\,x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

[Vergl. Bd. I. §. 144., 7)].

§. 13.

Hat man es bei den auf einander folgenden Differentiationen von $f(x)$, wie im letzten Beispiele des vorigen Paragraphes, mit gebrochenen oder irrationalen Functionen zu thun; so werden die erstern, je weiter man geht, desto beschwerlicher und complicirter; man kann daher zur Auflösung von $f(x)$, in einem solchen Falle bequemer, folgendes, durch die nachstehenden Beispiele erläutertes Verfahren einschlagen.

Beispiele.

1. Um eine Reihe für $arc.\,sin.\,x$, welche nach Potenzen von x fortschreitet, zu entwickeln, setze man:

$$arc.\,sin.\,x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots$$
$$\ldots + Ux^{2n} + Vx^{2n+1} + \ldots$$

wird beiderseits differentiirt und sogleich durch dx abgekürzt, so entsteht:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \ldots$$
$$\ldots + 2nUx^{2n-1} + (2n+1)Vx^{2n} + \ldots$$

oder auch wegen

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}x^{2n} + \ldots$$

und wenn man sich diese beiden Reihen gleich gesetzt denkt, nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$B = 1$; $2C = 0$, also $C = 0$; $3D = \frac{1}{2}$, also $D = \frac{1}{2.3}$;

$4E = 0$, also $E = 0$; $5F = \frac{1.3}{2.4}$, also $F = \frac{1.3}{2.4.5}$; etc.

$$2nU = 0, \text{ also } U = 0;$$

$$(2n+1)V = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}, \text{ also } V = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n(2n+1)}$$

u. s. w.;

demnach ist, da noch aus der angenommenen Reihe für $x = 0$, $A = arc.\,sin.\,0 = 0$ folgt:

$$arc.\,sin.\,x = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6\ldots\ldots 2n(2n+1)} + \ldots$$

2. Setzt man eben so

$$arc.\,tang.\,x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots$$

und nimmt beiderseits das Differential, so erhält man, wenn wieder sogleich durch dx abgekürzt wird:

$$\frac{1}{1+x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \ldots$$

oder wegen

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

auch

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots =$$
$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + \ldots$$

und daraus folgt:

$B = 1$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{3}$; $E = 0$, $F = \frac{1}{5}$, $G = 0$, $H = -\frac{1}{7}$, u. s. w.,

so, dafs man hat, weil aus der angenommenen Reihe für $x = 0$, $A = arc.tang.0 = 0$ folgt:

$$arc.tang.x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$

[Vergl. Bd. I. §. 144., 8) u. Anmerk.]

3. Um endlich noch $(t_1 + t_2x + t_3x^2 + t_4x^3 + \ldots)^n$ in eine Reihe zu entwickeln, setze man:

$$(t_1 + t_2x + t_3x^2 + \ldots)^n = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2x + \mathfrak{T}_3x^2 + \mathfrak{T}_4x^3 + \ldots$$

und nehme, bevor man differentiirt, beiderseits die natürlichen Logarithmen; so entsteht:

$$nl(t_1 + t_2x + t_3x^2 + t_4x^3 + \ldots) =$$
$$l(\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2x + \mathfrak{T}_3x^2 + \mathfrak{T}_4x^3 + \ldots).$$

Nimmt man jetzt auf jeder Seite das Differential, so erhält man, wenn wieder sogleich dx beiderseits weggelassen wird:

$$\frac{n(t_2 + 2t_3x + 3t_4x^2 + \ldots)}{t_1 + t_2x + t_3x^2 + t_4x^3 + \ldots} = \frac{\mathfrak{T}_2 + 2\mathfrak{T}_3x + 3\mathfrak{T}_4x^2 + \ldots}{\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2x + \mathfrak{T}_3x^2 + \mathfrak{T}_4x^3 + \ldots}$$

und wenn man die Nenner wegschafft:

$$n\mathfrak{T}_1t_2 + \left.\begin{matrix} 2n\mathfrak{T}_1t_3 \\ n\mathfrak{T}_2t_2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 3n\mathfrak{T}_1t_4 \\ 2n\mathfrak{T}_2t_3 \\ n\mathfrak{T}_3t_2 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots = \mathfrak{T}_2t_1 + \left.\begin{matrix} 2\mathfrak{T}_3t_1 \\ \mathfrak{T}_2t_2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 3\mathfrak{T}_4t_1 \\ 2\mathfrak{T}_3t_2 \\ \mathfrak{T}_2t_3 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten, da $\mathfrak{T}_1$ aus der angenommenen Reihe bestimmt wird, indem man $x = 0$ setzt, wodurch sofort $\mathfrak{T}_1 = t_1^n$ folgt:

$$nt_1^nt_2 = \mathfrak{T}_2t_1, \text{ also } \mathfrak{T}_2 = nt_1^{n-1}t_2;$$
$$2nt_1^nt_3 + n\mathfrak{T}_2t_2 = 2\mathfrak{T}_3t_1 + \mathfrak{T}_2t_2,$$

also wenn man für $\mathfrak{T}_2$ den gefundenen Werth setzt,

$$\mathfrak{T}_3 = n t_1^{n-1} t_3 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} t_1^{n-2} t_2^2, \text{ u. s. w.,}$$

so, dafs man auf diese Weise ganz einfach für die n^{te} Potenz des Polynoms $t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \ldots$ die bekannte, im §. 11., I. (Bd. I.) entwickelte Reihe erhält.

Lagrange's Umkehrungsformel.

§. 14.

Es sey $y = z + x\varphi(y)$, wo $\varphi(y)$ eine beliebige Function von y bedeutet, und es werde verlangt, irgend eine andere Function von y, z. B. $f(y)$ durch x und z auszudrücken.

Man hat zur Auflösung dieser Aufgabe aus der obigen Gleichung unmittelbar

$$f(y) = f[z + x\varphi(y)],$$

oder nach dem *Taylor*'schen Satze (I., §. 8.), da hier $x\varphi(y)$ die Zunahme von z vorstellt:

$$f(y) = f(z) + \frac{d.f(z)}{dz} x\varphi(y) + \frac{d^2.f(z)}{2\,dz^2} x^2 [\varphi(y)]^2 + \ldots (1.$$

Um nun zuerst $\varphi(y)$ durch x und z auszudrücken, hat man eben so aus der ursprünglichen Gleichung:

$$\varphi(y) = \varphi[z + x\varphi(y)],$$

oder:

$$\varphi(y) = \varphi(z) + \frac{d.\varphi(z)}{dz} x\varphi(y) + \frac{d^2.\varphi(z)}{2\,dz^2} x^2 [\varphi(y)]^2 + \ldots (2.$$

Setzt man jetzt, was die Form dieser letzten Gleichung gestattet:

$$\varphi(y) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

wodurch

$$\left.\begin{array}{l} [\varphi(y)]^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2) x^2 + \ldots \\ [\varphi(y)]^3 = a_0^3 + 3a_0^2 a_1 x + \ldots \\ [\varphi(y)]^4 = a_0^4 + \ldots \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} (A$$

wird; so erhält man durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (2:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots =$$

$$\varphi(z) + a_0 \frac{d \cdot \varphi(z)}{dz} x + \left\{ \begin{matrix} a_1 \dfrac{d \cdot \varphi(z)}{dz} \\ a_0^2 \dfrac{d^2 . \varphi(z)}{2\, dz^2} \end{matrix} \right\} x^2 + \left\{ \begin{matrix} a_2 \dfrac{d \cdot \varphi(z)}{dz} \\ 2 a_0 a_1 \dfrac{d^2 . \varphi(z)}{2\, dz^2} \\ a_0^3 \dfrac{d^3 . \varphi(z)}{2 . 3\, dz^3} \end{matrix} \right\} x^3 + \ldots$$

und daraus nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$a_0 = \varphi(z); \quad a_1 = \varphi(z) \frac{d \cdot \varphi(z)}{dz};$$

$$a_2 = \varphi(z) \left[\frac{d \cdot \varphi(z)}{dz} \right]^2 + [\varphi(z)]^2 \frac{d^2 . \varphi(z)}{2\, dz^2},$$

oder auch, wie man leicht sieht:

$$a_2 = d . \left\{ \frac{\overline{\varphi(z)}^2 \dfrac{d \cdot \varphi(z)}{dz}}{1 . 2\, dz} \right\};$$

und eben so findet man:

$$a_3 = d^2 . \left\{ \frac{\overline{\varphi(z)}^3 \dfrac{d \cdot \varphi(z)}{dz}}{1 . 2 . 3\, dz^2} \right\}; \quad a_4 = d^3 . \left\{ \frac{\overline{\varphi(z)}^4 \dfrac{d \cdot \varphi(z)}{dz}}{1 . 2 . 3 . 4\, dz^3} \right\}; \text{ u. s. w.,}$$

so, daſs also $\varphi(y) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, da die Coefficienten a_0, a_1, ... lauter Functionen von z sind, in eine Reihe nach Potenzen von x entwickelt ist.

Substituirt man nun die obigen Reihen (A für $\varphi(y)$, $\overline{\varphi(y)}^2$, ... in der Gleichung (1, so entsteht:

$$f(y) = f(z) + a_0 \frac{d . f(z)}{dz} x + \left\{ \begin{matrix} a_1 \dfrac{d . f(z)}{dz} \\ a_0^2 \dfrac{d^2 . f(z)}{2\, dz^2} \end{matrix} \right\} x^2 + \left\{ \begin{matrix} a_2 \dfrac{d . f(z)}{dz} \\ 2 a_0 a_1 \dfrac{d^2 . f(z)}{2\, dz^2} \\ a_0^3 \dfrac{d^3 . f(z)}{2 . 3\, dz^3} \end{matrix} \right\} x^3 + \ldots$$

Setzt man endlich noch in dieser Reihe, deren zu x, x^2, x^3, ... gehörige Coefficienten wir der Kürze wegen beziehungsweise durch A, B, C, ... bezeichnen wollen, für a_0, a_1, a_2, ... die eben gefundenen Werthe; so erhält man ganz einfach:

$$A = \varphi(z)\frac{d.f(z)}{dz};$$

$$B = \varphi(z)\frac{d.\varphi(z)}{dz}\frac{d.f(z)}{dz} + \overline{\varphi(z)}^2\frac{d^2.f(z)}{2dz^2} = d.\left\{\frac{\overline{\varphi(z)}^2\frac{d.f(z)}{dz}}{1.2dz}\right\}$$

$$C = d.\left\{\frac{\overline{\varphi(z)}^2\frac{d.\varphi(z)}{dz}}{2dz}\right\}\frac{d.f(z)}{dz} + \overline{\varphi(z)}^2\frac{d.\varphi(z)}{dz}\frac{d^2.f(z)}{dz^2}$$

$$+ \overline{\varphi(z)}^3\frac{d^3.f(z)}{2.3dz^3} = d^2.\left\{\frac{\overline{\varphi(z)}^3\frac{d.f(z)}{dz}}{1.2.3dz^2}\right\};\ \text{u. s. w.,}$$

und man hat also endlich aus der gegebenen Gleichung $\alpha)\ \ldots\ y = z + x\varphi(y)$ für die gesuchte Function $f(y)$ die nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe:

$$\text{III.}\quad f(y) = f(z) + \left\{\varphi(z)\frac{d.f(z)}{dz}\right\}x$$

$$+ \left\{\frac{d.\left(\overline{\varphi(z)}^2\frac{d.f(z)}{dz}\right)}{1.2dz}\right\}x^2 + \left\{\frac{d^2.\left(\overline{\varphi(z)}^3\frac{d.f(z)}{dz}\right)}{1.2.3dz^2}\right\}x^3 + \ldots$$

deren Gesetz leicht zu übersehen ist.

Diefs ist nun die von *Lagrange* zuerst aufgestellte und seinen Namen führende allgemeine Umkehrungsformel [er setzte anfänglich blofs die Gleichung $y = z + \varphi(y)$ voraus], von welcher er selbst bemerkt, dafs sie in der ganzen Analysis, und besonders bei der Reversion oder Umkehrung der Reihen von sehr grofsem Nutzen sey *).

*) Dieser Satz wurde von *Laplace* (geb. in der Normandie 1749; gest. zu Paris 1827) noch erweitert. Denn anstatt wie hier $f(y)$ aus der Gleichung $y = z + x\varphi(y)$ zu bestimmen, kann man diese Function $f(y)$ allgemeiner noch aus der Gleichung $y = F[z + x\varphi(y)]$, wo F ein neues Functionszeichen ist, ausdrücken. Man kann defshalb nachsehen: *Lacroix Traité du calcul différentiel etc.* in 4. 2. *Édit.* 1. Bd. S. 279. *Lagrange*, Theorie der analytischen Functionen (deutsche Uebersetzung von Dr. *Crelle*. Berlin 1823) im fünfzehnten Abschnitt; oder Vorlesungen über die höhere Mathematik, von *Andreas v. Ettingshausen.* Wien 1827. 1. Bd. 47ste Vorlesung.

§. 15.

Beispiele.

1. Um die im vorigen Paragraphe entwickelte Formel auf einige Beispiele anzuwenden und diese dadurch mehr zu erläutern, sey zuerst $y = z + xy^n$, und es werde verlangt, daraus y durch x und z auszudrücken.

Vergleicht man diese Gleichung mit der obigen α), so folgt $\varphi(y) = y^n$; also ist auch $\varphi(z) = z^n$, und da hier y selbst gesucht wird, so ist $f(y) = y$, also auch $f(z) = z$ und daher

$$\frac{d.f(z)}{dz} = 1; \quad \frac{d.\left(\overline{\varphi(z)}^2 \frac{d.f(z)}{dz}\right)}{2\,dz} = \frac{d.z^{2n}}{2\,dz} = \frac{2n\,z^{2n-1}}{2};$$

$$\frac{d^2.\left(\overline{\varphi(z)}^3 \frac{d.f(z)}{dz}\right)}{2.3\,dz^2} = \frac{d^2.z^{3n}}{2.3\,dz^2} = \frac{3n(3n-1)\,z^{3n-2}}{2.3};$$

$$\frac{d^3.\left(\overline{\varphi(z)}^4 \frac{d.f(z)}{dz}\right)}{2.3.4\,dz^3} = \frac{d^3.z^{4n}}{2.3.4\,dz^3} = \frac{4n(4n-1)(4n-2)}{2.3.4}\,z^{4n-3};$$

u. s. w.;

folglich nach der Formel III.:

$$y = z + z^n x + \frac{2n}{2} z^{2n-1} x^2 + \frac{3n(3n-1)}{2\,.\,3} z^{3n-2} x^3$$
$$+ \frac{4n(4n-1)(4n-2)}{2\,.\,3\,.\,4} z^{4n-3} x^4 + \ldots$$

2. Aus der Gleichung $u = v + e\,sin.u$ soll a) u selbst, und b) $cos.u$ durch v und e bestimmt werden.

a) Die Vergleichung dieser Gleichung mit jener α) gibt $y = u$, $z = v$, $x = e$, $\varphi(y) = sin.u$; also ist auch $\varphi(z) = sin.v$, und da u selbst gesucht wird, so ist $f(y) = f(u) = u$, also auch $f(z) = z = v$. Mit diesen Werthen erhält man aber

$$\frac{d.f(z)}{dz} = \frac{dv}{dv} = 1;$$

$$\frac{d.\left(\overline{\varphi(z)}^2 \frac{d.f(z)}{dz}\right)}{2\,dz} = \frac{d.sin.^2 v}{2\,dv} = \frac{2\,sin.v\,cos.v}{2} = \frac{sin.2v}{2};$$

$$\frac{d^2.\left(\overline{\varphi(z)}^3\,\frac{d.f(z)}{dz}\right)}{2.3\,dz^2} = \frac{d^2.\,sin.^3 v}{2.3\,dv^2} = \frac{8\,sin.\,v - 12\,sin.^3 v}{2.4}$$

$$= \frac{3\,sin.\,3\,v - sin.\,v}{2.4};$$

$$\frac{d^3.\left(\overline{\varphi(z)}^4\,\frac{d.f(z)}{dz}\right)}{2.3.4\,dz^3} = \frac{d^3.\,sin.^4 v}{2.3.4\,dv^3} = \frac{6\,sin.v\,cos.v - 16\,sin.^3 v\,cos.v}{2.3}$$

$$= \frac{2\,sin.\,4\,v - sin\,2\,v}{2.3};\ \text{u. s. w.};$$

folglich ist nach III.:

$$u = v + sin.\,v.\,e + \frac{sin.\,2\,v}{2}.\,e^2 + \frac{3\,sin.\,3\,v - sin.\,v}{2.4}.\,e^3$$
$$+ \frac{2\,sin.\,4\,v - sin.\,2\,v}{2.3}.\,e^4 + \ldots$$

b) Für diesen Fall ist das Uebrige wie vorhin, aber $f(y) = f(u) = cos.\,u$, also auch $f(z) = f(v) = cos.\,v$, und daher

$$\frac{d.f(z)}{dz} = \frac{d.cos.\,v}{dv} = -\,sin.\,v;$$

$$\frac{d.\left(\overline{\varphi(z)}^2\,\frac{d.f(z)}{dz}\right)}{2\,dz} = \frac{-d.\,sin.^3 v}{2\,dv} = \frac{-3\,sin.^2 v\,cos.\,v}{2}$$

$$= \frac{3\,(cos.3\,v - cos\,v)}{2.4};$$

$$\frac{d^2.\left(\overline{\varphi(z)}^3\,\frac{d.f(z)}{dz}\right)}{2.3\,dz^2} = \frac{-d^2.\,sin.^4 v}{2.3\,dv^2} = \frac{-6\,sin.^2 v\,cos.^2 v + 2\,sin.^4 v}{3}$$

$$= \frac{-\,cos.\,2\,v + cos.\,4\,v}{3};\ \text{u. s. w.}$$

demnach, da auch noch $sin.^2 v = \frac{1 - cos.\,2\,v}{2}$ ist, nach der Formel III.:

$$cos.\,u = cos.\,v + \tfrac{1}{2}(cos.\,2\,v - 1)\,e + \frac{3}{2.4}(cos.\,3\,v - cos.\,v)\,e^2$$
$$+ \tfrac{1}{3}(cos.\,4\,v - cos.\,2\,v)\,e^3 + \ldots$$

Anmerk. Will man die *Lagrange*'sche Formel, wie es zuerst *J. F. Pfaff* gethan hat (m. s. *Pfaff's disquisitiones analyticae Helmst.* 1793, 3. Abhandlung; oder Archiv für reine und an-

gewandte Mathematik, von *Carl Friedr. Hindenburg.* Leipz. 1795. 1. Bd. VI. — VIII. Abhandlung) zur Reversion der Reihen benützen; so kann man auf folgende Art verfahren:

Um z. B. die Reihe $x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots$, die wir durch $x = F(y)$ bezeichnen wollen, umzukehren (Bd. I. §. 120.) hat man aus dieser Gleichung auch

$$1 = x \cdot \frac{1}{F(y)} \quad \text{und} \quad y = x\left[\frac{y}{F(y)}\right]$$

so, dafs man nur [was aus der Vergleichung dieser letztern Gleichung mit der obigen α) hervorgeht] in der gedachten Formel III. $z = 0$, $\varphi(y) = \frac{y}{F(y)}$ und $f(y) = \varphi(y) = \frac{y}{x}$, oder, wenn man allgemeiner noch statt y, y^m bestimmen und durch Potenzen von x ausdrücken will,

$$f(y) = [\varphi(y)]^m = \frac{y^m}{x^m}$$

setzen, und wieder alles gehörig entwickeln darf, um die Auflösung dieses Problems zu erhalten *).

*) Wie man sieht, wird durch die im ersten Beispiele für y gefundene Reihe, bei gegebenen Werthen von x und z, eine Wurzel der Gleichung $y = z + x y^n$ dargestellt. Und es ist auch in der That *Lagrange* (durch *Lambert*, geb. zu Mühlhausen im Elsafs 1728; gest. zu Berlin 1777, veranlafst) bei einer Untersuchung, Reihen für die Wurzeln algebraischer Gleichungen zu finden, auf seine allgemeine Umkehrungsformel gekommen. Man s. dessen Abhandlung: *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1768. (Auch kann man nachsehen dessen Abhandlung über das *Kepler*'sche Problem in denselben Mem., Jahrg. 1769.) Ferner *Lagrange's* Auflösung numerischer Gleichungen, den eilften Zusatz.

Drittes Capitel.

Von der Differentiation der Functionen mehrerer Variablen. Die partiellen Differentiale. Das *Taylor*'sche Theorem auf zwei veränderliche Gröſsen ausgedehnt. *Euler's* Lehrsatz über die homogenen Functionen.

§. 16.

Ist $u = f(x, y)$ irgend eine Function der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Gröſsen x, y; so wird, analog mit der im §. 1. gegebenen Erklärung, das Differential von u ausgedrückt durch

$$du = f(x + dx, y + dy) - f(x, y),$$

und da sich [Bd. I, Anmerk. auf S. 442, 2)] $f(x + dx, y + dy)$ immer in eine Reihe von der Form

$$f(x, y) + [Pdx + Qdy] + [Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2] + \ldots$$

entwickeln läſst, wobei P, Q, R, S, T, ... endliche Gröſsen (nämlich gewisse Functionen von x und y) sind, nach Hinweglassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung, auch

$$du = Pdx + Qdy \ldots (1\ ^*).$$

Dieses Differential wird das **vollständige** oder **totale Differential** von u genannt, um es von dem **partiellen Differential** dieser Function $u = f(x, y)$ zu unterscheiden, welches entsteht, wenn man bei der Differentiation von u nur **eine** der beiden Variablen x, y als veränderlich, die andere dagegen als beständig ansieht.

Nimmt man demnach in der vorigen Gleichung (1 y als constant an, so wird $dy = 0$, und man erhält für das partielle Differential von u nach x:

*) Man vergl. auch die Note zu §. 19., S. 56.

$$d_x u = P\,dx, \quad \text{und daraus} \quad P = \frac{d_x u}{dx}.$$

Eben so folgt, wenn man x als constant ansieht:

$$d_y u = Q\,dy, \quad \text{und daraus} \quad Q = \frac{d_y u}{dy}:$$

P und Q sind daher beziehungsweise die partiellen Differentialcoefficienten von u nach x und y genommen.

So einfach übrigens und übereinstimmend mit der bei den endlichen Differenzen (§. 177) eingeführten, diese Bezeichnung für die eben genannten Coefficienten auch ist; so hat man dafür doch allgemein eine andere angenommen. Man schreibt nämlich blofs (nach *Fontaine*, geb. zu Claveison in der Dauphiné; gest. 1771) $P = \frac{du}{dx}$, $Q = \frac{du}{dy}$; oder es werden (nach *Euler*), um bestimmt anzudeuten, dafs unter du nicht das vollständige, sondern blofs das partielle Differential von u im ersten Ausdruck nach x, im zweiten nach y zu verstehen sey, diese Quotienten eingeklammert und man setzt

$$P = \left(\frac{du}{dx}\right), \quad Q = \left(\frac{du}{dy}\right),$$

so, dafs man also unter $\left(\frac{du}{dx}\right)$ den Quotienten verstehen mufs, welcher entsteht, wenn man das Differential von $u = f(x, y)$, dieses so genommen, als ob blofs x variabel, y dagegen constant wäre, durch dx dividirt. Um der gröfsern Deutlichkeit und Bestimmtheit willen, werden wir durchgehends diese letztere Bezeichnung beibehalten.

Werden diese Werthe von P und Q in den obigen Ausdruck (1 substituirt, so erhält man auch für das vollständige Differential von u:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy \;\ldots\; (2\ *).$$

*) Vergl. auch die Note zu §. 19., S. 56.

Man erhält eben so, wenn $u = f(x, y, z)$ ist:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz \ldots (3;$$

welches Gesetz sich überhaupt auf Functionen von jeder beliebigen Anzahl variabler Gröfsen ausdehnen läfst: das Total-Differential einer Function von mehreren veränderlichen Gröfsen besteht nämlich aus der Summe der partiellen Differentiale dieser Function *).

§. 17.

Beispiele.

Da die Differentiation der Functionen mehrerer Variablen sofort auf jene der Functionen von einer veränderlichen Gröfse zurückgeführt wird; so ist es hinreichend, hier nur einige Beispiele in Betreff der erstern aufzustellen.

1. Für $u = xy$ ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = y \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = x;$$

folglich $du = y\,dx + x\,dy$.

2. Ist $u = \frac{x}{y}$, so ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{x}{y^2};$$

mithin $du = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$.

*) Dieser Satz folgt auch wieder unmittelbar aus der Lehre der endlichen Differenzen, wenn man in den Gleichungen *m*) und *n*), §. 181., Δx, Δy, ... als unendlich klein ansieht, und dafür dx, dy, ... setzt. Der Differentialquotient $\frac{du}{dx}$ [nach *Fontain's* Bezeichnung $\frac{1}{dx}\,du$, wo du das Totaldifferential von u bedeutet] $= \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx}$ kann offenbar nur dann einen bestimmten Sinn haben, wenn die Variablen y, z selbst wieder, wenigstens implicit, gewisse Functionen von x sind.

3. Für $u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ folgt

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{x(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{-y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

demnach $du = \frac{x(x^2 + 3y^2)\,dx - y(3x^2 + y^2)\,dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

4. Ist $u = a^x\, ly - (\sin x)^{\cos. y}$, so erhält man eben so:

$$du = \left[a^x\, ly\, la - \cos. y\,(\sin. x)^{\cos. y - 1} \cos. x\right] dx$$
$$+ \left[\frac{a^x}{y} + (\sin. x)^{\cos. y}\, l \sin. x \;\sin. y\right] dy.$$

5. Es sey endlich noch $u = x^2 y^3 z$; so ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2xy^3 z, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 3x^2 y^2 z \text{ und } \left(\frac{du}{dz}\right) = x^2 y^3;$$

folglich [nach Gl. (3 des vorhergehenden Paragraphes]:

$$du = 2xy^3 z\, dx + 3x^2 y^2 z\, dy + x^2 y^3\, dz.$$

Aus diesen Beispielen folgt offenbar, daſs die im ersten Capitel (§. 2.) für die Differentiation der Functionen von einer Variablen abgeleiteten Regeln überhaupt auf Functionen von jeder beliebigen Anzahl veränderlicher Gröſsen ausgedehnt werden können. So erhält man z. B. auch, ohne auf partielle Differentiale überzugehen, $d.xy$ nach der für $d.XX'$ aufgestellten Regel; ähnliches gilt für die übrigen Beispiele. Die Differentiation mittelst partieller Differentiale gewährt indeſs, nebst einer gröſsern Bequemlichkeit, noch den Vortheil, daſs man das vollständige Differential sogleich nach den Differentialen der verschiedenen Variablen, d. i. nach dx, dy, . . . geordnet erhält, was in vielen Fällen nothwendig ist.

§. 18.

Was die höhern Differentiale der Functionen mehrerer veränderlichen Gröſsen betrifft, so gilt von ihnen genau das, was (§ 5.) von jenen der Functionen einer Variablen gesagt worden. Da nämlich für $u = f(x, y)$: $du = P\,dx + Q\,dy$ ist, wobei im Allgemeinen genommen P und Q wieder neue Functionen von x und y sind (man

vergleiche auch die Beispiele des vorigen Paragraphes); so kann man $P\,dx + Q\,dy$ oder du neuerdings, und zwar so differentiiren, daſs man dabei von den Gröſsen dx und dy entweder beide, oder nur eine, oder endlich (was wir in der Folge immer voraussetzen werden) gar keine als veränderlich ansieht. Unter dieser letztern Voraussetzung hat man aber

$$d.du = d^2u = dP\,dx + dQ\,dy;$$

und wenn man analog mit der Gleichung (1, §. 16.,

$$dP = p\,dx + p'\,dy \quad \text{und} \quad dQ = q\,dx + q'\,dy$$

setzt, auch

$$d^2u = p\,dx^2 + (p' + q)\,dx\,dy + q'\,dy^2.$$

Einfacher noch kann man d^2u auf folgende Art erhalten:

Es ist [(2, §. 16.] $du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy$, folglich, wenn man abermals partiell differentiirt [indem $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$ wieder neue Functionen von x und y sind]:

$$d^2u = \left(\frac{d\left[\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy\right]}{dx}\right)$$
$$+ \left(\frac{d\left[\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy\right]}{dy}\right)$$
$$= dx\left(\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}\right) + dy\left(\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}\right)$$
$$+ dx\left(\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\right) + dy\left(\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dy}\right).$$

Es ist aber $\left(\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}\right)$ das Resultat, welches entsteht, wenn man u zwei Mal, und zwar beide Mal nach x differentiirt; und dieses wird kürzer durch $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$ bezeichnet. Eben

so ist $\left(\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}\right)$ das durch ein zweimaliges Differentiiren von u, wobei das erste Mal y, das zweite Mal x als veränderlich betrachtet wird, entstehende Ergebnifs, welches wieder einfacher durch $\left(\frac{d^2 u}{dy\, dx}\right)$ ausgedrückt wird; und so ist allgemein

$$\left(\frac{d^n\left(\frac{d^m u}{d x^m}\right)}{d y^n}\right) = \left(\frac{d^{m+n} u}{d x^m\, d y^n}\right)$$

das Ergebnifs von u, wenn man diese Function zuerst m Mal in Bezug auf x, und hierauf n Mal in Bezug auf y differentiirt.

Diese einfachere Bezeichnung in die obige Gleichung eingeführt, gibt:

$$d^2 u = \left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) d x^2 + \left(\frac{d^2 u}{d y\, d x}\right) d y\, d x$$
$$+ \left(\frac{d^2 u}{d x\, d y}\right) d x\, d y + \left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right) d y^2 \;.\;.\;. \;(\alpha\ ^*).$$

Auf die nämliche Art könnte man $d^3 u$, $d^4 u$, . . . $d^n u$ ausdrücken, und überhaupt auch die Gesetze für die höhern Differentiale der Functionen von mehr als zwei Variablen, wenn es nöthig wäre, ableiten.

Anmerk. Es ist leicht zu sehen, dafs im Falle dx und dy nicht als constant angesehen werden, der vorige Ausdruck (α noch die Glieder $P d^2 x + Q d^2 y$, d. i.

$$\left(\frac{d u}{d x}\right) d^2 x + \left(\frac{d u}{d y}\right) d^2 y$$

enthalten müsse.

*) Wir kommen im §. 20. (Anmerk.) wieder auf diesen Ausdruck, seiner Reduction wegen, zurück; auch werden wir dort noch die Entwickelung von $d^2 u$ für $u = f(x, y, z, w, \ldots)$ angeben.

Das *Taylor*'sche Theorem, ausgedehnt auf Functionen von *zwei* Variablen.

§. 19.

Es sey $u = f(x, y)$ eine Function der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Gröſsen x, y, und es gehe u in u' über, wenn man in u, y ungeändert, x aber um die willkürliche Gröſse h zunehmen läſst; ferner gehe u' in u'' über, wenn man in u', x als constant ansieht und dagegen y um die beliebige Gröſse k vermehrt, so, daſs also $u' = f(x + h, y)$ und $u'' = f(x + h, y + k)$ wird; welchen letztern Ausdruck wir sofort bestimmen wollen.

Es ist nach der *Taylor*'schen Formel (I., §. 8.), wenn man in u bloſs x als veränderlich ansieht:

$$1)\quad u' = u + \left(\frac{du}{dx}\right) h + \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2} + \left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)\frac{h^3}{2.3} + \ldots;$$

und eben so, wenn man in u' bloſs y als die variable Gröſse betrachtet:

$$u'' = u' + \left(\frac{du}{dy}\right) k + \left(\frac{d^2 u'}{dy^2}\right)\frac{k^2}{2} + \left(\frac{d^3 u'}{dy^3}\right)\frac{k^3}{2.3} + \ldots$$

Nun folgt aber aus der Gleichung 1), mit Berücksichtigung des im vorigen Paragraphe Gesagten:

$$\left(\frac{du'}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right) h + \left(\frac{d^3 u}{dx^2\,dy}\right)\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

$$\left(\frac{d^2 u'}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^3 u}{dx\,dy^2}\right) h + \ldots,$$

$$\left(\frac{d^3 u'}{dy^3}\right) = \left(\frac{d^3 u}{dy^3}\right) + \ldots,$$

u. s. w.;

substituirt man daher sowohl diese, so wie auch den Werth von u' aus 1) in die vorige Gleichung von u''; so erhält man, wenn Alles nach den verschiedenen Ordnungen der Differentiale von u geordnet wird, u'' oder

$$A)\quad f(x+h,\,y+k) =$$
$$u + \left[\left(\frac{du}{dx}\right)h + \left(\frac{du}{dy}\right)k\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)h^2 + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)2hk + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)k^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left[\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)h^3 + \left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right)3h^2k\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)3hk^2 + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)k^3\right] + \ldots,$$

wobei das Gesetz des Fortganges von selbst klar und so einfach ist, daſs man, mit Hineinlegung des gehörigen Sinnes, das allgemeine Glied dieser Reihe kurz durch die symbolische Bezeichnung $\frac{1}{2.3\ldots n}(h+k)^n$ ausdrücken kann; es dürfen nämlich nur die einzelnen Glieder dieser Entwickelung, der Reihe nach, mit den partiellen Differentialen $\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)$, $\left(\frac{d^n u}{dx^{n-1}\,dy}\right)$, ... $\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)$ verbunden oder multiplicirt werden *). Auch ist es nun leicht, die *Taylor*'sche Formel auf Functionen von mehr als zwei veränderliche Gröſsen zu erweitern und auf demselben Wege zu entwickeln.

*) Hier haben wir also eine andere und noch strengere Ableitung der der Gleichung 1), §. 16. zu Grunde liegenden Entwickelung:

$$f(x+h,\,y+k) = f(x,\,y) + [Ph + Qk]$$
$$+ [Rh^2 + Shk + Tk^2] + \ldots$$

Da man das gegenwärtige Capitel offenbar sogleich mit der Ableitung dieser Reihe *A*) beginnen kann, so läſst sich, wenn man lieber will, die Ordnung im Vortrage dergestalt verändern, daſs die im §. 16. entwickelte Gleichung (2, welche die Regel für das Differentiiren von $f(x,y)$ enthält, als Folgesatz aus der obigen Reihe *A*) hervorgeht; denn setzt man in *A*) $h = dx$ und $k = dy$, so erhält man, nach Hinweglassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung:

$$f(x+dx,\,y+dy) = f(x,y) + \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy,$$

und daraus, wegen (§. 16.) $f(x+dx,\,y+dy) - f(x,y) = du$;

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy.$$

Anmerk. So wie wir im §. 10. die *Taylor*'sche Formel zur Entwickelung von Functionen einer Variablen in Reihen benützt haben; eben so können wir auch die hier abgeleitete Formel *A*) zur Auflösung der Functionen von zwei variablen Gröfsen in Reihen anwenden. Setzt man nämlich in dieser Formel $x=0$ und $y=0$, so erhält man $f(h,k)$, oder wenn man wieder statt h, x und statt k, y schreibt:

$$B)\quad f(x,y)=$$

$$u+\frac{1}{1}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)x+\left(\frac{du}{dy}\right)y\right]$$
$$+\frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)x^2+\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)2xy+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)y^2\right]$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\left[\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)x^3+\left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right)3x^2y\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)3xy^2+\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)y^3\right]+\ldots,$$

wobei man jedoch in u sowohl, als auch in den sämmtlichen Differentialcoefficienten, nach verrichteter Differentiation, $x=0$ und $y=0$ setzen mufs *). Ein Beispiel wird das Verfahren noch mehr erläutern.

*) Diese Reihe kann auch nach derselben Methode entwickelt werden, nach welcher wir in der Note zu §. 12. die Function $f(x)$ in eine Reihe aufgelöst haben. Setzt man nämlich

$$u=A+Bx+B'y+Cx^2+C'xy+C''y^2+Dx^3+\ldots,$$

so erhält man daraus:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=B+2Cx+C'y+3Dx^2+\ldots,$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right)=B'+C'x+2C''y+\ldots,$$
$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=2C+2.3Dx+\ldots,$$
$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=2C''+\ldots,\quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)=C'+\ldots,$$

u. s. w.

Setzt man nun zur Bestimmung von A, B, B', ... in diesen sämmtlichen Ausdrücken x und $y=0$; so erhält man

$$A=f(x_0,y_0),\quad B=\left(\frac{du}{dx}\right),\quad B'=\left(\frac{du}{dy}\right),$$
$$C=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right),\quad C'=\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right),\quad C''=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

u. s. w.,

B e i s p i e l.

Es sey die Function $u = a^x\, l(1+y)$ in eine Reihe nach x und y zu entwickeln.

Für diese Function erhält man:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = a^x\, la\, l(1+y),\quad \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{a^x}{1+y},$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = a^x\, l^2 a\, l(1+y),\quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = \frac{a^x\, la}{1+y},$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \frac{-a^x}{(1+y)^2},\quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = a^x\, l^3 a\, l(1+y),$$

$$\left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right) = \frac{a^x\, l^2 a}{1+y},\quad \left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right) = \frac{-a^x\, la}{(1+y)^2},$$

$$\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) = \frac{2a^x}{(1+y)^3},\ \text{u. s. w.}$$

Da nun diese Differentialcoefficienten für $x=0$ und $y=0$ der Reihe nach $=0,\ 1,\ 0,\ la,\ -1,\ 0,\ l^2 a,\ -la,\ 2$, u. s. w. werden, und zugleich u in $a^0\, l\, 1 = 0$ übergeht; so hat man nach der obigen Reihe B):

$$a^x\, l(1+y) = y + la\, xy - \tfrac{1}{2}y^2$$
$$+ \frac{l^2 a}{2} x^2 y - \frac{la}{2} xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3 + \ldots$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Entwickelung leicht, wenn man für a^x und $l(1+y)$ die bekannten Reihen setzt, und diese zusammen multiplicirt.

§. 20.

Wir haben im vorigen Paragraphe zur Entwickelung von $u'' = f(x+h, y+k)$ zuerst x um h, und dann in dem entstandenen Resultat u', y um k zunehmen lassen. Da man aber offenbar auch die Ordnung umkehren, und zuerst y um k, und dann erst x um h vermehren kann; so erhält man auch:

$$u'' = u + \left[\left(\frac{du}{dy}\right)k + \left(\frac{du}{dx}\right)h\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)k^2 + \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)2hk + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)h^2\right] + \ldots$$

wobei also diese Differentialcoefficienten so zu nehmen sind, daſs nach vollendeter Differentiation sowohl x als auch y Null gesetzt wird.

Diese Werthe in die für u angenommene Reihe substituirt, geben offenbar die obige Reihe B).

Da nun diese Entwickelung mit jener *A*), §. 19. identisch ist, und die Differentialcoefficienten von den Zunahmen *h* und *k* ganz unabhängig sind; so erhält man durch Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten:

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2 u}{dy\,dx}\right), \quad \left(\frac{d^3 u}{dx^2\,dy}\right) = \left(\frac{d^3 u}{dy\,dx^2}\right),$$

u. s. w.,

und allgemein

$$\beta) \quad \left(\frac{d^{m+n} u}{dx^m\,dy^n}\right) = \left(\frac{d^{m+n} u}{dy^n\,dx^m}\right):$$

d. h. differentiirt man die Function $u = f(x, y)$ zuerst m Mal nach x, und dann n Mal nah y; so erhält man *dasselbe* Resultat, als wenn man u zuerst n Mal nach y, und hierauf m Mal nach x differentiirt, so, daſs es also gleichgiltig ist, in welcher Ordnung diese beiden Operationen vorgenommen werden *).

Beispiel.

Um auch diesen Satz durch ein Beispiel zu erläutern, sey $u = \frac{lx}{\sin.^2 y}$; so ist

*) Dieser Satz kann auch auf folgende Art abgeleitet werden: Setzt man [Bd. I., §. 179., Anmerk. 2., Gl. (m, S. 442]

$$u = Ax^a y^\alpha + Bx^b y^\beta + \ldots + Nx^p y^\pi + \ldots,$$

so folgt, wenn man u zuerst m Mal in Bezug auf x, dann n Mal nach y differentiirt, dabei aber der gröſsern Einfachheit wegen, und da für die übrigen Glieder dasselbe gilt, von dieser Reihe nur ein Glied, nämlich das allgemeine nimmt:

$$\left(\frac{d^{m+n} u}{dx^m\,dy^n}\right) =$$

$$p(p-1)\ldots(p+1-m)\,\pi(\pi-1)\ldots(\pi+1-n)\,Nx^{p-m}y^{\pi-n}.$$

Differentiirt man dagegen umgekehrt u zuerst n Mal nach y, und dann erst m Mal nach x; so entsteht unter derselben Voraussetzung:

$$\left(\frac{d^{m+n} u}{dy^n\,dx^m}\right) =$$

$$\pi(\pi-1)\ldots(\pi+1-n)\,p(p-1)\ldots(p+1-m)\,Ny^{\pi-n}x^{p-m};$$

welches offenbar dem vorigen Differential gleich ist.

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{x\, sin.^2 y},\quad \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = -\frac{1}{x^2\, sin.^2 y},$$

$$\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right) = \frac{2}{x^3\, sin.^2 y};$$

und wenn man dieses letztere Differential nun zwei Mal nach y differentiirt:

$$\left(\frac{d\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)}{dy}\right) = -\frac{4\, cos.\, y}{x^3\, sin.^3 y},$$

$$\left(\frac{d^2\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^5 u}{dx^3\, dy^2}\right) = \frac{4\,(sin^2 y + 3\, cos^2 y)}{x^3\, sin.^4 y}.$$

Kehrt man jetzt die Ordnung dieser Differentiationen geradezu um, so erhält man:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{2\, l\, x\,.\, cos.\, y}{sin.^3 y},\quad \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) = \frac{2\,(sin.^2 y + 3\, cos^2 y)\, l\, x}{sin.^4 y};$$

und wenn dieses letztere Differential nun drei Mal nach x differentiirt und dabei Kürze halber $\frac{2\,(sin.^2 y + 3\, cos.^2 y)}{sin.^4 y} = A$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{d^3 u}{dy^2\, dx}\right) = \frac{A}{x},\quad \left(\frac{d^4 u}{dy^2\, dx^2}\right) = -\frac{A}{x^2},$$

$$\left(\frac{d^5 u}{dy^2\, dx^3}\right) = \frac{2A}{x^3} = \frac{4\,(sin.^2 y + 3\, cos^2 y)}{x^3\, sin.^4 y};$$

wie vorhin.

Anmerk. Mit Berücksichtigung der obigen Gleichung β) läfst sich nun auch der im §. 18. für $d^2 u$ gefundene Ausdruck (α weiter reduciren und so darstellen:

$$d^2 u = \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) dx\, dy + \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) dy^2 \quad \ldots (\alpha$$

Man findet eben so durch weiteres Differentiiren und Zusammenziehen:

$$d^3 u = \left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right) dx^3 + \left(\frac{d^3 u}{dx^2\, dy}\right) 3\, dx^2\, dy + \left(\frac{d^3 u}{dx\, dy^2}\right) 3\, dx\, dy^2 + \left(\frac{d^3 u}{dy^3}\right) dy^3 \quad \ldots (b,$$

und so nach diesem Gesetze, welches sich symbolisch für $d^n u$

durch $(dx + dy)^n$ darstellen läſst [man vergl. das über die Formel A), §. 19. Gesagte], weiter.

Auf dieselbe Weise kann man auch die höhern Differentiale für Functionen dreier und mehrerer veränderlichen Gröſsen entwickeln; so ist für $u = f(x, y, z)$:

$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx^2 + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) 2\,dx\,dy + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy^2$$
$$+ \left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right) 2dx\,dz + \left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right) 2dy\,dz + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right) dz^2;$$

was wieder kurz durch das Symbol $(dx + dy + dz)^2$ ausgedrückt werden kann, wenn man mit den Gliedern dieser Entwickelung die betreffenden partiellen Differentialcoefficienten verbindet.

Allgemein ist für $u = f(x, y, z, v, \ldots)$, wenn man auch noch zur gröſsern Allgemeinheit dx, dy, dz, dv, ... als variabel ansieht:

$$k)\quad d^2u = \left\{\left(\frac{du}{dx}\right) d^2x + \left(\frac{du}{dy}\right) d^2y + \left(\frac{du}{dz}\right) d^2z + \left(\frac{du}{dv}\right) d^2v + \ldots\right\}$$
$$+ \left\{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) dx\,dy + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dz}\right) dx\,dz + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dv}\right) dx\,dv + \ldots\right\}$$
$$+ \left\{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dy\,dz}\right) dy\,dz + 2\left(\frac{d^2u}{dy\,dv}\right) dy\,dv + \ldots\right\}$$
$$+ \left\{\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right) dz^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dz\,dv}\right) dz\,dv + \ldots\right\}$$
$$+ \left\{\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right) dv^2 + \ldots\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei das Gesetz ebenfalls hinreichend klar ist.

Eben so lieſse sich auch leicht, wenn es nöthig wäre, d^3u, d^4u, ... auf diese Weise entwickeln.

Beispiel. Für $u = 5x^4y^3$ hat man, wenn dx und dy als constant angenommen werden:

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = 5.4.3.2\,xy^3,\quad \left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right) = 5.4.3.3\,x^2y^2,$$
$$\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right) = 5.4.3.2\,x^3y \text{ und } \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) = 5.3.2.1\,x^4;$$

folglich nach der obigen Formel (b:

$$d^3 u = 120\, x\, y^3\, d\, x^3 + 540\, x^2 y^2\, d\, x^2\, d\, y$$
$$+ 360\, x^3 y\, d\, x\, d\, y^2 + 30\, x^4\, d\, y^3;$$

welches Resultat auch in der That erhalten wird, wenn man $5x^4 y^3$ nach den bekannten Regeln für das Product und die Potenz drei Mal hinter einander differentiirt.

§. 21.

Es war (§. 16.) für $u = f(x, y)$: $du = P\,d\,x + Q\,d\,y$, und dabei $P = \left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)$ und $Q = \left(\frac{d\,u}{d\,y}\right)$; folglich ist auch, wenn man wieder partiell differentiirt:

$$\left(\frac{d\,P}{d\,y}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d\,x\,d\,y}\right) \text{ und } \left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d\,y\,d\,x}\right).$$

Da nun zufolge der im vorigen Paragraphe aufgestellten Gleichungen [von denen jene β) die allgemeine ist] diese beiden letztern Differentiale zweiter Ordnung einander gleich sind; so hat man

$$1)\quad \left(\frac{d\,P}{d\,y}\right) = \left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right),$$

eine **Bedingungsgleichung**, welche immer bestehen muſs, wenn der Ausdruck $P\,d\,x + Q\,d\,y$ das wahre oder **vollständige** Differential irgend einer Function $f(x, y)$ **zweier** Variablen seyn soll.

Beispiel.

Ist z. B. $u = f(x, y) = x\, sin.y + y^2\, l\, x$, so wird (hier kann man mit Vortheil von der partiellen Differentiirung Gebrauch machen)

$$d\,u = \left(sin.y + \frac{y^2}{x}\right) d\,x + (x\, cos.y + 2\,y\, l\,x)\, d\,y;$$

folglich ist

$$P = sin.y + \frac{y^2}{x} \quad \text{und} \quad Q = x\, cos.y + 2\,y\, l\,x.$$

Daher ferner

$$\left(\frac{d\,P}{d\,y}\right) = cos.y + \frac{2\,y}{x} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) = cos.y + \frac{2\,y}{x};$$

welche beiden Ausdrücke in der That identisch sind.

Wäre hingegen der Differentialausdruck

$$x^2 y^3 dx + a^y \sin. x \, dy$$

gegeben, wofür man sofort $P = x^2 y^3$, $Q = a^y \sin. x$, also $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 3x^2y^2$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = a^y \cos x$ hätte; so würde die Verschiedenheit dieser beiden letzten Ausdrücke aufs Entschiedenste beweisen, daſs der gegebene Ausdruck, so wie er ist, nicht unmittelbar durch die Differentiation einer Function $f(x, y)$ entstanden seyn kann.

Ist $u = f(x, y, z)$, also (§. 16.) $du = Pdx + Qdy + Rdz$, so findet man genau auf die vorige Weise [oder kürzer, wenn man in diesem letzten Ausdruck, da die Variablen x, y, z von einander unabhängig sind, nach und nach z, y, x als constant ansieht, wodurch beziehungsweise dz, dy, $dx = 0$ wird, und auf die beiden übrigen, stehen bleibenden Glieder, die vorhin gefundene Bedingungsgleichung 1) anwendet]:

$$2) \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right), \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$$

drei Bedingungsgleichungen, welche gleichzeitig Statt finden müssen, wenn der gegebene Differentialausdruck du wirklich ein wahres und vollständiges (unabgekürztes) Differential einer Function $f(x, y, z)$ dreier von einander unabhängiger veränderlichen Gröſsen seyn soll.

Eben so wäre es ein Leichtes, die betreffenden Bedingungsgleichungen für Functionen von noch mehreren Variablen aufzustellen.

Euler's Lehrsatz über die homogenen Functionen.

§. 22.

Nach §. 1., Erkl. 6., *b*) (Bd. I.) ist eine Function mehrerer veränderlichen Gröſsen, wie z. B $f(x, y, z, \ldots)$, homogen oder gleichartig und vom Grade m, wenn dadurch, daſs man statt $x, y, z, \ldots$ respective tx, ty, tz, ... schreibt, wobei t eine neue von den vorigen un-

abhängige Variable ist, die Function $f(x, y, z, \ldots)$ in $t^m f(x, y, z, \ldots)$ übergeht.

Es sey nun $u = f(x, y, \ldots)$ eine solche Function, so geht diese durch die erwähnte Substitution über in $t^m u$, oder es verwandelt sich, wenn man $t = 1 + \alpha$ setzt, wodurch x in $x + \alpha x$, y in $y + \alpha y$ u. s. w. übergeht, u in $(1 + \alpha)^m u$.

Nach der erweiterten *Taylor*'schen Formel (§. 19.) findet man aber, wenn in der ursprünglichen Function u, x in $x + \alpha x$, y in $y + \alpha y$, etc. übergeht:

$$(1+\alpha)^m u = u + \left[\left(\frac{du}{dx}\right)\alpha x + \left(\frac{du}{dy}\right)\alpha y + \ldots\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)\alpha^2 x^2 + \left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)2\alpha^2 xy + \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)\alpha^2 y^2 + \ldots\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Entwickelt man $(1+\alpha)^m$ und vergleicht die beiderseits zu einerlei Potenzen von α (als einer ganz willkürlichen Gröſse) gehörigen Coefficienten; so wird

$$u = u, \quad mu = \left(\frac{du}{dx}\right)x + \left(\frac{dy}{dy}\right)y + \ldots,$$
$$m(m-1)u = \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)x^2 + \left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)2xy + \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)y^2 + \ldots,$$
u. s. w.;

von welchen Gleichungen wir zu unserm Zwecke bloſs die zweite brauchen.

Da nun das Differential unserer Function die Form hat

$$p)\quad du = Pdx + Qdy + Rdz + \ldots,$$

wobei (§. 16.)

$$P = \left(\frac{du}{dx}\right),\quad Q = \left(\frac{du}{dy}\right),\quad R = \left(\frac{du}{dz}\right), \ldots$$

ist; so hat man nach der erwähnten zweiten Gleichung:

$$q)\quad Px + Qy + Rz + \ldots = mu:$$

setzt man nämlich in dem Differential einer *homogenen* Function des m^{ten} Grades statt dx,

dy, dz, ... beziehungsweise x, y, z; so entsteht dadurch die mfache ursprüngliche Function *). Zugleich folgt, dafs P, Q, R, ... homogene Functionen des $(m-1)^{\text{sten}}$ Grades sind.

Beispiel.

Es sey z. B. $u = x^2y - 3y^3 + \frac{x^4}{y}$; so ist für diese homogene Function des dritten Grades:

$$du = \left(2xy + \frac{4x^3}{y}\right)dx$$
$$+ \left(x^2 - 9y^2 - \frac{x^4}{y^2}\right)dy \quad [= P\,dx + Q\,dy],$$

*) Dieser schöne und wichtige Satz rührt von *Euler* her; wenigstens hat er schon in der ältern Ausgabe seiner Mechanik (*Mechanica, siue motus scientia analytice exposita. Petrop.* 1736) davon Gebrauch gemacht, und ihn auch dort (Tom. II., §. 497.) vorgetragen.

Es läfst sich dieser auch auf folgende Art ableiten:

Nehmen wir, um nur den Gang anzudeuten, blofs eine homogene Function von zwei Variablen, und setzen

$$u = Ax^ay^\alpha + Bx^by^\beta + \ldots,$$

wobei also, wenn die Function vom m^{ten} Grade seyn soll [§. 1., Erkl. 6., a), Bd. I.), $a + \alpha = b + \beta = \ldots = m$ seyn mufs; so erhält man

$$du = (Aax^{a-1}y^\alpha + Bbx^{b-1}y^\beta + \ldots)dx$$
$$+ (A\alpha x^ay^{\alpha-1} + B\beta x^by^{\beta-1} + \ldots)dy,$$

so dafs also, wenn man $du = P\,dx + Q\,dy$ setzt:

$$P = Aax^{a-1}y^\alpha + Bbx^{b-1}y^\beta + \ldots$$

und $Q = A\alpha x^ay^{\alpha-1} + B\beta x^by^{\beta-1} + \ldots$,

also $Px = Aax^ay^\alpha + Bbx^by^\beta + \ldots$

und $Qy = A\alpha x^ay^\alpha + B\beta x^by^\beta + \ldots$,

folglich

$$Px + Qy = A(a+\alpha)x^ay^\alpha + B(b+\beta)x^by^\beta + \ldots,$$

d. i. $Px + Qy = mu$ ist.

Zugleich folgt, dafs P, Q ebenfalls homogene Functionen, aber nur vom $(m-1)^{\text{sten}}$ Grade sind.

folglich

$$Px + Qy = 2x^2y + \frac{4x^4}{y} + x^2y - 9y^3 - \frac{x^4}{y}$$
$$= 3\left(x^2y - 3y^3 + \frac{x^4}{y}\right).$$

Anmerk. Enthält eine im übrigen homogene Function auch transcendente Theile oder Factoren vom Grade Null, in welchen letztern also durch die erwähnte Substitution von tx, ty, .. statt x, y, .. die Gröſse t wieder herausfällt, und daher immer noch die ganze Function u in $t^m u$ übergeht, also die obige Definition ihre Anwendung behält; so findet ebenfalls noch der eben entwickelte Lehrsatz Statt. So wäre z. B. für $u = xy - x^2 l \frac{x}{y}$, wobei der Bruch $\frac{x}{y}$, auf welchen sich das Zeichen l der transcendenten Operation bezieht, vom Grade Null, und u im Uebrigen homogen und vom zweiten Grade ist:

$$du = \left(y - 2xl\frac{x}{y} - x\right)dx + \left(x + \frac{x^2}{y}\right)dy;$$

also in der That:

$$Px + Qy = yx - 2x^2 l\frac{x}{y} - x^2 + xy + x^2$$
$$= 2\left(xy - x^2 l\frac{x}{y}\right).$$

Viertes Capitel.

Von der Differentiation der *Gleichungen* mit *zwei* oder *mehreren* veränderlichen Gröſsen.

§. 23.

Bisher haben wir bloſs entwickelte Functionen, d. i. Ausdrücke von der Form $y = f(x)$ [oder $u = f(x,y)$ u. s. w.] betrachtet, in welchen die Functionen y allein auf der einen Seite und die Variable x auf der andern Seite der Gleichung stand (oder wir haben eigentlich, ohne eine ursprünglich gegebene Gleichung, die Function, Kürze halber, durch einen Buchstaben bezeichnet). Jetzt wollen wir untersuchen, auf welche Art und Weise man bei unentwickelten Functionen, d. i. bei Gleichungen von der Form $f(x, y) = 0$, in welchen die Function y noch mit der Variablen x verbunden oder vermischt vorkommt, zu verfahren habe, um daraus den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu finden. Bevor wir indeſs diese Untersuchung anstellen, wollen wir noch den Fall betrachten, in welchem die Function y nicht unmittelbar durch die Variable x, sondern erst mittelst einer Zwischengleichung gegeben und ausgedrückt ist.

§. 24.

Es sey nämlich $y = f(w)$ und $w = \varphi(x)$, also offenbar auch y eine gewisse Function von x. Hier kann es nun im ersten Augenblicke scheinen, als müſste man, um den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ zu finden, aus diesen beiden Gleichungen erst w eliminiren [um $y = F(x)$ zu erhalten] und dann aus der entstehenden Gleichung in x und y diesen Differentialquotienten ausdrücken. Allein diese, in vielen Fällen nicht

einmal ausführbare Elimination von w, wird durch folgendes Verfahren entbehrlich.

Aus den beiden gegebenen Gleichungen folgt (m. s. den Anfang des §. 5.) $dy = f'(w)dw$ und $dw = \varphi'(x)dx$; substituirt man daher diesen letzten Werth von dw in der erstern Gleichung, so erhält man

$$dy = f'(w)\varphi'(x)\,dx\text{, und daraus } \frac{dy}{dx} = f'(w)\varphi'(x).$$

Es ist aber auch, wie man sieht,

$$f'(w) = \frac{dy}{dw} \text{ und } \varphi'(x) = \frac{dw}{dx},$$

folglich auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} \ldots (1,$$

d. h. man erhält den gesuchten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, indem man die aus den beiden gegebenen Gleichungen $y = f(w)$ und $w = \varphi(x)$ folgenden Differentialcoefficienten zusammenmultiplicirt *).

*) Dieser Satz kann sogleich ganz allgemein für eine Function von jeder beliebigen Anzahl veränderlicher Gröfsen auf folgende Weise entwickelt werden:

Es sey

$$y = f(z, u, v, \ldots) \ldots (1$$

eine Function der Variablen z, u, v, ... welche selbst alle von der veränderlichen Gröfse x abhängen sollen. Wird nun x um Δx verändert, so geht y über in

$$y' = f(z + \Delta z, u + \Delta u, v + \Delta v, \ldots)$$

oder nach dem *Taylor*'schen Lehrsatze auf mehrere Variable ausgedehnt (§. 19.):

$$\begin{aligned} y' = y &+ \left(\frac{dy}{dz}\right)\Delta z + \ldots \\ &+ \left(\frac{dy}{du}\right)\Delta u + \ldots \\ &+ \left(\frac{dy}{dv}\right)\Delta v + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nun ist aber nach dem genannten Satze für eine veränderliche Gröfse (§. 8.):

B e i s p i e l e.

Es sey $y = 2w^2$ und $w = 3x - 4x^3$; so erhält man für die vorhin genannten Differentialcoefficienten:

$$\frac{dy}{dw} = 4w \text{ und } \frac{dw}{dx} = 3 - 12x;$$

daher nach der obigen Regel oder Gleichung (1:

$$\frac{dy}{dx} = 4w(3 - 12x) = 4(3x - 4x^3)(3 - 12x).$$

Durch die, in diesem Beispiele ganz einfache Elimination von w aus den beiden gegebenen Gleichungen, würde man $y = 2(3x - 4x^3)^2$, und daraus in der That wie zuvor $\frac{dy}{dx} = 4(3x - 4x^3)(3 - 12x)$ gefunden haben.

Anmerk. 1. Aus dem ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ lassen sich nun leicht auch die folgenden auf dem bekannten (in §§. 5. und 7. angegebenen) Wege ableiten.

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \ldots, \quad \Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \ldots,$$

$$\Delta v = \frac{dv}{dx}\Delta x + \ldots \text{ u. s. w.},$$

also auch, wenn man diese Werthe in die vorige Gleichung substituirt und Δx in dx verändert, wodurch $y' - y = dy$ (in Bezug auf x als veränderlich) wird:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dy}{du}\right)\frac{du}{dx} + \left(\frac{dy}{dv}\right)\frac{dv}{dx} + \ldots$$

oder auch:

$$dy = \left(\frac{dy}{dz}\right)dz + \left(\frac{dy}{du}\right)du + \left(\frac{dy}{dv}\right)dv \ldots \text{ (2.}$$

Da nun aus der obigen Gleichung (1, wenn man $z, u, v, \ldots$ als von einander u n a b h ä n g i g ansieht, nach §. 16.

$$dy = \left(\frac{dy}{dz}\right)dz + \left(\frac{dy}{du}\right)du + \left(\frac{dy}{dv}\right)dv + \ldots$$

folgt; so läſst sich der durch die Relation (2 ausgesprochene Satz auch so einkleiden: um aus der Gleichung (1 unter den angegebenen Bedingungen das Differential dy in Bezug auf x zu erhalten, wird man daraus dy (nach §. 16.) so entwickeln, als ob die Variablen $z, u, v, \ldots$ von einander gänzlich u n a b h ä n g i g wären, aber dann die in der Differentialformel vorkommenden Differentiale $dz, du, dv, \ldots$ alle auf die absolut veränderliche Gröſse x, von welcher $z, u, v, \ldots$ abhängig sind, beziehen. Genau auf dieselbe Art erhält man die h ö h e r n Differentiale von y.

Anmerk. 2. Ist $u = f(x, y, z)$ und dabei z selbst wieder eine Function der beiden von einander unabhängigen Variablen x und y, nämlich $z = \varphi(x, y)$, also auch $u = f[x, y, \varphi(x, y)]$; so erhält man, mit Berücksichtigung der obigen Regel, ganz einfach:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left\{\frac{du}{dx}\right\} + \left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = \left\{\frac{du}{dy}\right\} + \left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

wobei $\left\{\frac{du}{dx}\right\}$ und $\left\{\frac{du}{dy}\right\}$ die partiellen Differentialcoefficienten von u nach x und y bezeichnen sollen, wenn man bei dieser partiellen Differentiation beziehungsweise nur die Variable x und y aufserhalb des Functionszeichens φ berücksichtigt.

So wäre z. B. für $u = a^x + ly + z^2$ und $z = x + \sin. y$, nach der erwähnten Bezeichnung:

$$\left\{\frac{du}{dx}\right\} = a^x l a, \quad \left\{\frac{du}{dy}\right\} = \frac{1}{y}.$$

Da ferner

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = 2z = 2(x + \sin. y), \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = 1 \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = \cos. y$$

ist; so hat man nach den vorigen Relationen:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = a^x l a + 2(x + \sin. y)$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{1}{y} + 2(x + \sin. y)\cos. y.$$

Es ist in der That, wenn man in der gegebenen Gleichung für z substituirt, auch $u = a^x + ly + (x + \sin. y)^2$, und daraus auf gewöhnlichem Wege:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = a^x l a + 2(x + \sin. y)$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{1}{y} + 2(x + \sin. y)\cos. y;$$

wie zuvor.

§. 25.

Für den Fall, dafs zwar y und x durch eine Gleichung mit einander verbunden sind und y die entwickelte Function von x ist, beide aber selbst wieder von einer dritten Variablen abhängen, sey w diese dritte unabhängige oder ab-

solut veränderliche Gröſse, also $y = f(w)$ und $x = \varphi(w)$; so folgt $dy = f'(w)\,dw$, $dx = \varphi'(w)\,dw$, und daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(w)}{\varphi'(w)} = \frac{\frac{dy}{dw}}{\frac{dx}{dw}} \ldots (2.$$

Ferner ist, wenn man dw als constant ansieht:

$$d.\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2},$$

während, wenn nur schlechtweg $y = F(x)$, ohne einer sonstigen Beziehung, x die unabhängige Variable, und dabei endlich dx constant wäre:

$$d.\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx}$$

seyn würde.

Sollen demnach Differentialausdrücke, welche unter der Voraussetzung, daſs $y = F(x)$ und x die unabhängige variable Gröſse ist, entwickelt sind, und in welchen die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... vorkommen, nun so verstanden oder umgewandelt werden, daſs $y = f(w)$ und $x = \varphi(w)$, also jetzt w die unabhängige Variable seyn soll; so wird man den ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ ungeändert lassen und jetzt nur unter dy, dx Differentialgröſsen verstehen, welche sich auf die veränderliche Gröſse w beziehen [m. s. die Gl. (2]; dagegen wird man anstatt des zweiten Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ setzen:

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

und auch hier diese Differentiale als auf w bezogen sich vorstellen; es wird nämlich eigentlich:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dw}\cdot\frac{d^2y}{dw^2} - \frac{dy}{dw}\cdot\frac{d^2x}{dw^2}}{\left(\frac{dx}{dw}\right)^3} \text{ *)}.$$

*) Mit Hilfe der *Taylor*'schen Formel lassen sich diese Ausdrücke auch auf folgende Art entwickeln:

Aehnliche Aenderungen oder Substitutionen werden auch in dem dritten und den folgenden Differentialquotienten nothwendig, wenn diese in dem ursprünglichen Ausdrucke vorkommen sollten.

Es sey $y = F(x)$, dabei aber $y = f(w)$, $x = \varphi(w)$ und w die unabhängig variable Gröſse. Nimmt nun w um h zu, so soll x in $x + i$ übergehen, also um i zunehmen; nimmt aber x um i zu, so soll dadurch y um k zunehmen, dergestalt, daſs also durch die Zunahme von w um h, y um k zunimmt; welche letztere Zunahme wir sofort bestimmen wollen.

Es ist aber

$$x + i = \varphi(w+h) = x + \frac{dx}{dw}h + \frac{d^2x}{dw^2}\frac{h^2}{2} + \ldots \quad (1$$

$$y + k = F(x+i) = y + \frac{dy}{dx}i + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{i^2}{2} + \ldots \quad (2$$

und auch

$$y + k = f(w+h) = y + \frac{dy}{dw}h + \frac{d^2y}{dw^2}\frac{h^2}{2} + \ldots \quad (3$$

Da nun die beiden Entwicklungen (2 und (3 identisch seyn müssen, so hat man

$$\frac{dy}{dx}i + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{i^2}{2} + \ldots = \frac{dy}{dw}h + \frac{d^2y}{dw^2}\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

oder wenn man im ersten Theile der Gleichung für i den Werth aus (1 setzt:

$$\frac{dy}{dx}\left[\frac{dx}{dw}h + \frac{d^2x}{dw^2}\frac{h^2}{2} + \ldots\right]$$
$$+ \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dw}h + \frac{d^2x}{dw^2}\frac{h^2}{2} + \ldots\right]^2 + \ldots$$
$$= \frac{dy}{dw}h + \frac{d^2y}{dw^2}\frac{h^2}{2} + \ldots$$

und wenn man entwickelt:

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dw}h + \left\{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dw^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left[\frac{dx}{dw}\right]^2\right\}\frac{h^2}{2} + \ldots = \frac{dy}{dw}h + \frac{d^2y}{dw^2}\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Die Vergleichung der zu gleichen Potenzen von h gehörigen Coefficienten dieser identischen Gleichung gibt endlich:

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dw} = \frac{dy}{dw}, \quad \text{daraus ist} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dw}}{\frac{dx}{dw}};$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dw^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\left[\frac{dx}{dw}\right]^2 = \frac{d^2y}{dw^2},$$

§. 26.

Um nun auf das Differential einer **Gleichung** mit **zwei** veränderlichen Gröſsen überzugehen, sey $f(x,y)=0$ die gegebene Gleichung, in welcher y die Function von x seyn soll. Da also y in $y+dy$ übergeht, wenn man die unabhängig variable Gröſse x um dx zunehmen läſst; so besteht auch die Gleichung: $f(x+dx,\, y+dy)=0$, und wenn man von dieser die gegebene Gleichung abzieht, so wird

$$f(x+dx,\, y+dy)-f(x,\, y)=0.$$

Es ist aber nach §. 19., Formel A), wenn man dort $h=dx$, $k=dy$ setzt und die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung gehörig wegläſst:

$$f(x+dx,\, y+dy)-f(x,y)=\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy,$$

wobei u für $f(x,y)$ steht; mithin auch zufolge der vorhergehenden Gleichung:

$$l)\quad \left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy=0,$$

oder wegen §. 16., Gl. (2: $d.f(x,y)=0$;

um also aus der gegebenen Gleichung $f(x,y)=0$ den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu finden, wird man das Differential von $f(x,y)$ so nehmen, als ob die beiden veränderlichen Gröſsen x und y von einander unabhängig wären,

daraus ist

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dw^2}-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{dw^2}}{\left[\frac{dx}{dw}\right]^2};$$

u. s. w.

Setzt man in dem zweiten Quotienten für $\frac{dy}{dx}$ den Werth aus der ersten Gleichung, so erhält man für $\frac{d^2y}{dx^2}$ genau den oben gefundenen Ausdruck. Eben so könnte man die folgenden Differentialquotienten bestimmen.

dasselbe gleich Null setzen und aus dieser Gleichung endlich den genannten Quotienten bestimmen.

Es folgt nämlich aus der ersten der vorigen beiden Gleichungen [l)]:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} \quad \ldots (3.$$

B e i s p i e l.

Um aus der Gleichung $y^2 - 4ax^3y + lx = 0$ den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ zu finden, hat man nach der vorigen Regel:

$$(2y - 4ax^3)\,dy - \left(12ax^2y - \frac{1}{x}\right)dx = 0,$$

und daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12ax^2y - x^{-1}}{2y - 4ax^3}.$$

Hätte man früher (was in diesem Beispiele leicht angeht) die Function y entwickelt durch x dargestellt, so würde man $y = 2ax^3 + \sqrt{(4a^2x^6 - lx)}$ und daraus durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = 6ax^2 + \frac{24a^2x^5 - x^{-1}}{2\sqrt{(4a^2x^6 - lx)}} = 6ax^2$$

$$+ \frac{24a^2x^5 - x^{-1}}{2(y - 2ax^3)} = \frac{12ax^2y - x^{-1}}{2y - 4ax^3}$$

wie zuvor gefunden haben.

§. 27.

Wiederholt man die Schlüsse des vorhergehenden Paragraphes, nach welchen wir gefunden haben, daſs wenn $u = f(x, y) = 0$ ist, auch $du = 0$ seyn muſs; so findet man eben so: $d^2u = 0$, $d^3u = 0$ u. s. w.

Nun war

$$du \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dx}\right) dy = p\,dx + q\,dy \quad \ldots (\alpha.$$

Differentiirt man daher abermals und berücksichtiget, daſs dx constant, dy aber, wegen $y = \varphi(x)$ variabel ist; so

erhält man:

$$d^2u = dp.dx + dq.dy + q d^2y \; . \; . \; . \; (\beta,$$

oder da (§. 16.) p und q wieder gewisse Functionen von x und y sind, also [§. 16., Gl. (2]:

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy \text{ und } dq = \left(\frac{dq}{dx}\right)dx + \left(\frac{dq}{dy}\right)dy$$

ist, auch

$$d^2u = \left(\frac{dp}{dx}\right)dx^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)dx\,dy + \left(\frac{dq}{dx}\right)dx\,dy$$
$$+ \left(\frac{dq}{dy}\right)dy^2 + q\,d^2y$$

und wegen

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right), \left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right),$$
$$\left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

und da auch noch (§. 20.)

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)$$

ist, endlich:

$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)dx\,dy + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2$$
$$+ \left(\frac{du}{dy}\right)d^2y = 0 \; . \; . \; . \; (m.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun ganz einfach:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \left\{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right\} : \left(\frac{du}{dy}\right) \; . \; . \; . \; (4.$$

Ganz auf dieselbe Art findet man, wenn die Gleichung (m noch Einmal differentiirt und daraus $\frac{d^3y}{dx^3}$ bestimmt wird:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = - \left\{\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + 3\left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right)\frac{dy}{dx}\right.$$
$$+ 3\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)\left[\frac{dy}{dx}\right]^3$$
$$\left. + 3\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right\} : \left(\frac{du}{dy}\right).$$

Aus den Entwicklungen dieses Paragraphes geht demnach klar hervor, daſs man, ohne die Gleichung $f(x, y) = 0$ erst in Bezug auf y auflösen zu dürfen, den Differentialquotienten $\frac{d^n y}{dx^n}$ einer jeden beliebigen Ordnung bestimmen könne.

Wir machen, des künftigen Gebrauches wegen, hier insbesondere noch auf den Umstand aufmerksam, daſs diese Differentialquotienten immer von der Form sind:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{V}{W} \ldots (r$$

wobei V eine Function von x, y und den Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$, und W stets linearisch und gleich $\left(\frac{du}{dx}\right)$ ist.

Anmerk. Nimmt man an, daſs die beiden veränderlichen Gröſsen x und y von einander unabhängig, und dx, dy constant sind; so folgt aus der obigen Gleichung (m, wegen $d^2 y = 0$, wieder das schon bekannte Differential [§. 20., Anmerk. (a)]:

$$d^2 u = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 \ldots (\gamma;$$

zugleich gibt die Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem obigen β) (wo ebenfalls $d^2 y = 0$ zu nehmen ist):

$$\delta)\quad dp = r\,dx + s\,dy \text{ und } dq = s\,dx + t\,dy,$$

wobei der Kürze wegen (nach *Euler*)

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = r, \quad \left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right) = s \text{ und } \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) = t$$

gesetzt ist.

Beispiel.

Um wenigstens noch für die Bestimmung des zweiten Differentialquotienten ein einfaches Beispiel aufzustellen, sey die Gleichung gegeben:

$$u = axy^2 - \sin. x = 0;$$

dafür hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = ay^2 - \cos x, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2axy, \quad \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = \sin. x,$$

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right) = 2ay, \quad \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right) = 2ax;$$

folglich nach Gl. (3, §. 26.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos.\,x - ay^2}{2axy};$$

und nach der obigen Relation (4:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\left[sin.\,x + 4ay\left(\frac{cos.\,x - ay^2}{2axy}\right)\right.$$
$$\left. + 2ax\left(\frac{cos.\,x - ay^2}{2axy}\right)^2\right] : 2axy$$
$$= \frac{3ay^2 - 2x\,sin.\,x - 2\,cos.\,x}{4ax^2 y}.$$

Es folgt in der That aus der gegebenen Gleichung, die sich hier nach y leicht auflösen läſst:

$$y = \sqrt{\left(\frac{sin.\,x}{ax}\right)}$$

und daraus nach den Regeln des ersten Capitels:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,cos.\,x - sin.\,x}{2ax^2 y} = \frac{cos.\,x - ay^2}{2axy} \text{ (wegen } sin.\,x = axy^2\text{)}$$

und

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{xy\left(-sin.\,x - 2ay\frac{dy}{dx}\right) - (cos.\,x - ay^2)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)}{2ax^2 y^2}$$

oder, wenn man für $\frac{dy}{dx}$ den vorigen Werth setzt und gehörig reducirt, auch

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3ay^2 - 2x\,sin.\,x - 2\,cos.\,x}{4ax^2 y},$$

wie vorhin.

§. 28.

Ist $u = f(x, y, z) = 0$ gegeben und z als Function der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x, y zu betrachten; so kann z verändert werden, indem sich erstens von den Gröſsen x und y jede für sich allein, oder zweitens beide zugleich ändern. Sieht man aber y als constant an, so hat man, wie in den beiden vorigen Paragraphen, eine Gleichung zwischen z und x, wobei

z eine Function von x ist, und daher [§. 26., Gl. l)] die Gleichung:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dz}\right)d\underset{x}{z} = 0.$$

Eben so ist, wenn x als constant genommen wird:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)d\underset{y}{z} = 0,$$

wobei wir der Einfachheit wegen, die partiellen Differentiale von z nach x und y durch $d\underset{x}{z}$ und $d\underset{y}{z}$ ausdrücken.

Diese beiden Gleichungen addirt, geben

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)\left[d\underset{x}{z} + d\underset{y}{z}\right] = 0,$$

oder wegen $d\underset{x}{z} + d\underset{y}{z} = dz$ auch:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz = 0, \text{ d. i. } du = 0.$$

Auf ähnliche Weise könnten auch die höhern Differentiale von u abgeleitet, und die hier entwickelten Relationen überhaupt auf Gleichungen von jeder beliebigen Anzahl veränderlicher Gröſsen, von denen eine als Function aller übrigen auftritt, ausgedehnt werden.

§. 29.

Hinsichtlich der in einer gegebenen Gleichung vorkommenden constanten Glieder gilt genau dasselbe, was schon in dieser Beziehung im §. 2. erwähnt wurde: diese fallen nämlich durch die Differentiation heraus.

Ist z. B. $y^2 = ax + b$, so ist die daraus abgeleitete Differentialgleichung

$$2y\,dy = a\,dx$$

von der beständigen Gröſse b unabhängig und entspricht sofort allen besondern Gleichungen, welche aus der gegebenen entspringen, indem man der Gröſse b alle möglichen Werthe beilegt.

Obgleich die in der gegebenen Gleichung enthaltene constante Gröſse a durchs Differentiiren nicht herausfallen

kann, so läſst sich doch auch eine von a unabhängige Gleichung finden, indem man aus $y^2 = ax + b$ und $2y\,dy = a\,dx$, d. i. aus der gegebenen und der daraus durchs Differentiiren abgeleiteten Gleichung a eliminirt. Es folgt in der That aus dieser letztern Gleichung:

$$a = \frac{2y\,dy}{dx}$$

und wenn dieser Werth in der erstern substituirt wird:

$$y^2 = \frac{2xy\,dy}{dx} + b \quad \text{oder} \quad y^2\,dx = 2xy\,dy + b\,dx,$$

als die genannte Gleichung; welche zwar nicht unmittelbar die Differentialgleichung der gegebenen ist, aber dennoch die Relation ausdrückt, welche zwischen der Function y, der Variablen x und dem Differentialcoefficienten $\frac{dy}{dx}$ für jeden Werth von a Statt findet.

Bestimmt man aus der gegebenen Gleichung a, so wird

$$a = \frac{y^2 - b}{x},$$

und wenn man differentiirt:

$$0 = 2xy\,dy - (y^2 - b)\,dx;$$

welches genau die vorige Gleichung ist.

Kommt die zu eliminirende Constante in der gegebenen Gleichung in einer höhern, als der ersten Potenz vor; so entsteht auch durch die genannte Elimination eine Differentialgleichung von einem höhern Grade, d. i. es kommen von dx und dy auch höhere Potenzen vor.

Es sey z. B. die Gleichung gegeben:

$$x^2 + y^2 - 2ax = a^2;$$

so folgt aus dieser die Differentialgleichung:

$$x\,dx + y\,dy - a\,dx = 0$$

und daraus:

$$a = \frac{x\,dx + y\,dy}{dx}.$$

Wird dieser Werth von a in der gegebenen Gleichung substituirt, so erhält man

$$x^2 + y^2 - \frac{2x^2\,dx + 2xy\,dy}{dx} = \left(\frac{x\,dx + y\,dy}{dx}\right)^2$$

oder nach einer einfachen Reduction:

$$2x^2 - y^2 + 4xy\frac{dy}{dx} + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

als Differentialgleichung, welche sofort die Relation ausdrückt, die zwischen y, x und $\frac{dy}{dx}$ unabhängig von jedem besondern Werth von a Statt findet.

Diese Gleichung kann auch unter der Form dargestellt werden:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + 4\frac{x}{y}\left[\frac{dy}{dx}\right] + \frac{2x^2 - y^2}{y^2} = 0;$$

und man kommt überhaupt, wenn die zu eliminirende beständige Gröfse in der n^{ten} Potenz erscheint, auf eine Gleichung von der Form:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^n + P\left[\frac{dy}{dx}\right]^{n-1} + Q\left[\frac{dy}{dx}\right]^{n-2} + \ldots + U\frac{dy}{dx} + V = 0,$$

wobei P, Q, ... V Functionen von x und y sind.

Endlich wollen wir noch bemerken, dafs man durch das im gegenwärtigen Paragraphe angeführte Verfahren überhaupt jede beliebige Anzahl von constanten Gröfsen aus der gegebenen Gleichung wegschaffen kann; dazu darf man nur die Differentiation so oft wiederholen, als constante Gröfsen verschwinden sollen.

Ist z. B. $y^2 - a^2 x = bx^2$ die gegebene Gleichung, so erhält man nach der ersten Differentiation:

$$2y\,dy - a^2\,dx = 2bx\,dx,$$

und wenn man noch Einmal differentiirt und gleich durch 2 abkürzt:

$$y\,d^2y + dy^2 = b\,dx^2.$$

Eliminirt man nun aus diesen drei Gleichungen a und b, so erhält man die von diesen beiden Constanten a und b unabhängige Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Fünftes Capitel.

Anwendung und Gebrauch der Differentialrechnung in der *Analysis*.

I. Bestimmung der wahren Werthe gebrochener Functionen, welche unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen.

§. 30.

Es gibt gebrochene Functionen, welche für einen gewissen Werth der veränderlichen Gröfse die Form der Unbestimmtheit $\frac{0}{0}$ annehmen und nichts desto weniger einen bestimmten, angebbaren Werth besitzen. Ist z. B.

$$y = \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

die gebrochene Function von x, so geht diese für den besondern Werth von $x = a$ über in $\frac{0}{0}$; berücksichtiget man aber, dafs $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ ist, und kürzt diesen Bruch durch den Factor $x - a$, der eben für $x = a$ Null wird, ab; so erhält man auch $y = x^2 + ax + a^2$; ein Ausdruck, welcher für $x = a$ nicht mehr in $\frac{0}{0}$ übergeht, sondern den wahren und gesuchten Werth $y = 3a^2$ liefert.

Eben so geht $y = \frac{3 - \sqrt{(x + 8)}}{x^2 - 1}$ für $x = 1$ in $\frac{0}{0}$ über. Macht man aber den Zähler dieses Bruches rational, so erhält man auch:

$$y = \frac{-(x - 1)}{(x^2 - 1)[3 + \sqrt{(x + 8)}]},$$

in welcher Form man sogleich den gemeinschaftlichen Factor $(x - 1)$ entdeckt, welches gerade jener Factor ist, der für $x = 1$ verschwindet und y in der ursprünglichen Form auf $\frac{0}{0}$ bringt; kürzt man durch diesen ab, so wird

endlich

$$y = \frac{-1}{(x+1)[3+\sqrt{(x+8)}]}.$$

Setzt man nun hier $x = 1$, so nimmt y keineswegs mehr die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, sondern man erhält den gesuchten und wahren Werth $y = -\frac{1}{12}$.

Ist also allgemein $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ die gebrochene Function, und haben Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $(x-a)$ zu irgend einer Potenz erhoben, ist nämlich $f(x) = P(x-a)^m$ und $\varphi(x) = Q(x-a)^n$, wobei die Gröfsen P und Q, welche im Allgemeinen gewisse Functionen von x seyn werden, den Factor $x-a$ nicht weiter enthalten sollen; so wird

$$1)\quad y = \frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$$

offenbar für den besondern Werth von $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ erhalten. Der wahre Werth von y ist indefs für diesen Werth von $x = a$: 0, $\frac{P}{Q}$ oder ∞, je nachdem $m > n$, $m = n$, oder $m < n$ ist; denn man hat in diesen drei Fällen beziehungsweise:

$$y = \frac{P(x-a)^{m-n}}{Q},\quad y = \frac{P}{Q}\quad \text{und}\quad y = \frac{P}{Q(x-a)^{n-m}};$$

woraus das Gesagte sogleich erhellet.

Aus dieser Darstellung 1) folgt aber offenbar, dafs man sich zur Wegschaffung des gemeinschaftlichen Factors $x-a$, welcher für $x = a$ sowohl den Zähler, als auch den Nenner Null macht, und der nur sehr selten geradezu in die Augen fällt, mit Vortheil der Differentialrechnung bedienen könne. Denn sind m und n ganze positive Zahlen, so wird für $m > n$, nachdem sowohl der Zähler als auch der Nenner der gebrochenen Function n Mal differentiirt worden ist, der genannte Factor $x-a$ im Nenner verschwunden, im Zähler aber noch in der $m-n^{\text{ten}}$ Potenz vorhanden seyn; ist $m = n$, so wird nach dieser n maligen Differentiation der erwähnte Factor $x-a$ im Zähler und Nenner gleichzeitig herausgefallen seyn; ist aber end-

lich $m < n$ und differentiirt man sowohl den Zähler als auch den Nenner des Bruches m Mal, so wird dieser Factor $x - a$ im Zähler verschwunden, im Nenner hingegen noch in der $n - m^{ten}$ Potenz vorhanden seyn. Setzt man daher nach vollendeter Differentiation wieder $x = a$, so hat man, wie es seyn soll, in diesen drei Fällen beziehungsweise: $y = 0$, $\frac{P}{Q}$ und ∞.

Es ist endlich auch leicht einzusehen, dafs man, wenn von den Exponenten m und n einer oder beide gebrochen sind, also der Null machende Factor $x - a$ entweder im Zähler oder Nenner, oder endlich in beiden zugleich irrational ist, seinen Zweck auf diese Art nicht erreichen, und diesen irrationalen Factor so nicht wegbringen kann.

§. 31.

Um das Verfahren, zur Bestimmung des wahren Werthes von $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, wenn y die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, noch auf eine andere Art abzuleiten, sey $x = a$ jener Werth, für welchen Zähler und Nenner dieses Bruches verschwindet, d. i. $f(x) = 0$ und auch $\varphi(x) = 0$ wird. Läfst man in beiden Functionen x um die willkürliche Gröfse h zunehmen, so erhält man, wenn $f(x+h)$ und $\varphi(x+h)$ nach der *Taylor*'schen Formel (§. 8.) entwickelt werden:

$$\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} = \frac{f(x) + \frac{d\,f(x)}{dx}h + \frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots}{\varphi(x) + \frac{d.\varphi(x)}{dx}h + \frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots}$$

und wenn man jetzt $x = a$ setzt und gleich, da sowohl $f\binom{x}{a}$ als auch $\varphi\binom{x}{a} = 0$ wird, durch h abkürzt:

$$m) \quad \frac{f\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}+h\right)}{\varphi\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}+h\right)} = \frac{\frac{d\,f(x)}{dx} + \frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h}{2} + \ldots}{\frac{d.\varphi(x)}{dx} + \frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}\frac{h}{2} + \ldots};$$

setzt man endlich die Hilfsgröfse $h = 0$, so erhält man,

wenn auch noch durch dx abgekürzt wird:

$$\frac{f\binom{x}{a}}{\varphi\binom{x}{a}} = \frac{0}{0} = \frac{d.f(x)}{d.\varphi(x)}:$$

d. h. man findet den wahren Werth des Bruches $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$, für welchen Werth der Variablen dieser Bruch in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, indem man das Differential des Zählers durch das Differential des Nenners theilt und in diesem Quotienten $x = a$ setzt.

Werden aber auch $d.f\binom{x}{a} = 0$ und $d.\varphi\binom{x}{a} = 0$, so daſs man abermals $\frac{0}{0}$ erhält; so gibt die vorige Entwicklung m), wenn man gleich durch $\frac{h}{2}$ abkürzt:

$$\frac{f\binom{x+h}{a}}{\varphi\binom{x+h}{a}} = \frac{\frac{d^2.f\binom{x}{a}}{dx^2} + \frac{d^3.f\binom{x}{a}}{dx^3}\frac{h}{3} + \ldots}{\frac{d^2.\varphi\binom{x}{a}}{dx^2} + \frac{d^3.\varphi\binom{x}{a}}{dx^3}\frac{h}{3} + \ldots}$$

und wenn man wieder $h = 0$ setzt und durch dx^2 abkürzt:

$$\frac{f\binom{x}{a}}{\varphi\binom{x}{a}} = \frac{0}{0} = \frac{d^2.f\binom{x}{a}}{d^2.\varphi\binom{x}{a}}:$$

man muſs also in diesem Falle das zweite Differential des Zählers durch das zweite Differential des Nenners der gebrochenen Function dividiren und im erzeugten Quotienten $x = a$ setzen.

Und allgemein, verschwinden für $x = a$ die ersten $n - 1$ Differentialcoefficienten des Zählers sowohl als des Nenners der gebrochenen Function; so hat man endlich:

$$\alpha)\quad \frac{f\binom{x}{a}}{\varphi\binom{x}{a}} = \frac{0}{0} = \frac{d^n.f\binom{x}{a}}{d^n.\varphi\binom{x}{a}}.$$

§. 32.

Beispiele.

1. Nehmen wir wieder das im §. 30. angeführte Beispiel, nämlich die gebrochene Function $y = \frac{x^3 - a^3}{x - a}$, welche für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht; so erhalten wir nach der im vorigen Paragraphe entwickelten Regel:

$$y = \frac{3x^2 dx}{dx} = 3x^2, \text{ also für } x = a: y = 3a^2,$$

als gesuchten Werth; wie oben.

2. Es wurde ferner die Function $y = \frac{3 - \sqrt{(x+8)}}{x^2 - 1}$ angeführt, welche die besagte Form $\frac{0}{0}$ für $x = 1$ erhält. Nach der obigen Regel ist aber

$$y = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{(x+8)}}}{2x},$$

und $x = 1$ gesetzt, gibt, wie es seyn soll,

$$y = \frac{-\frac{1}{6}}{2} = -\frac{1}{12}.$$

3. Um die Function $y = \frac{sin. x}{x}$ für $x = 0$, für welchen Werth diese die Form $\frac{0}{0}$ erhält, zu bestimmen, hat man nach der obigen Regel:

$$y = \frac{cos. x\, dx}{dx} = cos. x, \text{ also für } x = 0: y = cos. 0 = 1.$$

Wir haben in der That schon im I. Bd., §. 142. (Anmerk.), auf einem ganz andern Wege gefunden, daſs bei einer unendlichen Abnahme von x, der Quotient $\frac{sin. x}{x}$ sich unendlich der Einheit nähert, also 1 die Grenze desselben sey.

4. Um die Function $y = \frac{a^x - b^x}{l(1+x)}$ für $x = 0$, bei welchem Werth sie die Form $\frac{0}{0}$ erhält, zu bestimmen, hat man, wenn dx sogleich im Zähler und Nenner weggelassen wird:

$$y = \frac{a^x la - b^x lb}{\frac{1}{1+x}}, \text{ also für } x = 0: y = \frac{la - lb}{1} = l\left(\frac{a}{b}\right).$$

5. Es sey die gebrochene Function

$$y = \frac{1 - sin.\, x + cos.\, x}{sin.\, x + cos.\, x - 1}$$

für den Werth von $x = 90^0$ zu bestimmen. Man hat für diesen Werth: $y = \frac{1 - 1 + 0}{1 + 0 - 1} = \frac{0}{0}$; folglich auch nach obiger Regel:

$$y = \frac{-cos.\, x - sin.\, x}{cos.\, x - sin.\, x}, \text{ und für } x = 90^0: y = \frac{-1}{-1} = 1.$$

6. Es soll die Function $y = \frac{x^3 - 3x - 2}{2x^2 - x - 3}$ für $x = -1$, bei welchem Werth diese in $\frac{0}{0}$ übergeht, bestimmt werden. Man erhält, nachdem Zähler und Nenner differentiirt worden:

$$y = \frac{3x^2 - 3}{4x - 1}, \text{ und daraus für } x = -1: y = \frac{+3 - 3}{-4 - 1} = 0,$$

als gesuchten Werth.

7. Die gebrochene Function

$$y = \frac{8 - 8x + 4x^2 - x^3}{(x - 2)^2}$$

wird für $x = 2$, $\frac{0}{0}$; man hat also, um y für diesen Werth von x zu bestimmen, nach der Regel:

$$y = \frac{-8 + 8x - 3x^2}{2(x - 2)},$$

und wenn man $x = 2$ setzt: $y = \frac{-4}{0} = -\infty$.

8. Es sey endlich noch

$$y = \frac{x^3 - a^2 x + 2a^3 - 2ax\sqrt{(2ax - x^2)}}{x^2 - 3ax + a^2 + a\sqrt{(2ax - a^2)}}$$

und der Werth für y zu bestimmen, wenn $x = a$ ist.

Da man für $x = a$, $y = \frac{0}{0}$ erhält; so ist auch, nachdem Zähler und Nenner differentiirt worden:

$$y = \frac{3x^2 - a^2 - \frac{6a^2 x - 4ax^2}{\sqrt{(2ax - x^2)}}}{2x - 3a + \frac{a^2}{\sqrt{(2ax - a^2)}}};$$

setzt man hier $x = a$, so erhält man abermals $y = \frac{0}{0}$.

Wird daher im letzten Bruch wieder der Zähler und Nenner differentiirt, so erhält man ferner:

$$y = \frac{6x - \frac{6a^2 - 8ax}{\sqrt{(2ax - x^2)}} + \frac{(a-x)(6a^2x - 4ax^2)}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}}{2 - \frac{a^3}{(2ax - a^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

und daraus für $x = a$:

$$y = \frac{6a + 2a}{2 - 1} = 8a$$

als den gesuchten Werth von y, für $x = a$.

§. 33.

Da wir uns (§. 31.) zur Ableitung der Regel oder des Verfahrens die wahen Werthe der unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Brüche zu bestimmen, der *Taylor*'schen Formel bedient haben; so ist klar, daſs dieses Verfahren überall dort nicht zum Ziele führen wird, wo sich (§. 11.) die *Taylor*'sche Reihe nicht anwenden läſst. Ist z. B.

$$y = \frac{\sqrt{(x-a)}}{\sqrt[3]{(x^2 - a^2)}}$$

gegeben, welcher Bruch für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht; so erhält man, man mag den Zähler und Nenner dieses Bruches auch noch so oft differentiiren, für $x = a$ immer wieder $y = \frac{0}{0}$. Hier tritt aber auch in der That einer der in §. 11. angeführten Fälle ein, in welchen $f(x)$ und auch $\varphi(x)$ nicht in eine Reihe nach ganzen positiven Exponenten der Zunahme h entwickelt werden kann (was doch bei Ableitung der obigen Regel in §. 31. stillschweigend vorausgesetzt wurde), indem für den besondern Werth von $x = a$ der Wurzelausdruck, und zwar sowohl in $f(x)$ im Zähler, als auch in $\varphi(x)$ im Nenner verschwindet. Uebrigens stimmt das hier Gesagte auch vollkommen damit überein, was wir am Schlusse des §. 30. angeführt; indem wir hier offenbar jenen Fall vor uns haben, in welchem der Null machende Factor $x - a$ irrational ist.

In einem solchen Falle aber wird man auf die Bequem-

lichkeit, welche die Differentialrechnung gewährt, wieder verzichten und sich dafür der allgemeinen Methode, die immer anwendbar ist, bedienen. Diese besteht darin, dafs man, wenn für $x = a$, $y = \frac{o}{o}$ wird, in der gebrochenen Function $x = a + h$ setzt, den Bruch so weit als möglich reducirt und abkürzt, und dann wieder $h = o$ nimmt; dadurch erhält man offenbar jenen Werth von y, welcher der gebrochenen Function für $x = a$ zukommt.

So erhält man in dem vorhin angeführten Beispiel, wenn man $x = a + h$ setzt:

$$y = \frac{\sqrt{(a + h - a)}}{\sqrt[3]{[(a + h)^2 - a^2]}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt[3]{(2\,ah + h^2)}} = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{(2\,a + h)}}$$

und wenn man jetzt, nachdem möglichst reducirt worden ist, $h = o$ setzt; so wird $y = o$, welches sofort der gesuchte Werth der gegebenen Function für $x = a$ ist*).

Anmerk. Es kann, besonders wenn man bei Anwendung der im §. 31. aufgestellten Regel, Zähler und Nenner mehreremale differentiiren mufs, in manchen Fällen diese hier erwähnte allgemeine Regel, selbst wenn sich auch die erstere anwenden liefse, vortheilhafter und bequemer seyn.

Nimmt man als Beispiel hiezu die im siebenten Beispiele des vorigen Paragraphes gegebene Function, die für $x = a$ in $\frac{o}{o}$ übergeht, und setzt darin $x = a + h$; so erhält man

*) In so einfachen Fällen, wie der eben behandelte, kann man auch folgendes Verfahren, welches die Differentialrechnung nicht ausschliefst, anwenden.

Bringt man die Wurzelgröfsen auf gleiche Benennung, so hat man für das obige Beispiel auch:

$$y = \sqrt[6]{\left[\frac{(x - a)^3}{(x^2 - a^2)^2}\right]}.$$

Da nun der Bruch unterm Wurzelzeichen für $x = a$, $\frac{o}{o}$ wird; so kann man zuerst diesen Bruch nach der frühern Regel für diesen Werth von x bestimmen und dann daraus die sechste Wurzel ausziehen. Man erhält aber nach einer zweimaligen Differentiation des Zählers und Nenners des genannten Bruches:

$$\frac{3 \cdot 2\,(x - a)}{4\,(3\,x^2 - a^2)}$$

welcher für $x = a$ Null wird; da also auch $\sqrt[6]{o} = o$ ist, so folgt, wie vorhin, dafs für $x = a$, $y = o$ ist.

nach einer ganz einfachen Reduction:

$$y = \frac{2a^3 + 2a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2a(a+h)\sqrt{(a^2-h^2)}}{-a^2 - ah + h^2 + a\sqrt{(a^2+2ah)}};$$

oder wegen

$$\sqrt{(a^2-h^2)} = a - \tfrac{1}{2}a^{-1}h^2 - \tfrac{1}{8}a^{-3}h^4 - \ldots$$

und $\sqrt{(a^2+2ah)} = a + h - \frac{1}{2}a^{-1}h^2 + \frac{1}{2}a^{-2}h^3 + \ldots$

auch, wenn man wieder gehörig reducirt und abkürzt:

$$y = \frac{4ah^2 + 2h^3 + \frac{1}{4}a^{-1}h^4 + \ldots}{\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}a^{-1}h^3 + \ldots} = \frac{8a + 4h + \frac{1}{2}a^{-1}h^2 + \ldots}{1 + a^{-1}h + \ldots}$$

so, dafs wenn man jetzt $h = o$ setzt, sofort wie oben $y = 8a$ folgt.

§. 34.

Die gebrochenen Functionen nehmen auch öfters für einen bestimmten Werth der Variablen die gleichfalls unbestimmt scheinende Form $\frac{\infty}{\infty}$ an; diese läfst sich aber immer auf die vorige Form $\frac{o}{o}$ zurückführen, so, dafs man auch in solchen Fällen wieder die Werthe dieser Functionen auf den vorigen Wegen bestimmen kann.

Wird nämlich in $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, für $x = a$, sowohl $f(x)$, als auch $\varphi(x)$ Unendlich, wodurch also y die Form $\frac{\infty}{\infty}$ erhält; so kann man auch schreiben:

$$y = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

so, dafs jetzt für $x = a$ ebenfalls $y = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{o}{o}$ folgt, welcher unbestimmt scheinende Werth sofort wieder nach den Regeln der vorigen Paragraphe bestimmt werden kann.

Beispiel.

Es soll der Werth der Function

$$y = \frac{sec.\, x}{tang.\, x}$$

für $x = 90^0$ bestimmt werden. Man erhält offenbar für die-

sen Werth von x: $y = \frac{\infty}{\infty}$; setzt man aber, da $sec. x = \frac{1}{cos. x}$ und $tang. x = \frac{1}{cot. x}$ ist,

$$y = \frac{\frac{1}{cos. x}}{\frac{1}{cot. x}} = \frac{cot. x}{cos. x};$$

so bekommt y für $x = 90^0$ die Form $\frac{0}{0}$. Um diesen Werth zu bestimmen, hat man (nach §. 31.):

$$y = \frac{-\frac{1}{sin.^2 x}}{-sin. x} = \frac{1}{sin.^3 x},$$

und wenn man $x = 90^0$ setzt:

$$y = \frac{1}{1} = 1$$

als wahren Werth der obigen, unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheinenden Bruchfunction.

§. 35.

Manchmal erhält das Product zweier Functionen, wie $y = f(x) . \varphi(x)$, für einen gewissen Werth der Variablen x den unbestimmt scheinenden Werth $0 . \infty$; dieser Fall tritt ein, wenn z. B. für $x = a$: $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = \infty$ wird.

In diesem Falle setze man $y = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$, oder, wenn $\frac{1}{\varphi(x)} = \varphi'(x)$ ist, $y = \frac{f(x)}{\varphi'(x)}$; so erhält y unter dieser Form offenbar für $x = a$ die Gestalt $\frac{0}{0}$, welchen Werth man aber wieder nach den vorigen Paragraphen bestimmen kann.

Beispiel.

Es sey $y = (a - x) sec. \left(\frac{x}{a} . \frac{\pi}{2}\right)$, und es soll der Werth von y für $x = a$ gefunden werden. Hier erhält man unmittelbar für diesen Werth von x: $y = 0\ sec. 90^0 = 0 . \infty$; setzt man aber, da $sec. \alpha = \frac{1}{cos. \alpha}$ ist:

$$y = \frac{a - x}{\cos.\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\right)},$$

so wird jetzt für $x = a$: $y = \frac{0}{0}$. Um diesen Werth zu bestimmen, hat man nach der Regel des §. 31.:

$$y = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2a}\sin.\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2a}} = \frac{2a}{\pi}$$

(wenn man nämlich noch $x = a$ setzt) als den gesuchten Werth des unter der Form $0 . \infty$ erscheinenden Productes *).

§. 36.

Erhält endlich die Function $y = f(x) - \varphi(x)$ für einen gewissen Werth der Variablen, z. B. für $x = a$, die unbestimmte Form $\infty - \infty$; so setze man, wenn $\frac{1}{f(x)} = f'(x)$ und $\frac{1}{\varphi(x)} = \varphi'(x)$ ist:

$$y = \frac{1}{f'(x)} - \frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{\varphi'(x) - f'(x)}{f'(x)\,\varphi'(x)}.$$

*) Läfst sich die Function $\varphi(x)$ nicht leicht auf die Form $\frac{1}{\varphi'(x)}$ bringen, so mufs man die Bestimmung des Productes $0 . \infty$ auf einem andern Weg versuchen. Um z. B. $y = x l x$ für $x = 0$, bei welchem Werth $y = -0 . \infty$ wird, zu bestimmen, setze man $l x = z$; so wird $x = e^z$ und $y = z e^z$, welches Product für $z = -\infty$ zu bestimmen ist (denn aus $e^z = x$ folgt für $x = 0$: $z l e = z = l 0 = -\infty$).

Es wird aber (mit Hilfe der Reihe in §. 128.) für $z = -\infty$: $y = 0$; folglich ist auch das obige Product $x l x$ Null für $x = 0$. Es ist also auch $0^0 = 1$; denn man hat $x l x = l x^x$, also für $x = 0$: $l 0^0 = 0 = l 1$, daher $0^0 = 1$.

Hieraus folgt auch unmittelbar, dafs der Quotient $\frac{l x}{x}$ für $x = \infty$, wofür er die Form $\frac{\infty}{\infty}$ erhält, verschwindet; denn setzt man $x = \frac{1}{y}$, so wird $\frac{l x}{x} = \frac{-l y}{\frac{1}{y}} = -y l y$, welches Product jetzt für $y = 0$ zu bestimmen ist. Da nun bei diesem Werth das Product $y l y$ verschwindet; so ist auch für $x = \infty$: $\frac{l x}{x} = 0$; ein Beweis, dafs das Unendliche von $l\infty$ von einer niederen Ordnung als das einfache ∞ ist. (Vergl. die Note zum Beispiel 6. im §. 140., Bd. I.)

Dadurch erhält nun gleichfalls, da für $x = a$, $f(x)$ und $\varphi(x)$ Unendlich, also $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ Null werden, die Function y die Form $\frac{0}{0}$, deren wahrer Werth sich sofort wieder wie oben bestimmen läſst.

Beispiel.

Es sey $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{lx}$ für den Werth von $x = 1$ zu bestimmen.

Da hier für diesen Werth von x, $y = \infty - \infty$ wird; so bringe man y auf die Form [hier ist $f'(x) = x - 1$ und $\varphi'(x) = lx$]

$$y = \frac{lx - (x-1)}{(x-1)\,lx}$$ (d. i. auf einerlei Nenner),

wodurch nun y für $x = 1$ die Form $\frac{0}{0}$ erhält. Diesen Werth zu bestimmen, hat man (§. 31.)

$$y = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x} + lx},$$ wobei noch $x = 1$ zu nehmen ist;

dafür wird aber abermals $y = \frac{0}{0}$. Man hat also weiters:

$$y = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

(wenn man nämlich wieder $x = 1$ setzt), als den gesuchten Werth der obigen, in der Form $\infty - \infty$ erscheinenden Differenz.

II. Bestimmung der gröſsten und kleinsten Werthe der Functionen.

A) Für Functionen *einer* Variablen.

§. 37.

Erklärung.

Ist $y = f(x)$ irgend eine Function von x, ferner $f(x+h) = y'$ und $f(x-h) = y''$, wo h jeden beliebigen auch noch so kleinen Werth annehmen kann; so sagt man, die Function y werde für den Werth von $x = a$ ein Maximum oder ein Minimum, wenn für diesen Werth von $x = a$ die benachbarten Werthe von $y = f\binom{x}{a}$ [nämlich der unmittelbar vorhergehende und unmittelbar nachfolgende Werth von y *)], d. i. $y'' = f\binom{x-h}{a}$ und $y' = f\binom{x+h}{a}$, im ersten Falle zu gleicher Zeit kleiner, und im zweiten Falle gleichzeitig gröſser als y ausfallen; es ist nämlich, man mag sich auch unter h eine noch so kleine Gröſse vorstellen, y für $x = a$ ein Gröſstes oder ein Maximum, wenn $y = f\binom{x}{a} > y' = f\binom{x+h}{a}$ und zugleich auch $y = f\binom{x}{a} > y'' = f\binom{x-h}{a}$, dagegen ein Kleinstes oder ein Minimum, wenn $y < y'$ und zugleich auch $y < y''$ Statt findet.

Ist z. B. $y = b^2 - (a-x)^2$, so ist unter den unzähligen Werthen, welche diese Function y, je nach den verschiedenen Werthen von x, erhalten kann, jener für $x = a$ am gröſsten; denn es ist dafür $y = b^2$, während, wenn man $x = a + h$ und $= a - h$ setzt, die benachbarten Werthe

*) Daſs diese Werthe keine bestimmten seyn können, und daſs man sich diese so nahe an jenem $y = f\binom{x}{a}$ denken kann als man nur immer will, springt von selbst in die Augen; es ist deſshalb auch h eine ganz unbestimmte Gröſse.

$y' = b^2 - h^2$ und $y'' = b^2 - h^2$ beide kleiner ausfallen, man mag der unbestimmten Gröſse h auch noch so kleine Werthe beilegen.

Dagegen erhält die Function $y = b^2 + (a - x)^2$ für $x = a$ ihren kleinsten Werth, weil für $x = a$, $y = b^2$ wird, während die Nachbarwerthe $y' = y'' = b^2 + h^2$ beide gröſser ausfallen.

Die Function $y = ax$ endlich hat weder einen gröſsten noch einen kleinsten Werth, weil y mit x ohne Ende zunimmt, wenn x positiv, und ohne Ende abnimmt, wenn x negativ ist (und im Negativen, nachdem y durch Null gegangen, unendlich wächst) *); während das Charakteristische eines gröſsten oder kleinsten Werthes von y darin besteht, daſs bei einer successiven Zunahme (oder auch Abnahme) der Variablen x: y im ersten Falle eine Zeitlang zu- und dann wieder abnimmt, im zweiten Falle aber eine Zeitlang ab- und dann wieder zunimmt; dabei sind jene Werthe von x, für welche die Zunahme von y in eine Abnahme und umgekehrt übergeht, eben jene, für welche y ein Maximum oder Minimum wird.

Aus dem Gesagten folgt endlich von selbst, daſs y, je nach der Beschaffenheit dieser Function, mehrere Maxima oder Minima (oder auch beides zugleich) haben könne, und daſs man daher unter diesen relativen gröſsten und kleinsten Werthen wieder das absolute Maximum oder Minimum unterscheiden kann. Ist z. B. $y = f(x)$ die Glei-
Fig. 1. chung der krummen Linie $MBDEQ$ (Fig. 1), wobei AX die Abscissenaxe und A den Anfang der rechtwinkeligen Coordinaten bezeichnet; so erhält die Ordinate y offenbar unter den positiven in den Puncten B und D, nämlich für $x = Ab$ und $x = Ad$ gröſste, im Puncte C aber für

*) Im algebraischen Sinne nämlich sind negative Gröſsen in Bezug auf positive um so kleiner, je gröſser ihr arithmetischer Werth ist; so ist z. B. $-10 < -4$. Man wird also eine Gröſse, welche unter den negativen ein Maximum ist, in Bezug auf positive Gröſsen ein Minimum nennen müssen, und umgekehrt; es kommt dabei nur darauf an, daſs man sich gehörig verstehe.

$x = Ac$ einen kleinsten Werth; unter den negativen Ordinaten ferner erreicht y in den Puncten E und G, für welche nämlich $x = Ae$ und $x = Ag$ ist, gröſste, und in F für $x = Af$ einen kleinsten Werth. Bezieht man aber alles auf die positiven, über der Abscissenaxe AX liegenden Ordinaten; so ist offenbar Ff ein gröſster, während Ee und Gg kleinste Werthe der Ordinate y bilden, so, daſs diese Function $y = f(x)$ sofort drei Maxima und drei Minima zuläſst (oder die krumme Linie drei gröſste und drei kleinste Werthe der Ordinate y besitzt), von denen $y = Bb$ für $x = Ab$ das absolute Maximum, und $y = Gg$ für $x = Ag$ das absolute Minimum bildet.

§. 38.

Um nun eine bequeme Methode aufzufinden, nach welcher man untersuchen kann, ob die Function $y = f(x)$ gröſste oder kleinste Werthe besitzt, und für welche Werthe der Variablen x dieses Statt findet, sey $x = a$ ein solcher Werth der Variablen, für welchen, wenn es möglich ist, y ein Maximum oder Minimum wird, so, daſs $y' = f\left(\underset{a}{x} + h\right)$ und $y'' = f\left(\underset{a}{x} - h\right)$ sofort die benachbarten Werthe dieses gröſsten oder kleinsten Werthes $y = f\left(\underset{a}{x}\right)$ sind. Dieſs vorausgesetzt, folgt nach der *Taylor*'schen Formel:

$$y' = f\left(\underset{a}{x} + h\right) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

und

$$y'' = f\left(\underset{a}{x} - h\right) = y - \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{2} - \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots;$$

oder man hat auch:

$$1)\; y' - y = + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

$$\text{und }\; 2)\; y'' - y = - \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{2} - \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots,$$

wobei sowohl in y als auch in den verschiedenen Differen-

tialcoefficienten (nach verrichteter Differentiation) $x = a$ zu setzen ist.

Nach der Erklärung des vorhergehenden Paragraphes müssen nun, selbst für die kleinsten Werthe von h, die beiden Differenzen 1) und 2) zu gleicher Zeit negativ oder zu gleicher Zeit positiv seyn, je nachdem für den Werth von $x = a$, y ein Maximum oder Minimum wird. Da man aber (Bd. I., §. 22., Note) h immer so klein nehmen kann, dafs in jeder der beiden Reihen 1) und 2) das erste Glied gröfser als die Summe aller folgenden wird; so hängen offenbar bei diesen kleinsten Werthen von h die Zeichen der genannten Differenzen 1) und 2) blofs von jenen dieser ersten Glieder ab. Da nun diese Zeichen verschieden sind, indem das erste Glied der erstern Reihe, je nachdem $\frac{dy}{dx}$ positiv oder negativ ausfällt, positiv oder negativ, das erste Glied der zweiten Reihe aber dabei negativ oder positiv ist; so kann die Function y, wenn der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ einen bestimmten, von Null verschiedenen Werth erhält, weder ein Maximum noch ein Minimum bei diesem Werth von x haben. Verschwindet dagegen für $x = a$ dieser erste Quotient $\frac{dy}{dx}$, so ist es möglich, dafs y für $x = a$ einen gröfsten oder kleinsten Werth erhält; was sofort die weitere Untersuchung zeigen mufs.

Wird nämlich für $x = a$, $\frac{dy}{dx} = 0$; so gehen die vorigen Differenzen nun in folgende über:

$$y' - y = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

$$\text{und} \quad y'' - y = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \ldots,$$

deren Zeichen (bei den kleinsten Werthen von h) wieder von jenen der betreffenden ersten Glieder, die jetzt nicht verschieden sind, abhängen. Fällt daher für den genannten Werth von $x = a$ der zweite Differentialquotient negativ aus, so sind beide Differenzen ebenfalls negativ,

demnach $y > y'$ und auch $y > y''$; folglich y ein Maximum. Wird hingegen dieser Quotient positiv, so sind auch diese Differenzen gleichzeitig positiv, und daher $y < y'$ und auch $y < y''$; folglich y für diesen Werth von $x = a$ ein Minimum.

Sollte aber für $x = a$ auch $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ werden, so würden die vorigen Differenzen seyn:

$$y' - y = + \frac{d^3 y}{d x^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

$$\text{und} \quad y'' - y = - \frac{d^3 y}{d x^3} \frac{h^3}{2.3} + \ldots;$$

woraus leicht zu sehen ist, dafs in Bezug auf den dritten Differentialquotienten $\frac{d^3 y}{d x^3}$, der Verschiedenheit der Zeichen in den ersten Gliedern wegen, genau das gilt, was wir vom ersten Quotienten erinnert haben: dafs nämlich die Function y für $x = a$ weder einen gröfsten noch kleinsten Werth haben könne, wenn nicht auch (nachdem die ersten Quotienten schon verschwunden sind) für diesen Werth von $x = a$, $\frac{d^3 y}{d x^3} = 0$ wird. Findet dieses aber Statt, so wird y ein Maximum oder Minimum seyn, je nachdem der vierte Quotient $\frac{d^4 y}{d x^4}$ für $x = a$ (wie es beim zweiten der Fall war) negativ oder positiv ausfällt.

Aus diesen leicht fortzusetzenden Schlüssen folgt nun allgemein, dafs die Function y weder einen gröfsten noch kleinsten Werth für $x = a$ erhält, wenn bei diesem Werthe eine gerade Anzahl der ersten aufeinander folgenden Quotienten $\frac{d y}{d x}, \frac{d^2 y}{d x^2}, \ldots \frac{d^{2n} y}{d x^{2n}}$ verschwindet, und daher der erste nicht Null werdende Quotient $\frac{d^{2n+1} y}{d x^{2n+1}}$ von einer ungeraden Ordnung ist; dafs hingegen, wenn für $x = a$ die Quotienten $\frac{d y}{d x}, \frac{d^2 y}{d x^2}, \ldots \frac{d^{2n-1} y}{d x^{2n-1}}$ in ungerader Zahl verschwinden, also der erste nicht Null werdende

Quotient $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ von gerader Ordnung ist, die Function y für $x = a$ ein Maximum oder Minimum wird, je nachdem für diesen Werth von x der Quotient $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ negativ oder positiv ausfällt.

§. 39.

Die Methode also, um zu untersuchen, ob die Function $y = f(x)$ für irgend einen Werth der veränderlichen Gröſse x ein Maximum oder Minimum wird, besteht darin, daſs man aus der gegebenen Gleichung $y = f(x)$ den ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ ableitet, diesen gleich Null setzt, und aus der Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ die Werthe von x bestimmt. Enthält diese Gleichung in sich einen Widerspruch, so, daſs man daraus für x Nichts findet, so ist dieſs (mit Berücksichtigung jedoch der folgenden Anmerk.) ein Zeichen, daſs die gegebene Function y für gar keinen Werth der Variablen x einen gröſsten oder kleinsten Werth erreichen kann. Findet man dagegen aus der genannten Bedingungsgleichung für x einen oder mehrere Werthe, so setzt man diese der Reihe nach in den [ebenfalls aus $y = f(x)$ abgeleiteten] zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, und sieht auf das Zeichen, welches dieser Quotient dadurch erhält; für jene Werthe von x nämlich, für welche derselbe negativ ausfällt, wird y ein Maximum, und für jene Werthe, für welche dieser Quotient positiv wird, ein Minimum. Sollte jedoch dieser zweite Quotient für den einen oder den andern (aus der Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ gefundenen) Werth von x gleich Null werden, so müſste man hinsichtlich dieser Werthe auf die folgenden oder höhern Differentialquotienten übergehen, wobei dann von jedem ungeraden das, was wir vom ersten, und von jedem geraden Quotienten das gilt, was wir vom zweiten Differentialquotienten angeführt haben.

Anmerk. Da es auch möglich ist, dafs sich für den bestimmten Werth von $x = a$ die Nachbarwerthe

$$y' = f\binom{x+h}{a} \quad \text{und} \quad y'' = f\binom{x-h}{a}$$

nicht, wie hier bei der Anwendung der *Taylor*'schen Formel vorausgesetzt wurde, in Reihen nach ganzen positiven Exponenten von h entwickeln lassen (§ 11.), das oben geführte Raisonnement aber nichts desto weniger dasselbe und richtig bleibt, wenn auch die Exponenten α, β, . . . gebrochen sind und

$$y' = y + Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + \ldots$$
$$y'' = y + P(-h)^{\alpha} + Q(-h)^{\beta} + \ldots$$

seyn sollte, in welchem Falle aber (§. 11.) die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, . . . Unendlich werden; so mufs man der Vollständigkeit wegen (obschon dieser Fall äufserst selten eintritt) dort, wo man aus der erwähnten Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ keinen Werth für x findet, auch $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. i. $\frac{dx}{dy} = 0$ setzen, und versuchen, ob sich vielleicht hieraus Werthe für x ergeben, die in $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum erzeugen. Hat man aber aus dieser letztern Bedingungsgleichung $x = b$ gefunden, so wird man zur Beurtheilung, ob dafür y ein Maximum oder Minimum werde (da hier die Differentialquotienten keine Anwendung finden), in die Function $y = f(x)$ unmittelbar $x = b + h$ und $x = b - h$ setzen und sehen, ob die Nachbarwerthe

$$y' = f\binom{x+h}{b} \quad \text{und} \quad y'' = f\binom{x-h}{b}$$

zu gleicher Zeit gröfser oder kleiner als $y = f\binom{x}{b}$ ausfallen, woraus man beziehungsweise auf ein Minimum oder Maximum von $y = f\binom{x}{b}$ schliefsen kann.

§. 40.

Beispiele.

1. Es soll untersucht werden, für welchen Werth von x die Function $y = 12x - 3x^2$ einen gröfsten oder kleinsten Werth erhält.

Aus der gegebenen Function erhält man $\frac{dy}{dx} = 12 - 6x$,

Staatliche Bibliothek Bamberg

und wenn man diesen Quotienten der entwickelten Regel gemäfs gleich Null setzt: $12 - 6x = 0$, aus welcher Bedingungsgleichung sofort $x = 2$ folgt.

Es ist ferner der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2} = -6$ unabhängig von x (also gewifs auch für $x = 2$) negativ, folglich wird die gegebene Function für $x = 2$ ein Maximum, und zwar ist dieser gröfste Werth: $y = 24 - 12 = 12$. Es folgt in der That für $x = 2 \pm h$:

$$y = 24 \pm 12h - 12 \mp 12h - 3h^2 = 12 - 3h^2,$$

so, dafs, man mag auch h noch so klein nehmen, die Nachbarwerthe von $y = 12$ beide kleiner ausfallen.

2. Es sey $y = x^2 + 4x + 2$ und zu untersuchen, ob y für irgend einen Werth von x ein Maximum oder Minimum wird.

Hier ist $\frac{dy}{dx} = 2x + 4$, also mufs für ein Maximum oder Minimum $2x + 4 = 0$, d. i. $x = -2$ seyn. Um ferner zu sehen, welches von beiden hier Statt findet (es ist nämlich nur erst möglich, dafs für $x = -2$, y ein Maximum oder Minimum wird), hat man $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$, und da dieser zweite Quotient für jeden Werth von x, also auch für den vorhin gefundenen $x = -2$, positiv ist; so wird die gegebene Function für $x = -2$ ein Kleinstes. Dieser kleinste Werth ist $y = 4 - 8 + 2 = -2$; und in der That, für $x = -2 \pm h$ folgt $y = -2 + h^2$, so, dafs auch für die kleinsten Werthe von h die benachbarten Werthe (der unmittelbar vorausgehende und nachfolgende) von $y = -2$ gröfser ausfallen.

3. Die Werthe für x zu finden, für welche

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Man hat hier

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

und $\frac{d^2y}{dx^2} = 4(3x^2 - 12x + 11)$;

der erste Quotient, diesen gleich Null gesetzt, gibt

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

aus welcher Gleichung man sofort die Wurzeln $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$ erhält.

Es wird aber für $x = 1$: $\frac{d^2y}{dx^2} = 4(14 - 12)$ positiv, für $x = 2$: $\frac{d^2y}{dx^2} = 4(23 - 24)$ negativ, und für $x = 3$: $\frac{d^2y}{dx^2} = 4(38 - 36)$ positiv; also wird die gegebene Function y für $x = 1$ und $x = 3$ ein Minimum, und für $x = 2$ ein Maximum.

Man hat beziehungsweise für diese drei Werthe von $x = 1$, 2 und 3: $y = +3$, $+4$ und $+3$, so, daſs die beiden Minima einander gleich werden.

4. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function $y = 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 4$ ein Maximum oder Minimum wird.

Es ist für diese Function:

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4 - 20x^3 - 30x^2$$

und $$\frac{d^2y}{dx^2} = 10(4x^3 - 6x^2 - 6x).$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ gesetzt, gibt die Bedingungsgleichung:

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0,$$

oder die Werthe: $x = 0$ (2 Mal), $x = -1$ und $x = 3$. Nun wird der zweite Differentialquotient für $x = -1$ negativ, für $x = 3$ positiv und für $x = 0$ Null. In Betreff dieses letztern Werthes muſs man also zuerst noch auf den dritten Differentialquotienten übergehen, und da dieser oder $\frac{d^3y}{dx^3} = 10(12x^2 - 12x - 6)$ für $x = 0$ nicht Null wird oder verschwindet; so hat die gegebene Function y für diesen Werth von $x = 0$ weder ein Maximum noch ein Minimum; dagegen wird y für $x = -1$ ein Gröſstes ($y = 7$) und für $x = 3$ ein Kleinstes ($y = -185$).

5. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function $y = \frac{x}{1+x^2}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3}.$$

Aus der Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt $1 - x^2 = 0$, also $x = \pm 1$; es wird aber für $x = +1$: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{8}$ negativ, und für $x = -1$: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{8}$ positiv; also ist für $x = +1$: $y = \frac{1}{2}$ ein Gröfstes, und für $x = -1$: $y = -\frac{1}{2}$ ein Kleinstes.

Anmerk. Da offenbar die Function $y = \frac{1}{X}$ ein Maximum oder Minimum wird, je nachdem X ein Minimum oder Maximum ist; so kann man bei solchen Functionen oft bequemer die gröfsten und kleinsten Werthe von X aufsuchen und dann auf die Function y selbst schliefsen. So ist in diesem letztern Beispiele $X = x + \frac{1}{x}$, und dafür $\frac{dX}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$, $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$; aus $1 - \frac{1}{x^2} = 0$ folgt $x = \pm 1$, und mit diesen Werthen wird $\frac{d^2X}{dx^2} = \pm 2$, so, dafs X für $x = +1$ ein Minimum, und für $x = -1$ ein Maximum, also, wie zuvor, y für den erstern Werth ein Gröfstes, und für den letztern Werth ein Kleinstes wird.

6. Für den Ausdruck

$$y = 3x^4 - 28ax^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48a^4$$

hat man:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 84ax^2 + 168a^2x - 96a^3$$

und $$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(3x^2 - 14ax + 14a^2).$$

Wird der erste Quotient gleich Null gesetzt, so erhält man die Gleichung:

$$x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3 = 0,$$

deren Wurzeln sofort sind:

$$x = a,\quad x = 2a \quad \text{und} \quad x = 4a.$$

Da nun der zweite Differentialquotient für $x = a$ positiv ($= 36a^2$), für $x = 2a$ negativ ($= -24a^2$), und für $x = 4a$ wieder positiv ($= 72a^2$) ausfällt; so ist die gegebene Function für $x = a$: $y = 11a^4$ ein Kleinstes, für $x = 2a$: $y = 16a^4$ ein Gröſstes, und für $x = 4a$: $y = -16a^4$ ein Kleinstes. Unter diesen beiden relativen Minimis ist $y = -16a^4$ (in Bezug auf die positiven Werthe von y nämlich) das absolute Minimum.

7. Um den Werth von x zu finden, für welchen die Function

$$y = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + (a_3 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2$$

ein Kleinstes wird, hat man:

$$\frac{dy}{dx} = -2\left[(a_1 - x) + (a_2 - x) + \ldots + (a_n - x)\right] = 0,$$

und daraus:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n};$$

welcher Werth die gegebene Function y offenbar auf ein Minimum bringt, da der zweite Differentialquotient $= 2n$ positiv ist *).

*) Hat man also z. B. durch n gleich gute (astronomische oder physikalische) Beobachtungen, statt der wahren und gesuchten Gröſse x, der Reihe nach die fehlerhaften $a_1, a_2, \ldots a_n$ gefunden; so muſs man daraus das arithmetische Mittel nehmen, wenn zufolge der vom berühmten *Gauſs* erfundenen, und von ihm schon seit dem Jahre 1795 angewendeten Methode der kleinsten Quadratsummen (*Theoria motus corporum coelestium etc. Hamburgi* 1809, I. V., 4. §.), die Summe der Quadrate der Fehler: $a_1 - x, a_2 - x, \ldots a_n - x$ ein Kleinstes, und sofort der aus diesen Beobachtungen für x gefundene Werth der richtigste oder der Wahrheit am nächsten kommende seyn soll.

Legendre zeigte nämlich (*Mém de l'Inst.*, 1810., *II.*), daſs das längst bekannte und übliche Verfahren, in solchen Fällen das arithmetische Mittel zu nehmen, eine der einfachsten Anwendungen des von *Gauſs* aufgefundenen Princips der kleinsten Quadrate sey.

Das Nähere über diese für Beobachtungen aller Art äusserst wichtigen Methode, findet man auſser den bereits erwähnten Werken, ferner der im I Bd., S. 434 angeführten

8. Es sollen die Werthe von x gefunden werden, für welche $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$ ein Gröfstes oder Kleinstes wird.

Es ist für die gegebene Function:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x^2 - 40}{(x^2 + 5x + 4)^2} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{20(-x^3 + 12x + 20)}{(x^2 + 5x + 4)^3}.$$

Aus der Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt $x^2 - 4 = 0$, und daraus $x = \pm 2$; da ferner der zweite Differentialquotient für $x = +2$ positiv und für $x = -2$ negativ ausfällt, so ist für $x = +2$: $y = -\frac{1}{9}$ ein Minimum, und für $x = -2$: $y = -9$ ein Maximum. (Im Negativen bildet dieser Werth, wie man sich leicht überzeugt, ein Minimum.)

Anmerk. Da für solche Bruchfunctionen der zweite Differentialquotient meistens schon etwas complicirt ausfällt, so kann man die auf diesem Quotienten beruhenden Untersuchungen durch folgende Betrachtung vereinfachen.

Ist $y = \frac{X}{X'}$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{X'\frac{dX}{dx} - X\frac{dX'}{dx}}{X'^2}$; so gibt die Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$:

$$X'\frac{dX}{dx} = X\frac{dX'}{dx} \quad \ldots (1$$

Ferner ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{X'\left(X'\frac{d^2X}{dx^2} - X\frac{d^2X'}{dx^2}\right) - 2\frac{dX'}{dx}\left(X'\frac{dX}{dx} - X\frac{dX'}{dx}\right)}{X'^3}$$

oder mit Berücksichtigung der vorigen Gleichung (1, wodurch das zweite Glied im Zähler wegfällt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{X'\frac{d^2X}{dx^2} - X\frac{d^2X'}{dx^2}}{X'^2};$$

Théorie etc. des *Laplace* und der *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*, in den *Commentationes Soc. Reg. Scient. Gott. T. V.*, *ad anno* 1819 — 22, auch in der gehalt- und lehrreichen Abhandlung von *Paucker*: Ueber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsummen auf physikalische Beobachtungen. Mietau 1819., 4.

es ist demnach (für reelle Werthe von X') der zweite Differentialquotient positiv oder negativ, je nachdem es die Differenz $X'\frac{d^2X}{dx^2} - X\frac{d^2X'}{dx^2}$ ist, so, daſs also hier die Bestimmung des Zeichens des zweiten Differentialquotienten von jener dieser weit einfacheren Differenz abhängt.

So ist für das letzte Beispiel:

$$X = x^2 - 5x + 4 \quad \text{und} \quad X' = x^2 + 5x + 4,$$

demnach

$$\frac{dX}{dx} = 2x - 5, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 2, \quad \frac{dX'}{dx} = 2x + 5, \quad \frac{d^2X'}{dx^2} = 2;$$

folglich

$$X'\frac{d^2X}{dx^2} = 2x^2 + 10x + 8, \quad X\frac{d^2X'}{dx^2} = 2x^2 - 10x + 8;$$

und daher die genannte Differenz $= 20x$, welche sofort übereinstimmend mit dem Zeichen des obigen zweiten Quotienten für $x = +2$ positiv, und für $x = -2$ negativ wird.

9. Für $y = \frac{log.\,x}{x^n}$ wird $\frac{dy}{dx} = \frac{Mx^{n-1} - nx^{n-1}\,log.\,x}{x^{2n}}$,

wo M den Modul des betreffenden Logarithmensystems bezeichnet, folglich wenn man diesen Quotienten Null setzt:

$$M - n\,log.\,x = 0, \quad \text{und daraus} \quad log.\,x = \frac{M}{n}.$$

Es ist ferner (zufolge der vorigen Anmerkung)

$$X'\frac{d^2X}{dx^2} = -Mx^{n-2} \quad \text{und} \quad X\frac{d^2X'}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}\,log.\,x,$$

also die erwähnte Differenz

$$= x^{n-2}[-M - n(n-1)\,log.\,x]$$
$$= x^{n-2}\left(-M - n(n-1)\frac{M}{n}\right) = -nMx^{n-1},$$

wenn man nämlich für $log\ x$ den gefundenen Werth substituirt; folglich ist die gegebene Function y für jenen Werth von x, für welchen $log.\,x = \frac{M}{n}$ wird, ein Maximum.

Zusatz. Für den speciellen Fall von $n = 1$ und $M = 1$ wird also $y = \frac{lx}{x}$ für $x = e$ (wo $e = 2{\cdot}718\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist) ein Gröſstes.

10. Es sey $y = A(x-a)^n$ und n eine ganze positive Zahl, gröſser als die Einheit. Um jene Werthe von x zu finden, für welche y ein Maximum oder Minimum wird, hat man, wenn der erste Differentialquotient gleich Null gesetzt wird:

$$\frac{dy}{dx} = An(x-a)^{n-1} = 0,$$

und daraus: $x = a$.

Es ist aber leicht zu sehen, daſs für diesen Werth von x auch alle folgenden Differentialquotienten bis einschlüssig zu jenem der $(n-1)^{\text{sten}}$ Ordnung verschwinden, und daſs also (§. 38.) die Function y weder ein Maximum noch Minimum zuläſst, wenn n ungerad ist; dagegen für ein gerades n einen gröſsten oder kleinsten Werth haben wird, je nachdem A negativ oder positiv ist *).

11. Für die Function $y = \sin. x \cos. x$ jene Werthe von x anzugeben, für welche diese ein Maximum oder Minimum wird.

Hier ist

$$\frac{dy}{dx} = \cos.^2 x - \sin.^2 x \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -4 \sin. x \cos. x;$$

*) Dieses Beispiel führt unmittelbar auf den Gebrauch der Differentialrechnung zur Auffindung der gleichen Wurzeln einer gegebenen höhern Gleichung. Ist z. B. in der Gleichung $X = 0$ die Wurzel $x = a$ n Mal enthalten; so kann man setzen: $X = X'(x-a)^n$. Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{dX}{dx} = nX'(x-a)^{n-1} + (x-a)^n \frac{dX'}{dx},$$

so, daſs also dieser erste Differentialquotient die Wurzel $x = a$ noch $n-1$ Mal enthält; eben so findet man, daſs diese Wurzel im zweiten Differentialquotienten noch $n-2$ Mal, im dritten Quotienten $n-3$ Mal u. s. w. enthalten ist, dergestalt, daſs man also für $x = a$ hat:

$$X = 0, \quad \frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0, \ldots \frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}} = 0$$

(man vergl. damit §. 39., Bd. I.). Es folgt also auch in Uebereinstimmung mit §. 39., Bd. I. hieraus wieder, daſs die Methode zur Auffindung der gleichen Wurzeln $x = a$ in der Bestimmung des gröſsten gemeinschaftl. Divisors $(x-a)^{n-1}$ zwischen dem Polynom X und dem daraus abgeleiteten $\frac{dX}{dx} = X_1$ besteht.

wird der erste Quotient gleich Null gesetzt, so entsteht $cos.^2 x - sin.^2 x = 0$, und daraus

$$sin. x = cos. x \text{ oder } sin. x = \sqrt{(1 - sin.^2 x)},$$

d. i. $2 sin.^2 x = 1$, oder endlich $sin. x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$, so, dafs $x = 45^0$ und $x = 180 + 45 = 225^0$ jene Werthe sind, für welche y ein Gröfstes oder Kleinstes seyn kann (allgemein wird $x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ und $x = m\pi + \frac{\pi}{4}$, wo n und m beliebige ganze Zahlen bezeichnen). Geht man defshalb auf den zweiten Quotienten über, so wird dieser für beide Werthe negativ, also die gegebene Function y für beide Werthe ein Maximum.

12. Für $y = sin.^2 x \cos x$ hat man

$$\frac{dy}{dx} = 2 sin. x \, cos.^2 x - sin.^3 x,$$

und wenn dieser Quotient gleich Null gesetzt wird, aus der entstehenden Gleichung:

$$sin. x (2 - 3 sin.^2 x) = 0,$$

so, dafs entweder $sin. x = 0$ oder $2 - 3 sin.^2 x = 0$, d. i. $sin. x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ wird; für diese Werthe folgt aber $x = 2n\pi$ oder $= n\pi$, und wegen $log. sin. x = \frac{1}{2} log. \frac{2}{3} = \cdot 9119543 - 1$ (für den Halbmesser 1 nämlich) auch $x = 54^0, 44', 8''\cdot 1$.

Der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = cos. x (2 - 9 \, sin.^2 x)$$

wird für die erstern Werthe von x, d. i. für 0, 360, . . . positiv, für jene 180, 3.180, . . . negativ, und endlich für jenen von $54^0, 44', 8''\cdot 1$ wieder negativ, so, dafs also für die erstern $y = 0$ ein Minimum, für die folgenden $y = 0$ ein Maximum, und endlich für den letzten Werth $y = \cdot 3849$ abermals ein Maximum ist.

Anmerk. Hier kann es sonderbar scheinen, dafs $y = 0$ sowohl ein gröfster als auch zugleich ein kleinster Werth ist; indefs überzeugt man sich von der Richtigkeit dieser Bestimmung leicht, wenn man auf die Nachbarwerthe Rücksicht nimmt.

13. Es sollen die Werthe von x gefunden werden, für

welche $y = a + \sqrt[3]{(x-b)^2}$ ein Gröſstes oder Kleinstes wird.

Es ist für dieses Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-b)}{3\sqrt[3]{(x-b)^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-b)}},$$

und wenn man diesen Quotienten gleich Null setzt, so folgt $2 = 0$, was absurd ist; zum Beweis, daſs dieser erste Differentialquotient für gar keinen Werth von x verschwinden kann. Bevor wir aber daraus auf das Nichtvorhandenseyn eines gröſsten oder kleinsten Werthes von y schliessen dürfen, müssen wir in Gemäſsheit der im §. 39. (in der Anmerkung) gemachten Bemerkung diesen Quotienten auch gleich Unendlich, d. i. $\frac{dx}{dy} = 0$ setzen, und nachsehen, ob sich nicht vielleicht aus dieser Gleichung Werthe für x ergeben. Diese letztere Gleichung gibt aber $3\sqrt[3]{(x-b)} = 0$, woraus sofort $x = b$ folgt, für welchen Werth in der That die gegebene Function ein Minimum, und zwar $= a$ wird; denn man hat für $x = b \pm h$:

$$y = a + \sqrt[3]{(\pm h)^2} = a + \sqrt[3]{h^2},$$

so, daſs also die (selbst für die kleinsten Werthe von h entstehenden) Nachbarwerthe beide gröſser ausfallen.

14. Für $y = ax$ wird $\frac{dy}{dx} = a$, und da dieser Quotient für keinen Werth von x (von welcher Gröſse er unabhängig ist) Null oder Unendlich werden kann; so kann auch y für keinen Werth von x ein Maximum oder Minimum werden.

14. Es sey endlich noch die Gleichung gegeben:

$$y^2 + bx^2 - 2ay + ax - b = 0,$$

in welcher y die Function von x ist; es sollen jene Werthe von x angegeben werden, für welche y ein Gröſstes oder Kleinstes wird.

Ohne diese Function erst zu entwickeln, hat man (§. 26.):

$$2y\,dy + 2bx\,dx - 2a\,dy + a\,dx = 0,$$

und daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a + 2bx}{2(a-y)};$$

also auch, wenn man noch ein Mal differentiirt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2b(a-y) + (a+2bx)\frac{dy}{dx}}{2(a-y)^2}.$$

Der erste Quotient liefert, wenn er Null gesetzt wird, die Gleichung $a + 2bx = 0$, aus welcher $x = -\frac{a}{2b}$ folgt, und mit diesem Werth wird der zweite Quotient

$$\left(\text{wegen } \frac{dy}{dx} = 0\right) = \frac{2b(a-y)}{2(a-y)^2} = -\frac{b}{y-a}.$$

Da nun $y - a$ zwei Werthe, einen positiven und einen negativen, hat [es folgt nämlich aus der gegebenen Gleichung: $y - a = \pm \sqrt{\{a^2 - (bx^2 + ax - b)\}}$], so wird dieser zweite Quotient für den erstern Werth negativ, und für den letztern positiv, so, daſs also y für $x = -\frac{a}{2b}$ im erstern Falle ein Gröſstes, und im letztern ein Kleinstes wird. Dasselbe Resultat muſs man offenbar auch aus der entwickelten Function $y = a \pm \sqrt{[a^2 - (bx^2 + ax - b)]}$ erhalten.

§. 41.

Aufgaben.

Wir wollen endlich zur Uebung der in ihrer Anwendung so wichtigen und fruchtbaren Lehre des Maximums und Minimums noch folgende Aufgaben auflösen.

1. Eine Zahl a in zwei Theile so zu theilen, daſs die m^{te} Potenz des einen, mit der n^{ten} Potenz des andern Theils multiplicirt, das gröſstmögliche Product gibt.

Auflösung.

Es sey x der eine, also $a - x$ der andere Theil; so ist, wenn man das Product, welches ein Maximum werden soll (also offenbar veränderlich seyn muſs), durch y bezeichnet,

der Bedingung gemäſs: $y = x^m (a - x)^n$, so, daſs also wieder y die Function von x ist.

Für diese Function hat man nach der obigen Regel:

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1} (a - x)^n - n x^m (a - x)^{n-1} = 0$$

oder $$x^{m-1} (a - x)^{n-1} [ma - (m + n) x] = 0;$$

und es folgt aus dieser Bedingungsgleichung, wenn man jeden der drei Factoren Null setzt:

$$x = 0, \quad x = a \quad \text{und} \quad x = \frac{ma}{m + n}.$$

Da ferner der zweite Quotient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^{m-2} (a - x)^{n-2} [m(m - 1)(a - x)^2$$
$$- 2mnx(a - x) + n(n - 1) x^2]$$

für $x = 0$ und $x = a$ Null, für $x = \frac{ma}{m + n}$ aber

$$= - \frac{m^{m-1} n^{n-1} a^{m+n-2}}{(m + n)^{m+n-3}},$$

also negativ wird; so ist y oder das obige Product für diesen Werth von x ein Gröſstes. Die beiden erstern Werthe entsprechen jeder einem Minimum, wenn beziehungsweise m und n gerad sind, wovon man sich leicht durch die folgenden Differentialquotienten, noch einfacher aber dadurch überzeugt, daſs man in $y = x^m (a - x)^n$ ein Mal $x = 0 \pm h$, und das zweite Mal $x = a \pm h$ setzt und die Nachbarwerthe berücksichtiget.

Ist m oder n ungerad, so gibt im ersten Falle $x = 0$ und im zweiten $x = a$ weder ein Maximum noch Minimum.

Zusatz. Für den besondern Fall von $m = n = 1$ wird also das Product $y = x(a - x)$ bloſs für den Werth von $x = \frac{a}{2}$ ein Gröſstes, nämlich $= \frac{a^2}{4}$.

Fig. 2. 2. In einer gegebenen Geraden MN (Fig. 2) einen Punct C von der Beschaffenheit zu finden, daſs wenn er mit zwei andern auſserhalb der MN liegenden und der Lage nach gegebenen Puncten A und B verbunden wird, die Summe der Verbindungslinien $AC + BC$ ein Minimum werde.

Auflösung.

Man fälle aus A und B auf MN die Perpendikel AD, BE, und setze $AD = b$, $BE = c$, $DE = a$ und $DC = x$; so wird $AC = \sqrt{(b^2 + x^2)}$ und $BC = \sqrt{[c^2 + (a-x)^2]}$, folglich die Summe: $y = \sqrt{(b^2 + x^2)} + \sqrt{[c^2 + (a-x)^2]}$.

Da nun y ein Minimum werden soll, so hat man nach der obigen Regel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{AC} - \frac{a-x}{BC} = 0, \text{ und daraus } \frac{DC}{AC} = \frac{CE}{BC};$$

woraus sofort hervorgeht, dafs die Dreiecke ADC und BCE ähnlich, also die Winkel bei C einander gleich seyn müssen.

Da ferner die Summe $AC + BC$ offenbar bis ins Unendliche zunehmen kann, also keines Maximums fähig ist; so folgt, dafs die Summe der Verbindungslinien CA, CB unter dieser Bedingung, wenn erstere nämlich mit der Geraden MN gleiche Winkel bilden, in der That ein Minimum sey; was auch der zweite Differentialquotient zeigt *).

*) Mit Hilfe der analytischen Geometrie läfst sich die Auflösung dieser Aufgabe (die im Grunde die nämliche bleibt) folgender Gestalt einkleiden:

Es seyen für MN als Abscissenaxe und einen beliebigen Punct derselben als Ursprung, die rechtwinkeligen Coordinaten der drei Puncte A, B und C beziehungsweise: x', y', x'', y'' und $x\,(y = 0)$; so hat man für die Distanzen des Punctes C von A und B respective [Bd. II., §. 11., (1]

$$d = \sqrt{[(x-x')^2 + y'^2]} \quad \text{und} \quad d' = \sqrt{[(x-x'')^2 + y''^2]};$$

folglich wird die genannte Summe:

$$y = \sqrt{[(x-x')^2 + y'^2]} + \sqrt{[(x-x'')^2 + y''^2]},$$

und daraus ist wieder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-x'}{d} + \frac{x-x''}{d'} = 0 \quad \text{oder} \quad cos.\,ACD = cos.\,BCE,$$

mithin auch, wie oben: W. ACD = W. BCE.

Da das Licht, wenn es von A ausgeht und mittelst des ebenen Spiegels MN nach B zurückgeworfen wird, in der That dem Gesetze gehorcht, dafs der einfallende Strahl AC und der zurückgeworfene CB mit MN gleiche Winkel bilden; so folgt, dafs das Licht auf dem kürzesten Weg, der bei dieser Reflexion möglich ist, von A nach B gelangt. Aus diesem Grunde hat umgekehrt *Maupertui* (geb. zu St. Malo 1698; gest. zu Basel 1759) aus seinem Satze der kleinsten Wirkung oder der gröfsten Sparsamkeit, nach

Verlängert man also AD und macht $DF = DA$, verbindet F mit B; so wird durch diese Verbindungslinie auf der gegebenen Geraden MN, wie leicht zu sehen, der gesuchte Punct C abgeschnitten.

Fig. 3. Zusatz. Ist statt der Geraden MN ein Kreis $DCEC'$ (Fig. 3), dessen Mittelpunct in O ist, gegeben, und soll in dem Umfange desselben jener Punct C gefunden werden, welcher mit den beiden gegebenen Puncten A, B verbunden, die Summe der Verbindungslinien $AC + BC$ zu einem Gröfsten oder Kleinsten macht; so findet man eben so (wovon wir die weitere Ausführung absichtlich dem eigenen Fleifse des Studirenden überlassen), dafs die genannte Summe $AC + BC$ für jenen Punct C des gegen die Gerade AB concaven Theils des Kreises ein Maximum wird, wenn der an C gezogene Halbmesser OC den Winkel ACB der beiden Geraden AC und BC halbirt *); dafs hingegen (wenn die Verbindungslinie AB aufserhalb des Kreises liegt) diese Summe $AC' + BC'$ für je-

welchem jede zu irgend einer Naturveränderung nöthige Wirkung die kleinst mögliche ist, oder bei allen Naturwirkungen der geringste Aufwand an Kraft und Mitteln Statt findet (so wie er diesen überhaupt auf viele andere Untersuchungen anwendet), auch auf die Gesetze der Brechung und Zurückwerfung des Lichtes geschlossen.

Auch *Leibnitz* leitete die Gesetze der Zurückstrahlung und Strahlenbrechung aus der Annahme her, dafs das Licht von einem Punct zu einem andern auf dem leichtesten Wege gehe. Man mufs aber darunter nicht immer den kürzesten Weg verstehen, weil dieser in der That auch, je nach der Form des Spiegels, ein Maximum seyn kann (jedoch aber nur eines von beiden, so, dafs überhaupt auch hierin wieder, wie es der Weisheit und Vollkommenheit des Schöpfers angemessen ist, die gröfste Ordnung herrscht).

Fermat (s. Bd. I., S. 412) nahm schon vor *Leibnitz* an, dafs das Licht bei dem genannten Uebergang von einem Punct zu einem andern die kürzeste Zeit brauche.

*) Gelangt demnach ein aus A fahrender Lichtstahl AC mittelst Reflexion des Hohlspiegels DCE, wobei in der That

$$W. ACO = W. OCB$$

Statt findet, nach B; so ist der Weg, den das Licht hier nimmt, ein Maximum, und also nicht (wie man vielleicht vermuthen möchte) der kürzeste. (Man vergleiche das in der vorhergehenden Note hierüber Gesagte.)

nen Punct C' des gegen die Gerade AB convexen Theils des Kreises ein Minimum ist, wenn der an C' gezogene und verlängerte Halbmesser $OC'F$ den Winkel $AC'B$ halbirt.

3. Zwei Lichter, von denen das eine n Mal so stark leuchtet als das andere, stehen in einer gegebenen Entfernung von einander; es soll in ihrer Verbindungslinie jener zwischen ihnen liegende Punct bestimmt werden, in welchem die *schwächste* Beleuchtung Statt findet; vorausgesetzt, dafs die Beleuchtung eines Körpers gerade der Intensität und umgekehrt dem Quadrat der Entfernung des Lichtes proportional ist.

Auflösung.

Bezeichnet man die Intensitäten beider Lichter durch 1 und n, ihre Entfernung von einander durch 1, den Abstand des gesuchten Punctes vom stärkern Lichte durch x, und endlich die Gröfse der in diesem Puncte Statt findenden Beleuchtung mit y; so hat man $y = \frac{n}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$, und da y ein Minimum werden soll:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2n}{x^3} + \frac{2}{(1-x)^3} = 0,$$

und aus dieser Gleichung: $x = \frac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}$; für welchen Werth auch in der That der zweite Quotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6n}{x^4} + \frac{6}{(1-x)^4}$$

positiv ausfällt, so, dafs also für diesen Werth von x, $y = (1+\sqrt[3]{n})^3$ wirklich ein Minimum wird.

Zusatz. Für $n = 1$ oder gleiche Lichter, wird $x = \frac{1}{2}$ und $y = 8$. Für $n = 2$, oder wenn das eine Licht doppelt so stark als das andere leuchtet, wird $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}} = \cdot 55751$, und die Stärke der in diesem Puncte Statt findenden Beleuchtung wird ausgedrückt durch $y = 11 \cdot 541$.

4. Es sind zwei auf einander senkrechte Fig. 4. Geraden AM, AN (Fig. 4), und in der erstern zwei Puncte B und C gegeben; man soll in der zweiten Geraden AN jenen Punct O finden, in welchem die beiden Verbindungslinien BO und CO den *größten Winkel* einschließen.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AC = b$, $AO = x$, W. $AOB = v$ und W. $AOC = w$; so ist für den Halbmesser 1:

$$tang.\, v = \frac{a}{x},\quad tang.\, w = \frac{b}{x}$$

und

$$tang.\, BOC = tang.\,(w - v) = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = \frac{(b-a)\,x}{ab + x^2}.$$

Setzt man der Kürze wegen $tang.\, BOC = y$ und berücksichtiget, daß der Winkel BOC ein Maximum oder Minimum wird, wenn die Tangente oder y ein Größtes oder Kleinstes ist; so hat man

$$y = \frac{(b-a)\,x}{ab + x^2} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(b-a)(ab - x^2)}{(ab + x^2)^2}.$$

Wird dieser Quotient Null gesetzt, so erhält man

$$ab - x^2 = 0, \quad \text{und daraus} \quad x = \sqrt{(ab)}.$$

Da man ferner für den zweiten Quotienten findet:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\,(b-a)(3\,ab - x^2)\,x}{(ab + x^2)^3},$$

welcher für den gefundenen Werth von x offenbar negativ ausfällt; so ist in der That der Winkel BOC in jenem Puncte O der Geraden AN, für welchen $AO = \sqrt{(ab)}$ ist, ein Maximum.

Wir haben hier indeß einen jener häufig eintretenden Fälle vor uns, in welchen man, ohne den zweiten Differentialquotienten, der auch oft ziemlich verwickelt wird, zu Rathe zu ziehen, aus der Natur des Gegenstandes schon

entscheiden kann, ob ein Maximum oder Minimum möglich ist, und welches von beiden bloſs Statt finden kann.

Berücksichtigt man nämlich im gegenwärtigen Falle, daſs der Winkel BOC sowohl für $x = 0$, oder in A, als auch für $x = \infty$ Null wird; so folgt von selbst, daſs es zwischen A und einem unbestimmt oder unendlich weit liegenden Punct der Geraden AN einen Punct O geben müsse, in welchem der genannte Winkel BOC ein Gröſstes wird; weil dieser zu beiden Seiten gegen A und N hin bis auf Null abnehmen kann.

Was die geometrische Bestimmung des gesuchten Punctes O betrifft, so darf man nur über $AC = b$ als Durchmesser, einen Halbkreis beschreiben, in B das Perpendikel BD errichten, und endlich aus A mit dem Halbmesser AD [Bd. II, §. 3., 4., β)] die Gerade AN in O durchschneiden. Berücksichtiget man, daſs wegen $x = \pm \sqrt{(ab)}$, x auch einen eben so groſsen negativen Werth hat, also ein zweiter Punct O' in der Verlängerung von NA unterhalb A mit dem erstern symmetrisch liegt; so darf man nur die verlängerte Gerade NA mit dem genannten Halbmesser AD aus A in O und O' ober- und unterhalb durchschneiden. (Dieser negative Werth muſs natürlich [m. s. die Note auf S. 94.] als Minimum erscheinen und den zweiten Differentialquotienten positiv machen.)

Anmerk. Stellt z. B. BC die Breite eines Gartens oder Feldes, und AN die Lage eines Thurmes vor; so muſs sich das Auge eines Zuschauers in O oder in der Höhe AO befinden, wenn letzterem diese Breite am gröſsten erscheinen soll.

5. Innerhalb des rechten Winkels CAB (Fig. 5) ist ein Punct O gegeben; man soll durch diesen die kürzeste Gerade BOC ziehen, welche von beiden Schenkeln begrenzt wird. Fig. 5.

Auflösung.

Man fälle aus O auf AB und AC die Lothe OD, OE und setze $AD = a$, $AE = b$ und $DB = x$; so ist vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke ODB und OEC:

$$x : b = a : CE, \text{ also } CE = \frac{ab}{x}.$$

Ferner ist

$$OB = \sqrt{(b^2 + x^2)},\ OC = \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2 b^2}{x^2}\right)}$$

und daher, wegen

$$BC = BO + OC \ [\text{oder } BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)}]$$

wenn man $BC = y$ setzt:

$$y = \sqrt{(b^2 + x^2)} + \frac{a}{x}\sqrt{(b^2 + x^2)} = \frac{a+x}{x}\sqrt{(b^2 + x^2)}.$$

Da nun y ein Minimum werden soll, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}\sqrt{(b^2 + x^2)} + \frac{a+x}{\sqrt{(b^2 + x^2)}} = 0,$$

nämlich $(a + x) x^2 - a(b^2 + x^2) = 0$ oder $x^3 - ab^2 = 0$,

und daraus $x = \sqrt[3]{(ab^2)}$.

Da die durch O gehende Gerade BOC, je nachdem sie sich immer mehr der parallelen Lage mit AB oder AC nähert, bis ins Unendliche wachsen kann; so ist hier offenbar immer ein Minimum möglich, was auch der zweite Differentialquotient, der für den gefundenen Werth von $x = \sqrt[3]{(ab^2)}$ positiv ausfällt, anzeigt.

Anmerk. 1. Es war $CE = \frac{ab}{x}$, folglich ist wegen $x = \sqrt[3]{(ab^2)}$:

$$CE = \frac{ab}{\sqrt[3]{(ab^2)}} = \sqrt[3]{(a^2 b)};$$

es sind demnach (Bd. II., §. 157.) DB und EC die zwei mittlern geometrischen Proportionallinien zwischen $AD = a$ und $AE = b$.

Anmerk. 2. Bringt man oben in y den Bruch $\frac{a+x}{x}$ unters Wurzelzeichen und schreibt

$$y = \sqrt{\left[\frac{(a+x)^2 (b^2 + x^2)}{x^2}\right]};\ \text{so wird } \frac{dy}{dx} = \frac{(a+x)(x^3 - ab^2)}{x^3 y}.$$

Setzt man also diesen Quotienten gleich Null, so hat man nebst dem vorigen Werth von $x^3 - ab^2 = 0$ auch noch $a + x = 0$, woraus $x = -a$ folgt; welchem Werth offenbar die Gerade OA entspricht. Dieser Werth von x liefert zwar auch ein Minimum, aber nicht, wie gewöhnlich angenommen wird,

in dem ursprünglichen Winkel CAB, weil die Gerade BOC nicht von dem Puncte O und den beiden Schenkeln, sondern blofs von den beiden Schenkeln AB, AC begrenzt werden soll (ein anderes wäre es, wenn der kürzeste Weg von O aus an beide Schenkel verlangt worden wäre), sondern in Bezug auf die beiden Winkel BAC' und $B''AC$; weil, wenn die Gerade OC' nach und nach in die Lage OC'', oder umgekehrt diese in jene übergeht, die Gerade $B'C'$ abnimmt, in A Null wird und dann wieder zunimmt; was auch umgekehrt von der Geraden $B''C''$ gilt, wenn sie in jene $B'C'$ übergeht.

6. In ein gegebenes Dreieck das gröfste Rechteck einzuschreiben.

Auflösung.

Es sey ABC (Fig. 6) das gegebene Dreieck und $GHFE$ das gesuchte Rechteck; aus C fälle man auf AB das Perpendikel CD und setze $AD = a$, $DB = b$, $CD = h$ (wodurch sofort das Dreieck bestimmt wird) und die noch unbekannte Höhe des Rechteckes (die man hier offenbar als veränderlich ansehen mufs) $DI = x$; so folgt, wie leicht zu sehen, aus den ähnlichen Dreiecken CDA und CIG, dann CDB und CIH: Fig. 6.

$$h : a = h - x : GI = \frac{a(h-x)}{h},$$

$$\text{und} \quad h : b = h - x : IH = \frac{b(h-x)}{h}.$$

Es ist daher die Grundlinie des Rechteckes

$$EF = GH = GI + IH = \frac{(a+b)(h-x)}{h}$$

und folglich die Fläche desselben:

$$y = \frac{(a+b)}{h}(hx - x^2).$$

Da nun y ein Maximum werden soll, so hat man der bekannten Regel gemäfs:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a+b}{h}(h - 2x) = 0, \text{ also } h - 2x = 0 \text{ oder } x = \tfrac{1}{2}h;$$

da ferner der zweite Quotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2(a+b)}{h}$$

negativ ist, so wird das eingeschriebene Rechteck in der That ein Gröſstes, wenn seine Höhe der halben Höhe des Dreieckes gleich ist.

Die Fläche dieses gröſsten Rechteckes ist $y = \frac{(a+b)h}{4}$ während die Fläche des Dreiecks gleich $\frac{(a+b)h}{2}$, d. i. doppelt so groſs ist.

Anmerk. Ohne Berücksichtigung des zweiten Quotienten folgt ebenfalls, daſs die Fläche des Rechteckes durch Abnahme der Höhe abnimmt, durch Null geht und im Negativen ins Unendliche zunimmt, also in Bezug auf die positive Fläche fortwährend abnimmt und sofort keines Minimums fähig ist.

7. Es soll unter allen Dreiecken, welche
Fig. 6. auf der AB (Fig. 6) als Basis von einem gegebenen Umfang construirt werden können, jenes gefunden werden, welches die gröſste Fläche besitzt.

Auflösung.

Es sey $AB = a$ die gegebene Seite und $2S$ der gegebene Umfang des Dreieckes ABC. Bezeichnet man die Fläche dieses Dreieckes mit y, und die eine der beiden übrigen Seiten mit x; so ist die andere $= 2S - a - x$, und nach der bekannten Formel die Fläche:

$$y = \sqrt{[S(S-a)(S-x)(a+x-S)]}.$$

Da aber y ein Gröſstes werden soll, so ist dafür

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S(S-a)[S-x-(a+x-S)]}{2y} = \frac{S(S-a)}{2y}(2S-a-2x) = 0$$

und aus dieser Bedingungsgleichung wird $2S - a - 2x = 0$, folglich $x = S - \frac{a}{2}$ die eine der gesuchten Seiten; demnach die andere: $2S - a - x = S - \frac{a}{2}$, so, daſs diese einander gleich sind oder das gesuchte Dreieck gleichschenkelig wird.

Da ferner der zweite Quotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{S(S-a)}{2y^2}\left[-2y - (2S - a - 2x)\frac{dy}{dx}\right]$$

für diesen gefundenen Werth von x, wegen $\frac{dy}{dx} = 0$, in $\frac{-S(S-a)}{y}$ übergeht, folglich (wenn man y positiv voraussetzt) negativ wird; so besitzt unter allen Dreiecken von einerlei Umfang, welche auf derselben Basis stehen, das gleichschenkelige die gröfste Fläche.

Anmerk. Auch hier kann man sich, ohne auf den zweiten Differentialquotienten überzugehen, überzeugen, dafs die Fläche nur ein Gröfstes und kein Kleinstes werden kann, wenn man nämlich blofs auf die positive Fläche, d. i. auf die über der AB möglichen Dreiecke Rücksicht nimmt. Bezieht man dagegen die negativen Flächen oder die Dreiecke, deren Scheiteln C unterhalb der Basis AB liegen, auf die positiven oder erstern Dreiecke; so bildet das gleichschenkelige Dreieck, welches unterhalb der AB mit dem vorigen oder gröfsten symmetrisch liegt, also unter den negativen das gröfste ist, ein Minimum; was auch oben der zweite Quotient zeigt, der jetzt positiv wird, da man y negativ nehmen mufs.

8. Innerhalb des Winkels CAB (Fig. 7) ist ein Punct O gegeben; man soll durch diesen eine Gerade BC so ziehen, dafs das abgeschnittene Dreieck ACB ein Minimum wird. Fig. 7.

Auflösung.

Man ziehe durch O die Gerade OE perpendikulär auf AC, und jene OD parallel mit AB, setze, da O in Bezug auf diesen Winkel gegeben ist, $AD = a$, $OE = b$, und um die Lage der Geraden BC zu bestimmen, $DC = x$; so ist die Fläche des Dreieckes $DOC = \frac{bx}{2}$, und vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und DOC, wenn man die Fläche des erstern Dreieckes durch y bezeichnet:

$$y : \frac{bx}{2} = (a+x)^2 : x^2, \text{ woraus } y = \frac{b(a+x)^2}{2x} \text{ wird.}$$

Da nun y ein Minimum werden soll, so hat man der Regel gemäfs:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2x^2}[2(a+x)x - (a+x)^2] = \frac{b}{2}\left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right) = 0,$$

$$\text{d. i.}\quad x^2 - a^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm a.$$

Da ferner

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{b}{2 x^4}\left[2 x^3 - 2 x (x^2 - a^2)\right] = \frac{a^2 b}{x^3}$$

wird; so ist in der That für $x = + a$, y ein Minimum und $= 2 a b$.

Für $x = - a$ scheint die Fläche y ein Maximum zu werden, was jedoch nicht seyn kann, indem erstlich für diesen Werth: $y = 0$ (also kleiner, als das Minimum) würde, und weil ferner, wie man leicht sieht, diese Fläche bis ins Unendliche zunehmen kann, wenn BC zuletzt mit AC oder AB parallel wird. Der wahre Sinn dieses Maximums ist in dem vorliegenden Falle folgender: Da die Fläche innerhalb des gegebenen Winkels CAB als positiv genommen wird, so sind die Flächen innerhalb der Winkel CAB' und BAC'' (da immer eine der Abmessungen eine negative Lage hat) wenn man nämlich BA und CA verlängert, negativ. Wird nun DC oder x negativ und z. B. $= DC'$ genommen, so schneidet die Linie OC' im ersten oder ursprünglichen Winkel keine Flächen oder Dreiecke mehr ab, sondern es wird jetzt ein solches Dreieck $B'AC'$ im W. CAB', und wenn x in dieser Richtung noch gröſser und z. B. $= DC''$ wird, ein Dreieck $AB''C''$ im W. BAC'' abgeschnitten, die aber beide in Bezug auf das erste Dreieck ABC negativ sind. Man sieht nun leicht, daſs für $x = - a = DA$ das Dreieck $C'AB' = 0$ und ein Minimum wird, weil dieses dann im W. BAC'' wieder zunimmt; dieses Minimum der negativen Fläche bildet aber (S. 94., Note) ein Maximum der positiven Fläche, wodurch das obige Ergebniſs vollkommen klar wird.

Das Zu- und Abnehmen dieser Function y oder der Dreiecksfläche ABC geschieht nämlich, wenn man die Schenkel des gegebenen Winkels CAB auch noch verlängert, auf folgende Weise: Ist die durch O gezogene Gerade mit AC parallel, so ist die Fläche Unendlich; dreht sich diese Gerade um O so, daſs AC gegen C hin geschnitten wird, so wird dabei die betreffende Dreiecksfläche fort-

während kleiner und, wenn die Gerade die (vorhin gefundene) Lage BC erhalten hat, ein Kleinstes. Von da nimmt die Fläche wieder zu, indem der Durchschnitt B immer weiter hinausrückt, und wird, wenn die Gerade mit AB parallel geworden, also in die Lage DO gekommen ist, Unendlich. Wird die Gerade noch weiter in dieser Richtung gedreht, so geht die Fläche ins Negative über, nimmt darin immer mehr ab (wächst also in Bezug auf die positive Fläche) und wird, wenn die Gerade durch A geht oder die Lage OA hat, ein Kleinstes (also in Bezug auf die ursprüngliche Fläche ein Maximum), nimmt von da im Negativen wieder zu, wird Unendlich und geht dann wieder ins Positive über *).

9. Einen senkrechten Cylinder (von kreisförmiger Basis) zu construiren, welcher bei einem gegebenen Inhalt die kleinste Oberfläche besitzt, und zwar *a*) wenn nebst der Mantelfläche beide Kreisflächen, und *b*) wenn nur die eine Kreisfläche (wie bei einem hohlen Cylinder ohne Deckel) mit zur Oberfläche gerechnet wird.

Auflösung.

a) Es sey der gegebene Inhalt des Cylinders $= a^3$, der Halbmesser der Grundfläche (der, so wie die Höhe, veränderlich angenommen werden mufs) $= x$, und die Höhe des Cylinders $= z$; so ist die Mantelfläche $= 2x\pi z$ und eine Grundfläche $= x^2\pi$, also die ganze Oberfläche:

$$y = 2\pi xz + 2\pi x^2.$$

Da aber der Inhalt des Cylinders $a^3 = x^2\pi z$, also $z = \frac{a^3}{x^2\pi}$ ist; so hat man auch:

$$y = \frac{2a^3}{x} + 2\pi x^2;$$

*) Wir haben uns hier absichtlich in eine weitläufigere Auseinandersetzung eingelassen, weil es nöthig und wichtig ist, die Begriffe in Beziehung auf diesen Gegenstand gehörig fest zu stellen.

und da y ein Minimum werden soll:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a^3}{x^2} + 4\pi x = 0,$$

$$\text{oder } 2\pi x^3 = a^3 \text{ und } x = \frac{a}{\sqrt[3]{(2\pi)}} = \frac{a\sqrt[3]{(4\pi^2)}}{2\pi};$$

$$\text{folglich auch } z = \frac{a^3}{\pi x^2} = \frac{a^3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt[3]{(4\pi^2)}}{a^2} = \frac{a\sqrt[3]{(4\pi^2)}}{\pi},$$

demnach $z = 2x$, d. i. die Höhe gleich dem Durchmesser.

Da für diesen Werth von x der zweite Differentialquotient $= \frac{4a^3}{x^3} + 4\pi$ positiv ausfällt, so hat unter den angenommenen Bedingungen, der gleichseitige Cylinder bei gegebenem Inhalt die kleinste Oberfläche*), oder was dasselbe ist, bei gegebener Oberfläche den gröfsten Inhalt. Diese kleinste Oberfläche ist:

$$y = 6\pi x^2 = 3a^2\sqrt[3]{(2\pi)}.$$

b) Für den zweiten Fall hat man $y = 2\pi xz + \pi x^2$, oder wegen $z = \frac{a^3}{\pi x^2}$ auch

$$y = \frac{2a^3}{x} + \pi x^2, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2a^3}{x^2} + 2\pi x = 0,$$

$$\text{und daraus } x = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}} = \frac{a\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi};$$

$$\text{also } z = \frac{a^3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{a^2} = \frac{a\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi}, \text{ und daher } z = x,$$

oder die Höhe gleich dem Halbmesser des Cylinders.

Da der zweite Differentialquotient für diesen Werth von x positiv ausfällt, so wird auch in diesem Falle die

*) Es findet also auch hier wieder die gröfstmögliche Regelmäfsigkeit Statt. Soll ein hohler Cylinder sammt Boden und Deckel, etwa aus Blech, angefertiget werden; so wird man diesem die gleichseitige Form geben müssen, wenn man bei einem bestimmten Inhalt die gröfste Ersparung an Materiale erzwecken will.

Oberfläche des Cylinders ein Minimum, und zwar

$$= 3\pi x^2 = 3a^2 \sqrt[3]{\pi} \text{ *)}.$$

Anmerk. Hier läfst sich wieder, ohne den zweiten Differentialquotienten zu Rathe zu ziehen, aus der Natur der Sache entscheiden, dafs nur ein Minimum und kein Maximum möglich ist. Denn da die genannte Oberfläche zwei Mal, nämlich Einmal für $x = 0$, also $z = \infty$, und das zweite Mal für $z = 0$, also $x = \infty$ Unendlich wird (also kein Maximum Statt finden kann), so mufs es nothwendig zwischen $x = 0$ und $x = \infty$ einen Werth geben, für welchen die Oberfläche ein Kleinstes wird.

Es ist übrigens, wie es sich von selbst versteht, die hier behandelte Aufgabe mit jener identisch: einen Cylinder zu construiren, welcher bei gegebener Oberfläche den gröfsten Inhalt besitzt.

10. Unter allen geraden Kegeln (von kreisförmiger Basis) denjenigen zu finden, welcher bei einer gegebenen Mantelfläche den gröfsten Inhalt hat.

Auflösung.

Es sey die gegebene Mantelfläche $= b^2$, der veränderliche Halbmesser der Grundfläche $= x$, und die Höhe des Kegels $= z$; so ist, wenn der (veränderliche) Inhalt durch y bezeichnet wird, $y = \frac{1}{3} x^2 \pi z$. Es ist aber die krumme Oberfläche oder seine Mantelfläche

$$b^2 = \pi x \sqrt{(x^2 + z^2)}, \text{ woraus } z = \frac{1}{\pi x} \sqrt{(b^4 - \pi^2 x^4)} \text{ folgt,}$$

so dafs, wenn man diesen Werth substituirt, auch

$$y = \tfrac{1}{3} x \sqrt{(b^4 - \pi^2 x^4)} = \tfrac{1}{3} \sqrt{(b^4 x^2 - \pi^2 x^6)}$$

wird. Da nun y ein Maximum werden soll, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^4 x - 3\pi^2 x^5}{3y}$$

$$\text{und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{9y^2} \left[y(b^4 - 15\pi^2 x^4) - 3 \cdot \frac{dy}{dx} \right],$$

*) Soll also der hohle Cylinder keinen Deckel erhalten, so mufs die Höhe dem Halbmesser der Grundfläche gleich genommen werden, wenn der Cylinder bei einem bestimmten Inhalt, den geringsten Aufwand an Materiale erfordern soll.

und wenn der erste Quotient Null gesetzt wird:

$$b^4 x - 3\pi^2 x^5 = 0, \text{ also } x = 0 \text{ und auch } x = \frac{b}{\sqrt{(\pi\sqrt{3})}};$$

für diesen letztern Werth wird $z = b\sqrt{\left(\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\right)} = x\sqrt{2}$

$$\text{und der Inhalt: } y = \frac{b^3}{3}\sqrt{\left(\frac{2}{3\pi\sqrt{3}}\right)},$$

welcher, da der zweite Differentialquotient, wie man sieht, negativ ausfällt, ein Maximum ist. Dieser Kegel entsteht sofort durch Umdrehung eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Grundlinie sich zur Höhe wie $x : z = 1 : \sqrt{2}$
Fig. 8. verhält; sind nämlich (Fig. 8) die beiden Catheten AB, AD im rechtwinkeligen Dreieck ABD einander gleich und $= 1$, und ist BC perpendikulär auf AB gleich $BD = \sqrt{2}$; so entsteht durch Umdrehung des Dreieckes ABC um BC jener Kegel, welcher bei einer gegebenen Mantelfläche den gröſsten Inhalt, oder bei gegebenem Inhalt die kleinste Mantelfläche besitzt. Soll diese Mantelfläche im erstern Falle, der Annahme gemäſs, $= b^2$ seyn; so muſs $AB = AD = x$ genommen werden (wodurch der Winkel an der Spitze $ACB = 35^\circ, 15', 51''{\cdot}8$ wird).

Was endlich den ersten Werth $x = 0$ betrifft, so entspricht, wie man sich leicht überzeugt (man kann zur Uebung auf die höhern Quotienten übergehen) diesem Werth weder ein Maximum noch ein Minimum von y.

11. Aus einem gegebenen geraden Kegel den gröſsten Cylinder zu schneiden.

Auflösung.

Fig. 6. Es stelle ACB (Fig. 6) einen Axenschnitt des Kegels vor, dessen Höhe $CD = h$ und Halbmesser der Basis $AD = r$ seyn soll. Setzt man die Höhe des Cylinders $DI = z$ und den Halbmesser seiner Grundfläche $DE = x$; so folgt, wenn man den Inhalt des Cylinders mit y bezeichnet, $y = x^2 \pi z$, oder wegen $h : z = r : r - x$ (aus den ähnlichen Dreiecken CDA und GEA) also $z = \frac{h(r-x)}{r}$ auch,

wenn man diesen Werth von z substituirt: $y = \frac{h\pi}{r}(rx^2 - x^3)$.

Da nun y ein Maximum werden soll, so muſs seyn:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h\pi}{r}(2rx - 3x^2) = 0,$$

und daraus folgt $x = 0$ (welcher Werth unbrauchbar ist) und auch $x = \frac{2}{3}r$, für welchen Werth der Quotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h\pi}{r}(2r - 6x)$$

negativ ausfällt, so daſs also für diesen Werth von x (für welchen $z = \frac{1}{3}h$ ist) der Cylinder $y = \frac{4r^2h\pi}{27}$, der sofort $\frac{4}{9}$ des Inhalts des gegebenen Kegels beträgt, in der That ein Maximum wird.

12. Aus einem Kreise vom Halbmesser r ein Stück ACB (Fig. 9) dergestalt auszuschneiden, daſs der Kegel, welcher den Rest $ACBD$ zur Mantelfläche bekommt, den gröſstmöglichen Inhalt erhält. Fig. 9.

Auflösung.

Es sey die Länge des Bogens ADB oder der Umfang der Basis des auf diese Weise entstehenden Kegels $= x$, so ist der Halbmesser dieser Kreisfläche oder Basis $= \frac{x}{2\pi}$; und da $AC = BC = r$ Seite des Kegels wird, so ist dessen Höhe $= \sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4r^2\pi^2 - x^2)}$. Wird demnach der Inhalt des Kegels durch y bezeichnet, so erhält man

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4r^2\pi^2 - x^2)} = \frac{1}{24\pi^2}\sqrt{(4r^2\pi^2x^4 - x^6)}$$

und da y ein Maximum werden soll:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(8r^2\pi^2x^3 - 3x^5)}{(24\pi^2)^2 y} = 0,$$

aus welcher Bedingungsgleichung sofort $x^3 = 0$ und $8r^2\pi^2 - 3x^2 = 0$ folgt. Die erste Gleichung gibt $x = 0$, welcher Werth hier unbrauchbar ist; die zweite Gleichung gibt

$$x = 2r\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{2r\pi}{3}\sqrt{6},$$

für welchen Werth der zweite Differentialquotient negativ ausfällt; mithin ist dafür

$$y = \frac{2}{27} r^3 \pi \sqrt{3}$$

ein Maximum.

Da $\frac{x.180}{r\pi}$ die Anzahl der Grade des Bogens ADB bezeichnet, so hat man auch, diese gleiche g gesetzt, wenn man für x den gefundenen Werth substituirt:

$$g = \tfrac{2}{3}\, 180 \sqrt{6} = 293\cdot9388,$$

folglich für den Bogen AB des nöthigen Ausschnitts ACB,

$$360 - g = 66\cdot0612 = 66^0\, 3'\, 40'' \text{ nahe.}$$

13. Aus einem gegebenen geraden Kegel eine Parabel zu schneiden, welche unter allen übrigen, die daraus erhalten werden können, die gröſste Fläche besitzt; wenn es bekannt ist, daſs die von der Abscisse, der Ordinate und dem betreffenden, vom Scheitel an gerechneten Bogen der Parabel eingeschlossene Fläche, $\frac{2}{3}$ des Rechteckes aus der Abscisse (vom Scheitel gezählt) in die entsprechende Ordinate gleich ist.

Auflösung.

Fig. 10. Es sey (in Fig. 10) $AC = BC = a$ die Seite, $AB = b$ der Durchmesser der Basis des gegebenen Kegels, und D der Punct, durch welchen der Schnitt am Kegel geführt werden muſs, also $BD = x$ (als eine veränderliche Gröſse); so ist auch, da DE (Bd. II. §. 79.) mit CA parallel ist, $DE = DB = x$. Wird ferner die parabolische Fläche DEF durch y bezeichnet, so ist der obigen Voraussetzung gemäſs [und wie wir im §. 177., a), sehen werden]:

$$y = \tfrac{2}{3} DE.EF = \tfrac{2}{3} x.EF$$

(man könnte eben so die ganze Fläche $F'DF = \frac{4}{3} DE.EF$ in Rechnung nehmen). Um aber EF zu bestimmen, be-

merke man, dafs, weil EF auf AB perpendikulär steht (indem wir voraussetzen, dafs der Kegelschnitt unter denselben im II. Band, §. 78., gemachten Bedingungen gegen den Axenschnitt ACB geführt sey), im Kreise $AFBA$ $EF = \sqrt{(AE \cdot EB)}$, oder da aus $EB : BD = AB : BC$, d. i. $EB : x = b : a$, $EB = \frac{bx}{a}$, und wegen $AE = AB - BE$, $AE = b - \frac{bx}{a} = \frac{b(a-x)}{a}$ folgt, auch $EF = \frac{b}{a}\sqrt{(ax - x^2)}$ wird; dieser Werth für EF in dem vorigen Ausdruck von y substituirt, gibt sonach

$$y = \frac{2b}{3a}\sqrt{(ax^3 - x^4)}.$$

Da nun y ein Maximum werden soll, so mufs dafür seyn:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{3a}\left[\frac{3ax^2 - 4x^3}{2\sqrt{(ax^3 - x^4)}}\right] = 0;$$

aus dieser Bedingungsgleichung folgt $3ax^2 - 4x^3 = 0$ und daraus sowohl $x = 0$, als auch $x = \frac{3}{4}a$.

Bezeichnet man Kürze halber den constanten Factor durch A, so läfst sich der erste Quotient auch so schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = A\left(\frac{3ax^2 - 4x^3}{y}\right)$$

aus welchem wieder, mit Rücksicht auf die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6A\left(\frac{ax - 2x^2}{y}\right)$ folgt.

Für den ersten Werth $x = 0$ (der hier unbrauchbar ist) verschwindet auch dieser zweite Quotient; für den zweiten Werth $x = \frac{3}{4}a$ aber wird derselbe negativ, also y ein Maximum. Man erhält demnach den gesuchten Schnitt der gröfsten Parabel, wenn dieser durch den Punct D, für welchen $BD = \frac{3}{4}BC$ oder $CD = \frac{1}{4}BC$ ist, geführt wird.

Setzt man auch in $EB = \frac{bx}{a}$ für x den gefundenen Werth, so wird $EB = \frac{3}{4}b$, also auch $GE = \frac{3}{4}b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}b$. Ferner ist (vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke EGH und AGC) $GE : AG = GH : GC$, oder $\frac{1}{4}b : \frac{1}{2}b = GH : GC$, und daraus folgt $GC = 2GH$, daher $GH = HC$; es wird

also die Axe CG des Kegels durch diesen gröfsten Schnitt im Puncte H halbirt.

Anmerk. Geht man von der Bemerkung aus, dafs wenn die Fläche selbst ein Maximum oder Minimum ist, auch das Quadrat derselben ein Gröfstes oder Kleinstes seyn mufs; so werden die obigen Ausdrücke weit einfacher, indem man hat:

$$y^2 = A(a x^3 - x^4), \quad \frac{d \cdot y^2}{d x} = A(3 a x^2 - 4 x^3)$$

$$\text{und} \quad \frac{d^2 . y^2}{d x^2} = A(6 a x - 12 x^2).$$

Der erste Quotient (diesen Null gesetzt) gibt wieder, wie oben, $x = 0$ und $x = \frac{3}{4} a$, mit welchen Werthen der zweite Quotient ebenfalls Null und negativ wird, also zu denselben Ergebnissen führt, die wir oben erhalten haben.

14. In der Voraussetzung, dafs sich die respectiven Festigkeiten parallelepipedischer Balken von einerlei Länge, wie die Breiten und Quadrate der Höhen verhalten, aus einem runden Stück Bauholz den stärksten Balken zu schneiden.

Auflösung.

Es sey r der Halbmesser des Querschnitts $ADBA$ (Fig. 11) des gegebenen Baumes, $AD = x$ die Breite und $AE = z$ die Höhe des daraus zu hauenden vierkantigen Balkens; so kann zufolge der Voraussetzung, dessen Stärke (in Bezug auf das Tragvermögen, wenn er auf die hohe Kante gestellt wird) durch $y = A x z^2$ ausgedrückt werden, wo A einen constanten Factor bezeichnet. Man hat aber, wenn AB ein Durchmesser ist, $z^2 = 4r^2 - x^2$, folglich auch $y = A(4 r^2 x - x^3)$, und da y ein Maximum werden soll:

$$\frac{d y}{d x} = A(4 r^2 - 3 x^2) = 0,$$

aus welcher Bedingungsgleichung sofort $x = \frac{2 r}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$ folgt.

Da ferner für diesen Werth von x der zweite Quo-

tient $\frac{d^2y}{dx^2} = -6Ax$ negativ ausfällt, so wird dafür in der That $y = \frac{16}{9}Ar^3\sqrt{3}$ ein Maximum.

Um den Querschnitt dieses stärksten Balkens zu construiren, hat man aus $z^2 = 4r^2 - x^2$, wenn man für x den gefundenen Werth setzt: $z = \frac{2}{3}r\sqrt{6}$; demnach

$$x : z = \frac{2}{3}r\sqrt{3} : \frac{2}{3}r\sqrt{6} = 1 : \sqrt{2}.$$

Theilt man also den Durchmesser AB in den Puncten G und F in drei gleiche Theile, errichtet auf AB die Perpendikel GD, FE und zieht die Sehnen AD, BD; so wird AD die Breite und BD die Höhe des Balkens, also wenn man auch die in den zweiten Halbkreis fallenden Sehnen AE, BE zieht, $ADBEA$ der rechtwinkelige Querschnitt des gesuchten stärksten Balkens seyn; denn es ist dieser Construction zufolge:

$$AD^2 = AG \,.\, AB = \tfrac{2}{3}r \,.\, 2r = \tfrac{4}{3}r^2 \; (= x^2)$$
$$\text{und } BD^2 = BG \,.\, BA = \tfrac{2}{3} \,.\, 2r \,.\, 2r = \tfrac{8}{3}r^2 \; (= z^2).$$

15. Es sey die Gerade AB (Fig. 12) gegen die Ebene PQ, und in dieser letztern der Punct O gegeben; man soll in der genannten Geraden jenen Punct C finden, in welchem ein Licht auf den Punct O die gröſste Beleuchtung hervorbringt; vorausgesetzt, daſs sich die Intensität der Beleuchtung gerade wie der Sinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen mit der Fläche, und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des leuchtenden Punctes verhält. Fig. 12.

Auflösung.

Man fälle aus dem Puncte C auf die Ebene PQ das Perpendikel CD und in der Ebene PQ aus O auf die Verbindungslinie AD das Perpendikel OE, setze $OE = a$, $AE = b$, $AC = x$ und W. $CAD = \alpha$; so kann die Stärke der von C ausgehenden Beleuchtung des Punctes O, die wir durch z bezeichnen wollen, unter übrigens gleichen Umständen ausgedrückt werden, durch

$$z = \frac{sin. COD}{CO^2} = \frac{CD}{CO} \cdot \frac{1}{CO^2} = \frac{CD}{CO^3}.$$

Es muſs also, da

$$CD = x\, sin.\, \alpha \text{ und}$$

$$CO^2 = CD^2 + OD^2 = CD^2 + OE^2 + ED^2$$
$$= x^2 sin.^2 \alpha + a^2 + (x\, cos.\, \alpha - b)^2$$
$$= a^2 + b^2 + x^2 - 2\, b\, x\, cos.\, \alpha$$

ist, x so bestimmt werden, daſs

$$z = \frac{x\, sin\, \alpha}{(a^2 + b^2 + x^2 - 2\, b\, x\, cos.\, \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

ein Maximum wird. Dafür muſs seyn

$$\frac{dz}{dx} = 0 = \frac{N^{\frac{3}{2}} sin.\, \alpha - 3\, x\, sin.\, \alpha\, (x - b\, cos.\, \alpha)\, N^{\frac{1}{2}}}{N^3},$$

d. i. $0 = a^2 + b^2 - 2x^2 + b\, x\, cos.\, \alpha$,

aus welcher Bedingungsgleichung sofort

$$x = \frac{b\, cos.\, \alpha \pm \sqrt{[8\,(a^2 + b^2) + b^2 cos.^2 \alpha]}}{4}$$

folgt, ein Werth, welcher, wie man auch ohne Berücksichtigung des zweiten Differentialquotienten leicht sieht, indem hier kein Minimum Statt finden kann, z zu einem Maximum macht.

Anmerk. Steht die Gerade AB auf der Ebene PQ perpendikulär, so ist $\alpha = 90$, und daher, wegen $cos.\, \alpha = 0$ und $b = 0$, aus der vorigen Gleichung:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \cdot 7071\, a.$$

Befindet sich also z. B. auf einem Tische eine kleine weiſse Fläche, und wird diese von einem auf demselben in gegebener horizontaler Entfernung $= a$ stehendem Lichte beleuchtet; so muſs die Höhe der Lichtflamme über dem Tisch $= \cdot 707\, a$ seyn, wenn die genannte Fläche von diesem Lichte die möglich stärkste Beleuchtung erhalten soll. Auch kann diese Regel im Groſsen eine gute Anwendung finden.

B) Die gröſsten und kleinsten Werthe der Functionen *zweier* Variablen.

§. 42.

Es sey $z = f(x, y)$ eine Function der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Gröſsen x und y; man soll die Werthe von x und y bestimmen, für welche z ein Maximum oder Minimum wird.

Läſst man x um h und y um k zunehmen, so ist nach §. 19., Form. *A*), wenn man Kürze halber $f(x+h, y+k)$ durch Z bezeichnet und sogleich die ursprüngliche Function z beiderseits abzieht:

$$1)\quad Z - z = \left[\left(\frac{dz}{dx}\right)h + \left(\frac{dz}{dy}\right)k\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)h^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)2hk + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)k^2\right] + \ldots$$

Da es sich aber hier (wie im §. 38.) nur um das Zeichen der Differenz $Z - z$, keineswegs um die absolute Gröſse derselben handelt, dieses bei den kleinsten Werthen von h und k aber lediglich von dem Zeichen des ersten Gliedes der Reihe abhängt (vergl. §. 38.); so brauchen wir anfangs nur dieses erste Glied zu berücksichtigen und können sonach schreiben:

$$Z - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)h + \left(\frac{dz}{dy}\right)k.$$

Soll nun z ein Maximum oder Minimum seyn, so müssen wieder die Nachbarwerthe, deren es hier vier gibt, und welche entstehen, wenn man nach und nach h und k positiv und negativ nimmt, im ersten Falle sämmtlich kleiner, im letztern sämmtlich gröſser als z ausfallen; oder es müssen, wenn man der Kürze wegen $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = p'$ setzt, die vier Differenzen:

$$Z - z = ph + p'k,\quad Z' - z = ph - p'k,$$
$$Z'' - z = -ph + p'k,\quad Z''' - z = -ph - p'k,$$

gleichzeitig im ersten Falle negativ, und im zweiten Falle positiv seyn. Es ist indeſs leicht zu sehen,

daſs dieses, wenn p und p' von Null verschieden sind, nicht möglich ist, und daſs man, man mag den Quotienten p und p' was immer für Zeichen beilegen, immer verschiedene Zeichen für diese vier Differenzen erhält. Ist es also nicht möglich, für x und y solche Werthe zu finden, für welche die Quotienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ verschwinden; so kann die Function z weder ein Gröſstes noch ein Kleinstes werden.

Wird aber z. B. für $x = a$ und $y = b$:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \text{ und auch } \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0;$$

so geht die obige Differenz 1), wenn man die Werthe von $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, nachdem man in diesen zweiten Differentialquotienten bereits $x = a$ und $y = b$ gesetzt hat, beziehungsweise durch P, Q und R bezeichnet, in folgende über:

$$2) \quad Z - z = \tfrac{1}{2}(Ph^2 + 2Qhk + Rk^2),$$

wobei wieder die folgenden Glieder, die bei den kleinsten Werthen von h und k (welche hier immer vorausgesetzt werden müssen) auf das Zeichen von $Z - z$ keinen Einfluſs haben, weggelassen sind. Um aber das Zeichen dieser Differenz sogleich von den Zeichen der Zunahmen h und k unabhängig zu machen und die folgende Untersuchung nicht auch auf die Differenzen $Z' - z$, $Z'' - z$, $Z''' - z$ ausdehnen zu müssen, kann man die Differenz 2) (wenn man $\frac{Q^2k^2}{2P}$ addirt und subtrahirt) auch so darstellen:

$$3) \quad Z - z = \tfrac{1}{2}P\left(h + \frac{Q}{P}k\right)^2 + \tfrac{1}{2}k^2\left(\frac{PR - Q^2}{P}\right)$$

und zugleich auch, wenn man in diesem Ausdrucke 3) P und R, dann h und k mit einander verwechselt [wodurch der Ausdruck 2) ungeändert bleibt], durch

$$4) \quad Z - z = \tfrac{1}{2}R\left(k + \frac{Q}{R}h\right)^2 + \tfrac{1}{2}h^2\left(\frac{PR - Q^2}{R}\right),$$

unter welcher Form die Zeichen von h und k offenbar kei-

nen Einfluſs mehr auf das Zeichen der in Rede stehenden Differenz $Z - z$ haben.

Da nun diese Differenz $Z - z$ in 3) und 4) negativ oder positiv seyn muſs, je nachdem z für $x = a$ und $y = b$ ein Maximum oder Minimum seyn soll; so bemerke man folgendes: Ist P negativ und $\frac{PR - Q^2}{P}$ Null oder negativ, so ist auch in 3) $Z - z$ negativ; ist ferner auch R negativ und $\frac{PR - Q^2}{R}$ Null oder negativ, so ist gleichzeitig auch in 4) $Z - z$ negativ; folglich z ein Maximum *). Ist dagegen P positiv und $\frac{PR - Q^2}{P}$ Null oder positiv, und zugleich R positiv und $\frac{PR - Q^2}{R}$ Null oder auch positiv; so ist $Z - z$ sowohl in 3) als auch in 4) positiv, demnach z ein Minimum **). Diese Ergebnisse lassen sich kurz so zusammenfassen:

Sind P und R gleichzeitig negativ, und ist dabei $PR - Q^2$ Null oder positiv; so wird z für die genannten Werthe von $x = a$ und $y = b$ ein Gröſstes. Sind

*) Dieſs ist auch noch der Fall, wenn bei diesen Bedingungen von P und R negativ, beziehungsweise jene

$$P\left(h + \frac{Q}{P}k\right)^2 > k^2\left(\frac{PR - Q^2}{P}\right)$$

$$\text{und } R\left(k + \frac{Q}{R}h\right)^2 > h^2\left(\frac{PR - Q^2}{R}\right)$$

(dem numerischen Werthe nach) Statt haben. Diese führen aber ganz einfach auf jene:

$$\frac{h}{k} > \frac{-Q \pm \sqrt{(PR - Q^2)}}{P} \text{ und } \frac{k}{h} > \frac{-Q \pm \sqrt{(PR - Q^2)}}{R}$$

oder, wenn man diese Ungleichheiten zusammen multiplicirt, auf

$PR > [-Q \pm \sqrt{(PR - Q^2)}]^2$, oder $0 > \pm 2Q\sqrt{(PR - Q^2)}$; woraus aber ebenfalls, wie oben gefolgert werden kann, daſs für ein Maximum von z, auſser der Bedingung von $P < 0$ und $R < 0$, auch noch jene: $PR > Q^2$ bestehen muſs.

**) Hier kann auch noch der, jenem in der vorigen Note analoge Fall angeführt werden, welcher aber, wie aus dem Ergebniſs der vorigen Note zu sehen, wieder auf die eben angeführten Bedingungen führt.

dagegen P und R beide positiv, und ist dabei $PR - Q^2$ Null oder positiv; so wird z für diese Werthe von x und y ein Kleinstes *).

Es ist zwar auch noch der Fall möglich, dafs für die genannten Werthe von $x = a$ und $y = b$, P, Q und R verschwinden, so, dafs man in 1) sofort auf die dritten und höhern Differentialquotienten übergehen müfste; da indefs diese weitere Untersuchung immer verwickelter wird **), so können wir dieselbe um so eher übergehen, als sich schon in den allermeisten Fällen aus der Natur des Gegenstandes entscheiden läfst, ob für die gefundenen Werthe von $x = a$ und $y = b$ die Function z ein Maximum oder Minimum seyn kann, und in jedem Falle, wenn die Ent-

*) *Euler* hat in seiner Differentialrechnung (Bd. II. Cap. XI.) diese Kennzeichen nicht vollständig aufgestellt, indem er aus Versehen, auf die obige Differenz $PR - Q^2$ keine Rücksicht nahm. Setzt man, was erlaubt ist, $k = \alpha h$, wo α ebenfalls eine ganz willkürliche Gröfse bezeichnet; so kann man der obigen Differenz in 2) folgende Form geben:

$$m)\quad Z - z = \tfrac{1}{2} R h \left(\frac{P}{R} + \frac{2Q}{R}\alpha + \alpha^2\right)$$

so, dafs das Zeichen dieser Differenz nicht mehr von h, sondern blofs noch, wenn die Zeichen von P, Q, R bestimmt sind, von α, d. i. von dem Zeichen des eingeklammerten Trinoms abhängt. Soll dieses Polynom aber für jeden möglichen Werth von α dasselbe Zeichen behalten, so müssen (m. s. Bd. I., § 23., Anmerk.), wenn dasselbe Null gesetzt, und diese Gleichung nach α aufgelöst wird, beide Wurzeln entweder imaginär oder einander gleich seyn. Es sind aber die Wurzeln der genannten Gleichung:

$$\alpha = \frac{-Q \pm \sqrt{(Q^2 - PR)}}{R}$$

und diese werden imaginär, wenn $Q^2 < PR$ und einander gleich, wenn $Q^2 = PR$ ist, vorausgesetzt, dafs noch überdiefs in beiden Fällen P und R einerlei Zeichen besitzen.

Da also nunmehr das Zeichen in m) nur noch von jenem der Gröfse R abhängt; so folgt in Uebereinstimmung mit dem obigen Raisonnement, dafs für $x = a$ und $y = b$ z ein Maximum oder Minimum wird, je nachdem nebst der Bedingung $PR \geqq Q^2$, P und R zugleich negativ oder positiv sind.

**) *Lagrange* hat in dieser Beziehung zuerst die allgemeinste Auflösung gegeben und seine Untersuchung auch auf Functionen von mehr als zwei Variablen ausgedehnt (*Miscellanea Societ. Taurinensis. T. I.*).

scheidung nicht unmittelbar möglich wäre, die Nachbarwerthe z, z', z'', z''' von $f\binom{x,\ y}{a\ \ b}$ (die zu suchen, es immer bequemer ist, als auf die höhern Differentialquotienten überzugehen) hierüber Aufschlufs geben würden.

Um also zu untersuchen, ob die Function $z = f(x, y)$ gröfste oder kleinste Werthe annehmen kann, und für welche Werthe von x und y dieses geschieht, wird man z partiell differentiiren und aus den beiden Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

die Werthe von x und y bestimmen. Finden sich aus diesen (oder den unten in der Anmerk. angeführten Gleichungen) keine solchen Werthe, oder enthalten diese Gleichungen einen Widerspruch; so kann z für keine Werthe von x und y ein Maximum oder Minimum werden. Findet man aber daraus z. B. $x = a$ und $y = b$, so wird man diese Werthe in die zweiten Differentialquotienten substituiren. Werden nach dieser Substitution die Quotienten $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ beide negativ, und ist zugleich

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \geqq \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2,$$

so ist z für diese Werthe von x und y ein Maximum; fallen dagegen $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ gleichzeitig positiv aus und ist ebenfalls dabei

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \geqq \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2,$$

so wird z für $x = a$ und $y = b$ ein Minimum.

Anmerk. Aus denselben Gründen, die wir im §. 39. (Anmerk.) angeführt haben, kann es auch hier seyn, dafs man zwar aus den Bedingungsgleichungen $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ keine, dagegen aus jenen $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \infty$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \infty$, d. i. aus den Gleichungen $\left[1 : \left(\frac{dz}{dx}\right)\right] = 0$ und $\left[1 : \left(\frac{dz}{dy}\right)\right] = 0$

für x und y Werthe findet, für welche z ein Maximum oder Minimum wird.

Man wird also, wenn sich aus den erstern Gleichungen keine Werthe für x und y ergeben, auch versuchen, ob nicht vielleicht diese letztern solche Werthe liefern; in welchem Falle man dann aus der Natur der Sache, oder der Nachbarwerthe beurtheilen müſste, ob diese einem Gröſsten oder Kleinsten von z entsprechen*).

§. 43.

Aufgaben.

Um den Vortrag des vorigen Paragraphes noch mehr zu erläutern, wollen wir die nachstehenden Aufgaben auflösen.

1. Eine Zahl a in drei Theile so zu theilen, daſs das Product aus der dritten Potenz des ersten, der zweiten Potenz des zweiten und ersten Potenz des dritten Theiles ein Maximum wird.

Auflösung.

Bezeichnet man die gesuchten drei Theile der Reihe nach durch x, y und $a - x - y$, so wie das genannte Product durch z; so soll der Bedingung gemäſs

$$z = x^3 y^2 (a - x - y)$$

ein Gröſstes werden. Es müssen also dafür (zufolge der im vorigen Paragraphe entwickelten Regel) die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = x^2 y^2 (3a - 4x - 3y) = 0$$

*) Obschon es nicht nöthig ist, die Lehre vom Maximum und Minimum auf Functionen von mehr als zwei Variablen auszudehnen, indem in der Anwendung solche Fälle fast niemals vorkommen; so läſst sich aus dem bisher über diesen Gegenstand Vorgetragenen doch leicht schlieſsen, daſs, wenn z eine Function von n Variablen x, y, u . . . w wäre, jene Werthe, für welche z ein Maximum oder Minimum seyn soll, den n Bedingungsgleichungen:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0, \ldots \left(\frac{dz}{dw}\right) = 0$$

Genüge leisten, oder eigentlich daraus bestimmt werden müssen.

und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = x^3 y\,(2a - 2x - 3y) = 0$

Statt finden, aus welchen, da die Werthe von $x = 0$ und $y = 0$ hier offenbar unbrauchbar sind, durch Verbindung der beiden Gleichungen $3a - 4x - 3y = 0$ und $2a - 2x - 3y = 0$ sofort $x = \frac{a}{2}$ und $y = \frac{a}{3}$ folgt.

Ferner ist

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = xy^2\,(6a - 12x - 6y)$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = x^2y\,(6a - 8x - 9y)$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = x^3\,(2a - 2x - 6y)$$

so, daſs wenn man in diesen Quotienten die für x und y gefundenen Werthe setzt, dadurch

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = -\frac{a^4}{9},\ \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = -\frac{a^4}{12} \text{ und } \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -\frac{a^4}{8},$$

also die beiden Quotienten P und R gleichzeitig negativ, und wegen

$$PR = -\frac{a^4}{9} \times -\frac{a^4}{8} = \frac{a^8}{72} \text{ und } Q^2 = \left(-\frac{a^4}{12}\right)^2 = \frac{a^8}{144}$$

auch noch $PR - Q^2 = \frac{2a^8 - a^8}{144} = \frac{a^8}{144}$ positiv ausfällt; es wird also in der That für diese Werthe von $x = \frac{a}{2}$ und $y = \frac{a}{3}$ das Product $z = \left(\frac{a}{2}\right)^3 \left(\frac{a}{3}\right)^2 \left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a^6}{432}$ ein Maximum *).

Zusatz. Soll das Product aus den ersten Potenzen, d. i. $z = xy\,(a - x - y)$ ein Maximum seyn; so müssen, da man jetzt

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = y\,(a - 2x - y) = 0 \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = x\,(a - x - 2y) = 0$$

erhält, $x = y = \frac{a}{3}$, also, da auch $a - x - y = \frac{a}{3}$ wird, alle drei Theile einander gleich seyn.

Für diese Werthe ist ferner

*) Will man diese Aufgabe in einer noch allgemeinern Form auflösen, so suche man die Werthe von x und y, für welche das Product $z = x^m y^n (a - x - y)^p$ ein Maximum wird.

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = -2y = -\frac{2a}{3},\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -2x = -\frac{2a}{3}$$

$$\text{und}\ \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = a - 2x - 2y = -\frac{a}{3};$$

da also die beiden erstern Quotienten negativ sind und zugleich die Bedingung $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2$ Statt findet, so ist z ein Maximum.

2. Eine Ebene und ein aufserhalb liegender Punct sind gegeben; man soll von diesem Punct aus die kürzeste Gerade an die Ebene ziehen.

Auflösung.

Es seyen $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung der Ebene, in welcher wir z als Function von x und y ansehen wollen (Bd. II., §. 162.), x', y', z' die rechtwinkeligen Coordinaten des gegebenen Punctes, und endlich x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes der Ebene; so ist die Länge der Geraden, welche die beiden genannten Puncte verbindet [Bd. II., §. 161., (1]:

$$u = \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}.$$

Da nun u ein Maximum werden soll, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{(x-x') + (z-z')\frac{dz}{dx}}{u} = 0$$

$$\text{und}\ \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{(y-y') + (z-z')\frac{dz}{dy}}{u} = 0,$$

oder da aus der obigen Gleichung der Ebene

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{A}{C}\ \text{und}\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{B}{C}$$

folgt, auch

$$x - x' - \frac{A}{C}(z-z') = 0\ \text{und}\ y - y' - \frac{B}{C}(z-z') = 0,$$

oder endlich

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= \frac{A}{C}(z-z') \\ y - y' &= \frac{B}{C}(z-z') \end{aligned}\right\}$$

welches sofort [Bd. II, §. 170., Aufg. 12, Gl. (3] die Gleichungen des aus dem gegebenen Puncte x', y', z' auf die gegebene Ebene gefällten Perpendikels sind, das sonach der Bedingung eines Maximums oder Minimums entspricht.

Man erhält ferner

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) = \left(1 - \frac{A}{C}\frac{d z}{d x}\right) : u = \left(1 + \frac{A^2}{C^2}\right) : u,$$

$$\left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right) = \left(1 + \frac{B^2}{C^2}\right) : u \text{ und } \left(\frac{d^2 u}{d x\, d y}\right) = \frac{A B}{C^2} : u;$$

also

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right)\left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right) = \left(1 + \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} + \frac{A^2 B^2}{C^4}\right) : u^2,$$

$$\text{und } \left(\frac{d^2 u}{d x\, d y}\right)^2 = \frac{A^2 B^2}{C^4} : u^2,$$

folglich

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right)\left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right) > \left(\frac{d^2 u}{d x\, d y}\right)^2$$

und da zugleich die beiden erstern Quotienten positiv sind; so ist in der That das aus dem gegebenen Puncte auf die Ebene gefällte Perpendikel die kürzeste Entfernung.

Anmerk. Es ist hier zur Entscheidung, ob das gefundene Resultat einem Gröfsten oder Kleinsten entspricht, offenbar nicht nothwendig, auf die zweiten Differentialquotienten (die wir nur zur Uebung und um die Uebereinstimmung zu zeigen, entwickelt haben) überzugehen; indem der Natur der Sache nach keine gröfste Entfernung zwischen dem gegebenen Puncte und der Ebene möglich ist, weil diese offenbar bis Unendliche zunehmen kann.

3. Ein Dreieck ABC (Fig. 13) ist gegeben; man soll jenen Punct O bestimmen, für welchen die Summe der Verbindungslinien desselben mit den Winkelpuncten des Dreieckes, d. i. $OA + OB + OC$ ein Minimum wird. Fig. 13.

Auflösung.

Um das Dreieck festzusetzen, sey $AC = a$, $BC = b$ und W. $ACB = \alpha$. Man nehme den Punct O vorläufig im

Dreiecke selbst an, ziehe die Geraden OA, OB, OC und setze, um diesen Punct zu bestimmen oder seine Lage festzustellen, W. $ACO = x$ und $CO = y$; so folgt aus dem Dreiecke AOC:

$$AO = \sqrt{(a^2 + y^2 - 2\,ay\,cos.\,x)},$$

und aus jenem BOC:

$$BO = \sqrt{[b^2 + y^2 - 2\,by\,cos.\,(\alpha - x)]}\ \text{[Trig. §. 29., (2)]};$$

es ist daher, wenn die Summe der genannten Verbindungslinien durch z bezeichnet wird:

$$z = y + \sqrt{(a^2 + y^2 - 2\,ay\,cos.\,x)} + \sqrt{[b^2 + y^2 - 2\,by\,cos.\,(\alpha - x)]}.$$

Da nun z ein Minimum werden soll, so hat man dafür:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{ay\,sin.\,x}{AO} - \frac{by\,sin.\,(\alpha - x)}{BO} = 0$$

$$\text{und}\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = 1 + \frac{y - a\,cos.\,x}{AO} + \frac{y - b\,cos.\,(\alpha - x)}{BO} = 0.$$

Aus der ersten Gleichung wird, außer $y = 0$:

$$\frac{a\,sin.\,x}{AO} = \frac{b\,sin.\,(\alpha - x)}{BO},$$

oder wenn man im gegebenen Dreiecke die Gerade CO verlängert und auf diese aus A und B die Perpendikel AD und BE fällt, auch, wie leicht zu sehen:

$$\frac{AD}{AO} = \frac{BE}{BO},\ \text{d. i.}\ sin.\,AOE = sin.\,BOE,$$

woraus sofort

$$1)\quad \text{W.}\,AOE = \text{W.}\,BOE$$

folgt.

Die zweite Gleichung gibt:

$$\frac{a\,cos.\,x - y}{AO} + \frac{b\,cos.\,(\alpha - x) - y}{BO} = 1,$$

oder (auf die Figur bezogen)

$$\frac{OD}{AO} + \frac{OE}{BO} = 1,\ \text{d. i.}\ cos.\,AOE + cos.\,BOE = 1,$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung 1):

$$2\,cos.\,AOE = 1\ \text{oder}\ cos.\,AOE = \tfrac{1}{2},$$

woraus sofort W. AOE = W. BOE = 60, also W. AOB = 120° folgt.

Aus diesen Werthen von AOE und BOE folgt ferner W. AOC = 180 — 60 = 120° und auch W. BOC = 180 — 60 = 120°: der gesuchte Punct O hat daher eine solche Lage, daſs die drei Verbindungslinien OA, OB, OC in O gleiche Winkel bilden.

Daſs endlich bei dieser gefundenen Lage des Punctes O die genannte Summe $OA + OB + OC$ kein Maximum, sondern nur ein Minimum seyn kann, folgt, ohne erst auf die zweiten Differentialquotienten überzugehen, aus der Natur der Sache selbst; indem durch das Hinausrücken des Punctes O, diese Summe bis ins Unendliche zunehmen, also kein Maximum erreichen kann (da sonst ihr Werth von irgend einer Stelle an, wieder abnehmen müſste).

Um aber diesen Punct O durch eine einfache Construction zu finden, beschreibe man über zwei Seiten des gegebenen Dreieckes, z. B. über BC und AC, gleichseitige Dreiecke, und um jedes derselben einen Kreis; so liefert ihr Durchschnitt O den gesuchten Punct. Denn aus den eingeschriebenen Vierecken $BOCF$ und $AOCG$, in welchen sich bekanntlich je zwei gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen, hat man offenbar W. BOC = 120° und W. AOC = 120°, folglich auch W. AOB = 120°.

Anmerk. Soll also z. B. von einem innerhalb des Dreieckes ABC liegenden Punct, den man nach Belieben wählen darf, an die drei Puncte A, B, C eine Röhrenleitung geführt werden; so wird man die kleinste Anzahl von Röhren benöthigen, wenn man als Vereinigungspunct den eben bestimmten Punct O wählt.

4. Ein Dreieck zu construiren, welches bei einem gegebenen Umfange die gröſste Fläche einschlieſst.

Auflösung.

Es sey $2S$ der gegebene Umfang, x die eine, y die andere, also $2S - x - y$ die dritte Seite, und endlich z die Fläche des Dreieckes; so ist bekanntlich

$$z = \sqrt{[S(S-x)(S-y)(x+y-S)]},$$

und weil z ein Maximum seyn soll, zugleich

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{S(S-y)(2S-2x-y)}{2z} = 0$$

$$\text{und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{S(S-x)(2S-x-2y)}{2z} = 0.$$

Man hat also zur Bestimmung von x und y, da $S - x$ und $S - y$ nicht Null seyn können, die Gleichungen:

$$2S - 2x - y = 0 \text{ und } 2S - x - 2y = 0,$$

aus deren Verbindung $2x + y = x + 2y$, also $y = x$ folgt; mit diesem Werth von y hat man aus einer der vorigen Gleichungen: $2S - 3x = 0$, also $x = y = \frac{2S}{3}$, und daher ist auch die dritte Seite $2S - x - y = \frac{2S}{3}$, so dafs also das Dreieck gleichseitig seyn mufs, um bei dem gegebenen Umfang die gröfste oder kleinste Fläche einzuschliefsen.

Geht man, um diesen letzten Umstand noch zu entscheiden, auf die zweiten Quotienten über; so erhält man mit diesen gefundenen Werthen von x und y, für welche $z = \frac{1}{9} S^2 \sqrt{3}$ wird:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = -\frac{S^2}{3z} = -\frac{3}{\sqrt{3}}, \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = -\frac{S^2}{3z} = -\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\text{und } \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = -\frac{S^2}{6z} = -\frac{3}{2\sqrt{3}},$$

$$\text{also } \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = 3 \text{ und } \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = \tfrac{3}{4},$$

$$\text{folglich } \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2$$

und da noch überdiefs die beiden erstern Quotienten negativ sind; so ist hier die betreffende Fläche sofort ein Maximum.

5. Es sollen die Dimensionen eines rechtwinkeligen parallelepipedischen Gefäfses angegeben werden, welches bei einem gegebenen Inhalt die kleinste Oberfläche besitzt, und zwar wenn der Deckel mitgerechnet wird.

Auflösung.

Ist a^3 der gegebene Inhalt, z die Oberfläche des Gefäſses, und sind x, y, u die drei zusammenstoſsenden Seiten des Parallelepipeds; so ist $z = 2xy + 2xu + 2yu$, oder wegen $xyu = a^3$, woraus $u = \frac{a^3}{xy}$ folgt, auch

$$z = 2\left(xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}\right);$$

ein Ausdruck, welcher der Bedingung der Aufgabe zufolge ein Minimum werden soll. Man hat daher

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 2\left(y - \frac{a^3}{x^2}\right) = 0 \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = 2\left(x - \frac{a^3}{y^2}\right) = 0,$$

und daraus: $x^2y = xy^2$ oder $x = y$; folglich auch:

$$x - \frac{a^3}{x^2} = \frac{x^3 - a^3}{x^2} = 0, \text{ d. i. } x = y = a,$$

und mit diesen Werthen wird auch $u = \frac{a^3}{xy} = a$; das Gefäſs muſs also würfelförmig seyn, wenn es bei dem gegebenen Inhalt die kleinste oder gröſste Oberfläche besitzen soll. Um endlich noch zu untersuchen, welches von beiden hier Statt findet, hat man mit den gefundenen Werthen von x und y:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{4a^3}{x^3} = 4, \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{4a^3}{y^3} = 4 \text{ und } \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = 2,$$

also offenbar $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) > \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2$;

und da auſserdem die beiden erstern Quotienten positiv sind, so ist in der That die betreffende Oberfläche ein Kleinstes.

Anmerk. Es ist hier der Ort zu bemerken, daſs man (namentlich *Euler*) die Differentialrechnung auch zur Herleitung summirbarer Reihen benützt hat. Kennt man nämlich die Summe einer nach Potenzen von x gebildeten Reihe, die also nothwendig eine gewisse Function von x seyn wird; so lassen sich daraus durch Differentiation unzählige andere Reihen nebst ihren summatorischen Gliedern ableiten. Diese Methode, die einer mannigfaltigen Abänderung fähig ist, gewinnt noch an Umfang, wenn man vor jeder neuen Differentiation mit einer Potenz, oder allgemeiner noch, mit irgend einer passenden Function von x multiplicirt.

Um von diesem Verfahren, welches man weitläufiger in *Eulers: Instit. Calc. Diff. P.* II. *Cap.* II. (oder in der von *Joh. Michelsen* herausgegebenen deutschen Uebersetzung, Leipzig 1790, 2. Bd., S. 25 u. f.) entwickelt findet, einen Begriff zu geben, wollen wir dasselbe auf einige Beispiele anwenden.

1. Es ist bekanntlich

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ bis ins Unendl.} = \frac{1}{1-x},$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten wiederholt differentiirt und immer gleich beziehungsweise durch dx, $2\,dx$, $3\,dx$, .. abkürzt:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^4}$$

u. s. w.,

so, dafs man also auf diese Weise überhaupt die Summe aller aus dem Bruche $\frac{1}{(1-x)^n}$ (für ein ganzes n) entspringenden Reihen finden kann, in welchen, wie man sieht (Bd. I. §. 90.) die figurirten Zahlen der verschiedenen Ordnungen, die Coefficienten der Potenzen von x bilden.

2. Die erste der vorigen Reihen mit x^m multiplicirt, gibt

$$x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} + \ldots = \frac{x^m}{1-x}$$

und wenn man differentiirt und dann durch $x^{m-1}\,dx$ beiderseits abkürzt:

$$m + (m+1)x + (m+2)x^2 + (m+3)x^3 + \ldots$$
$$= \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man neuerdings, wenn man zuerst durchaus mit x^n multiplicirt, dann differentiirt und endlich wieder mit $x^{n-1}\,dx$ abkürzt:

$$mn + (m+1)(n+1)x + (m+2)(n+2)x^2 + \ldots$$
$$= \frac{mn}{1-x} + \frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Und so kann man weiter fortfahren.

3. Es bestehe endlich noch die zum Grund gelegte Reihe, deren Summe man kennt, aus einer bestimmten Anzahl Glieder, wodurch auch die abgeleiteten Reihen endliche

seyn werden; so ist z. B. für

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

wenn man differentiirt und durch dx abkürzt:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n x^{n-1} = \frac{1 - (n+1) x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Hieraus folgt eben so, wenn man früher noch mit x durchaus multiplicirt:

$$1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1} =$$
$$\frac{1 + x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1) x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

4. Bilden die Gröſsen a_1, a_2, a_3, ... eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung, und ist die Summe S der Reihe

$$1) \ldots S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

bekannt; so läſst sich auch die Summe der Reihe

$$2) \ldots Z = Aa_1 + Ba_2 x + Ca_3 x^2 + Da_4 x^3 + \ldots$$

finden.

Denn setzt man die Summe dieser Reihe, oder

$$3) \ldots Z = \alpha S + \beta x \frac{dS}{dx} + \gamma x^2 \frac{d^2 S}{2\,dx^2} + \delta x^3 \frac{d^3 S}{6\,dx^3} + \varepsilon x^4 \frac{d^4 S}{24\,dx^4} + \ldots$$

so erhält man, wenn die Differentialquotienten von S aus der obigen Reihe 1) gebildet und hier hinein substituirt werden:

$$Z = \alpha A + \left.\begin{matrix}\alpha B\\ \beta B\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}\alpha C\\ 2\beta C\\ \gamma C\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}\alpha D\\ 3\beta D\\ 3\gamma D\\ \delta D\end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix}\alpha E\\ 4\beta E\\ 6\gamma E\\ 4\delta E\\ \varepsilon E\end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

Diese Reihe mit der obigen 2) verglichen, gibt, mit Rücksicht auf die Entwicklungen von §. 83. (Bd. I.)

$$\alpha = a_1$$
$$\beta = a_2 - \alpha = a_2 - a_1 = \Delta^1 a_1$$
$$\gamma = a_3 - 2\beta - \alpha = a_3 - 2a_2 + a_1 = \Delta^2 a_1$$
$$\delta = a_4 - 3\gamma - 3\beta - \alpha = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1 = \Delta^3 a_1$$

u. s. w.

Es ist also endlich, wenn man diese Werthe von α, β, γ, ... oben in 3) substituirt, die Summe Z der obigen Reihe 2):

$$Z = a_1 S + \Delta^1 a_1 \frac{dS}{1 \, . \, dx} x + \Delta^2 a_1 \frac{d^2 S}{1 \, . \, 2 \, dx^2} x^2$$
$$+ \Delta^3 a_1 \frac{d^3 S}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, dx^3} x^3 + \,. \,.$$

sofort durch eine Reihe ausgedrückt, die mit dem $n+1^{sten}$ Gliede abbricht, wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots$, eine arithmetische Reihe der n^{ten} Ordnung ist.

So wäre z. B. für die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \ldots,$$

wie aus der Reihe 3), §. 129. (Bd. I.) leicht zu sehen,

$$S = \frac{1}{x} \, l \left(\frac{1}{1-x}\right)$$

und wenn man für die Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jene $1, 2, 3, 4, \ldots$ welches sofort eine arithmetische der **ersten** Ordnung ist, nimmt, nach dem vorigen Ausdrucke von Z, wegen

$$a_1 = 1, \ \Delta^1 a_1 = 1, \ \Delta^2 a_1 = 0, \ \Delta^3 a_1 = 0 \text{ etc.}$$

$$\text{und } \frac{dS}{dx} = -\frac{1}{x^2} \, l \left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{x(1-x)}$$

wie es seyn soll:

$$Z = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$
$$= \frac{1}{x} \, l \left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{x}{x^2} \, l \left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}.$$

Sechstes Capitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der *ebenen* Curven oder krummen Linien von *einfacher* Krümmung.

Methode der Tangenten.

§. 44.

Es sey BMM'' (Fig. 14) irgend eine ebene Curve, AX Fig. 14. die Abscissenaxe, A der Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, und $y = f(x)$ die Gleichung dieser Curve *). Man ziehe zu irgend einem Puncte M der letztern die Ordinate MP, wodurch also $AP = x$, $PM = y$ wird, lasse die Abscisse x um das beliebige Stück $PP' = h$ zunehmen, und ziehe durch P' mit PM die Parallele $P'M'$; so sind offenbar $AP' = x + h$ und $P'M' = y' = f(x + h)$ die Coordinaten des Punctes M'. Zieht man durch diese genannten Puncte M, M' die Secante SMM', und noch durch M zu AX die Parallele MQ; so entstehen die beiden ähnlichen Dreiecke $M'MQ$ und MSP, aus denen sofort die Proportion folgt:

$$M'Q : MQ = MP : SP;$$

daraus ist die Subsecante $SP = \frac{MP . MQ}{M'Q}$, oder wegen

$$MP = y, \quad MQ = PP' = h$$

und

*) Da jede Function einer veränderlichen Gröſse, wie $y = f(x)$, durch eine ebene Curve dargestellt oder repräsentirt werden kann, in welcher x die absolut variablen Abscissen und y die davon abhängigen Ordinaten bezeichnen (man vergl. Bd. II., §. 19.); so werden ohne Zweifel, wie die analytischen Untersuchungen der Functionen den geometrischen Betrachtungen der genannten Curven eine gröſsere Vollständigkeit und Bestimmtheit verleihen, auch umgekehrt, die ersteren durch diese geometrischen Betrachtungen an Klarheit und Deutlichkeit gewinnen.

$$M'Q = M'P' - MP = f(x+h) - f(x) = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

wenn man nämlich $f(x+h)$ nach der *Taylor*'schen Formel entwickelt, auch:

$$SP = \frac{yh}{\frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots} = \frac{y}{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{2} + \ldots} \quad (\alpha$$

Je mehr nun h abnimmt, desto mahr nähert sich der Punct M' jenem M, und desto mehr fällt die Secante SMM' mit der in M errichteten Tangente MT zusammen. Wird endlich $PP' = h = 0$, fällt also M' auf M; so geht die erstere vollkommen in die letztere über *). Da aber in diesem Falle zugleich auch die Subsecante PS in die Subtangente PT übergeht (m. s. die Erkl. in §. 97., Bd. II.), so erhält man aus dem vorigen Ausdrucke $(\alpha$:

$$PT = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = y\frac{dx}{dy}.$$

Wird ferner noch in M die Normale MN gezogen, so folgt aus dem rechtwinkeligen Dreiecke TMN:

$$MP^2 = PT \,.\, PN,$$

und daraus die Subnormale:

$$PN = \frac{MP^2}{PT} = \frac{y^2}{y\frac{dx}{dy}} = y\frac{dy}{dx}.$$

Weiters ist, wie man sieht:

*) Wir gehen nämlich hier wieder von jener allgemeinen Definition der Tangente einer Curve aus, die wir im §. 35 des zweiten Bandes aufgestellt und zum Grunde gelegt haben, und sehen diese als eine Secante an, deren beide Durchschnittspuncte sich im Berührungspuncte vereinigt haben.

Nach andern Definitionen ist die Tangente (nach den alten Geometern) eine gerade Linie, welche mit der Curve nur einen einzigen Punct gemein und eine solche Lage hat, dafs zwischen ihr und der Curve durch diesen Punct keine andere Gerade gezogen werden kann; oder sie wird auch (nach den Leibnitzischen Principien) als die Verlängerung des Bogenelementes an diesem Puncte, d. i. der unendlich kleinen Seite der Curve angesehen, die man sich als ein Polygon von unendlich vielen und kleinen Seiten vorstellt.

$$MT = \sqrt{(MP^2 + PT^2)} = \sqrt{\left(y^2 + y^2 \frac{dx^2}{dy^2}\right)} = y\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$$

und

$$MN = \sqrt{(MP^2 + PN^2)} = \sqrt{\left(y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

Man hat also die für jede ebene Curve geltenden wichtigen Ausdrücke:

Tangente $MT = y\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]}$. . . (1

Subtangente $PT = y\frac{dx}{dy}$ (2

Normale $MN = y\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$. . . (3

Subnormale $PN = y\frac{dy}{dx}$ (4

Beispiel.

Um diese Formeln gleich auf ein einfaches Beispiel anzuwenden, nehmen wir die gemeine oder Apollonische Parabel. Ihre Gleichung ist (Bd. II., §. 67.) $y^2 = px$, und daraus folgt, wenn man differentiirt:

$$2y\,dy = p\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y};$$

es ist daher für diese Curve, in Uebereinstimmung mit Bd. II., §. 100.:

die Subtangente $y\frac{dx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$,

die Subnormale $y\frac{dy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{p}{2}$,

die Tangente $y\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)} = y\sqrt{\left(1 + \frac{4x}{p}\right)}$
$= \sqrt{(px + 4x^2)}$,

und die Normale $y\sqrt{\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right)} = y\sqrt{\left(1 + \frac{p}{4x}\right)}$
$= \sqrt{\left(px + \frac{p^2}{4}\right)}$.

§. 45.

Ist α der Winkel, welchen die Tangente MT mit der Abscissenaxe bildet, so ist

$$tang.\,\alpha = \frac{MP}{PT} = \frac{y}{y\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{dx} \;\ldots\; (1;$$

läſst man daher x, y für die Coordinaten des Berührungspunctes M gelten, und bezeichnet die allgemeinen Coordinaten durch x', y'; so erhält man für die Gleichung der Tangente, als einer durch den Punct x, y gehenden Geraden (Bd. II., § 14.):

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x) \;\ldots\; (2,$$

also auch für die Gleichung der Normale (Bd. II., §. 14., Aufg. 6.):

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x) \;\ldots\; (3\ ^{*}).$$

Beispiel.

Die Gleichung des Kreises ist, wenn die Coordinaten des Mittelpunctes durch α, β, der Halbmesser durch γ bezeichnet wird (Bd. II., §. 15.):

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \gamma^2;$$

daraus folgt durch Differentiation:

$$(x' - \alpha)\,dx' + (y' - \beta)\,dy' = 0,$$

und aus dieser Gleichung, wenn man gleich die Accente wegläſst:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}.$$

Die Gleichung der Tangente an den Kreis für den Berührungspunct x, y ist demnach [Gl. (2]:

*) Da in jedem Puncte der Curve die Richtung des Elements des Bogens mit jener der an diesem Puncte errichteten Tangente zusammenfällt; so ist die Normale zugleich jene Gerade, welche die Curve im Puncte x, y rechtwinkelig schneidet. Ist also $dy' = p\,dx'$ die Differentialgleichung der Curve [die mit jener der Tangente (2 identisch ist], so ist $dy' = -\frac{1}{p}\,dx'$ die Differentialgleichung der die Curve im betreffenden Puncte rechtwinkelig durchschneidenden Geraden [und mit jener der Normale (3 identisch].

$$y' - y = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}(x'-x),$$

und die der Normale [Gl. (3]:

$$y' - y = \frac{y-\beta}{x-\alpha}(x'-x).$$

Ist der Mittelpunct zugleich der Ursprung der Coordinaten, so verwandeln sich diese beiden Gleichungen, wegen $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, in folgende:

$$y' - y = -\frac{x}{y}(x'-x) \text{ [vergl. Bd. II., §. 37., Gl. (5]},$$

$$y' - y = \frac{y}{x}(x'-x).$$

Anmerk. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ oder der Werth der trigonometrischen Tangente [Gl. (1] gibt uns zugleich Aufschlufs über die Natur des Laufes der Curve in der Nähe des Berührungspunctes x, y. Denn dieser Quotient ist offenbar positiv oder negativ, je nachdem die Ordinate MP (Fig. 14) im zu- oder (Fig. 15) abnehmen begriffen ist, und verschwindet, wenn diese im ersten Fall ihren gröfsten und im letztern Falle ihren kleinsten Werth erreicht hat ($p'm'$, Fig. 15); weil der Winkel α in diesen angeführten Fällen beziehungsweise spitz, stumpf und gleich Null ist, also im letztern Falle die Tangente $m'n'$ mit der Abscissenaxe parallel läuft. Fig. 14 und 15.

§. 46.

Das Differential des Bogens einer Curve und der von dieser begrenzten Fläche.

1. Um das Differential des Bogens BM (Fig. 14) zu finden, sey Bog. $BM = s$ und $s = \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine noch unbekannte, erst zu bestimmende Function von x bezeichnen soll; so ist (wegen $PP' = h$) Fig. 14.

$$\text{Bog. } MM' = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{ds}{dx}h + \frac{d^2s}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots \text{ (§. 8, I.)}$$

Für die Sehne dieses nämlichen Bogens folgt aus dem rechtwinkeligen Dreiecke MQM':

$$MM' = \sqrt{(MQ^2 + M'Q^2)}$$
$$= \sqrt{\left[h^2 + \left(\frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots\right)^2\right]}$$
$$= \left[\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)h^2 + Ah^3 + \ldots\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} h + Ph^2 + \ldots,$$

indem es sich hier nur um das Glied mit h in der ersten Potenz handelt.

Man hat also, wenn man gleich durch h abkürzt:

$$\frac{\text{Sehne } MM'}{\text{Bog. } MM'} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} + Ph + \ldots}{\frac{ds}{dx} + \frac{d^2s}{dx^2}\frac{h}{2} + \ldots}.$$

Bei der unendlichen Abnahme von h nähert sich der Bogen MM' ohne Ende der entsprechenden Sehne, also das Verhältniſs dieser beiden Gröſsen ohne Ende der E i n h e i t; für $h = 0$ wird dieses Verhältniſs vollkommen $= 1$, und man hat aus der vorigen Gleichung, wenn unter einem mit $\frac{ds}{dx}$ multiplicirt wird:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

also $ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \ldots$ (1

f ü r d a s D i f f e r e n t i a l d e s B o g e n s.

2. Um eben so das Differential des Flächensegmentes $ABMP = z$ zu bestimmen, setze man $z = f(x)$, wo $f(x)$ noch eine unbestimmte Function der Abscisse x seyn soll; so wird

$$\text{Segm. } PM' = f(x+h) - f(x) = \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Nun ist aber auch, wenn man wieder statt des Bogens MM' die entsprechende Sehne berücksichtiget:

$$\text{Trapez } PM' = (MP + M'P')\frac{PP'}{2}$$
$$= \left(y + y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots\right)\frac{h}{2}$$
$$= yh + \frac{dy}{dx}\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

folglich, wenn man sogleich wieder durch h abkürzt:

$$\frac{\text{Segm. } PM'}{\text{Trap. } PM'} = \frac{\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h}{2} + \ldots}{y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{2} + \ldots}.$$

Da sich nun wieder dieser Quotient der Einheit um so mehr nähert, je kleiner h wird, und endlich für $h = 0$ vollständig $= 1$ ist; so hat man aus dieser letzten Relation, wenn man gleich mit y multiplicirt:

$$y = \frac{dz}{dx}, \quad \text{also} \quad dz = y\,dx \;\ldots\; (2$$

als Differential der Fläche.

3. Da man häufig auch die Fläche des Sectors BAM [Fig. 15, a)] ausdrücken mufs, so wollen wir noch das Differential oder Element dieser Fläche aufsuchen. Fig. 15, a)

Es ist

$$\text{Segm. } AMB = \text{Dreieck } AMP + \text{Segm. } PMB,$$

oder da $AP = x$, $PM = y$, also Dreieck $AMP = \frac{1}{2}xy$ ist, auch

$$\text{Segm. } AMB = \tfrac{1}{2}xy + \text{Segm. } PMB,$$

mithin auch

$$d.\text{Segm. } AMB = \tfrac{1}{2}d.xy + d.\text{Segm. } PMB.$$

Da aber endlich

$$d.xy = x\,dy + y\,dx \quad \text{und} \quad d.\text{Segm. } PMB = -y\,dx$$

[Form. (2; hier wird das Zeichen — gesetzt, weil die Fläche PMB abnimmt, wenn x zunimmt] ist, so hat man:

$$d.AMB = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) \;\ldots\; (3.$$

Anmerk. Nach *Leibnitzens*- oder der Methode des unendlich Kleinen, werden die obigen Ausdrücke ganz einfach auf folgende Weise gefunden:

Läfst man [Fig. 14, a)] die Abscisse $AP = x$ um ihr Differential $Pp = dx$ zunehmen, so wächst die Ordinate $MP = y$ (wenn man nämlich pm mit PM, und Mn mit AX parallel zieht) um das Stück $mn = dy$, der Bogen $BM = s$ um das Element $Mm = ds$ (das überdiefs als eine gerade Linie angesehen wird, welche verlängert zugleich die Tangente MT lie- Fig. 14, a)

fert), und die Fläche des Segmentes $ABMP = z$ um das Element $Pm = dz$. Da nun das kleine Dreieck Mmn *) dem Dreieck MPT ähnlich ist; so hat man $MP : PT = mn : Mn$ oder $y : PT = dy : dx$, und daraus Subtang. $PT = y \frac{dx}{dy}$ [vergl. §. 44., Form. (2]. Mit diesem Werthe von PT findet man aus den rechtwinkeligen Dreiecken TMN, TMP und PMN sehr leicht auch PN, MT und MN (d. i. die Formeln (4, (1, (3 des genannten Paragraphes).

Es ist ferner $Mm = \sqrt{(Mn^2 + mn^2)}$, d. i $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. (Will man streng seyn, so muſs man beweisen, daſs der Unterschied zwischen Bogen Mm und Sehne Mm ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist.)

Endlich ist, die Fläche als Trapez angesehen:

$$Pm = (y + y + dy)\frac{dx}{2} = y\,dx = dz.$$

Auch ist auf diesem Wege leicht zu sehen, daſs man für schiefwinkelige Coordinaten, wenn der Coordinatenwinkel $= \alpha$ ist, haben wird:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 - 2\,dx\,dy\,\cos.\alpha)} \text{ und } dz = y\,dx\,.\sin.\alpha.$$

Fig. 15. Was schlüſslich das Differential des Sectors BAM (Fig. 15), oder, wenn Mm das Element des Bogens ist, die Bestimmung der unendlich kleinen Fläche MAm betrifft; so ist bekanntlich, wenn die rechtwinkeligen Coordinaten der Puncte M und m durch x, y und x', y' bezeichnet werden, die Fläche des Dreiecks $MAm = \frac{yx' - xy'}{2}$ [denn es ist Dreieck $MAm =$ Dreieck AMP + Trapez Pm — Dreieck $Amp = \frac{xy}{2} + \frac{1}{2}(y + y')(x' - x) - \frac{x'y'}{2} = \frac{1}{2}(yx' - xy')$]. Nun sind im gegenwärtigen Falle diese Coordinaten für den Punct M: x, y, und für jenen m (ohne Rücksicht, ob die Ordinaten zu- oder

*) Dieses Dreieck, dessen Seiten die Elemente der Coordinaten und der Curve sind, wird gewöhnlich das charakteristische Dreieck genannt, weil die Verhältnisse der Seiten desselben die Curve charakterisiren. Auch heiſst es nach seinem Erfinder, dem berühmten englischen Geometer *Barrow* (*Newton's* Lehrer, geb. zu London 1630; gest. zu Cambridge 1677), welcher durch seine Tangenten-Methode den ersten und vielleicht wichtigsten Schritt zur Erfindung der Leibnitzischen Infinitesimalrechnung gethan hat, das *Barrow'*sche Dreieck.

abnehmen): $x+dx$, $y+dy$; also ist

$$d.AMB = \text{Dreieck } AMm = \tfrac{1}{2}[y(x+dx) - x(y+dy)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(y\,dx - x\,dy);$$

Alles mit den obigen Entwickelungen übereinstimmend.

Beispiel.

Die Gleichung der Ellipse, die rechtwinkeligen Coordinaten vom Mittelpunct gezählt, ist [Bd II., §. 56, (1]
$y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; daraus erhält man durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

und
$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}$$
$$= \frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^4 - c^2x^2}{a^2(a^2-x^2)},$$

also nach Formel (1:

$$ds = \frac{dx\sqrt{(a^4 - c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}} \;\ldots\; (m.$$

Ferner ist das Flächenelement [nach Form. (2]:

$$dz = y\,dx = \frac{b}{a}\,dx\sqrt{(a^2-x^2)} \;\ldots\; (n.$$

Endlich hat man nach Form. (3 das Element des Sectors AMB [Fig. 14, a)]:

$$d.AMB = -\left[\frac{bx^2}{a\sqrt{(a^2-x^2)}} + \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}\right]\frac{dx}{2}$$
$$= -\frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}\right]dx = -\frac{ab\,dx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}} \;..\; (p$$

§. 47.

Von den *Asymptoten* der Curven.

Läſst man den Berührungspunct einer Curve immer weiter hinaus rücken, oder vom Ursprung der Coordinaten sich immer mehr entfernen; so zeigt endlich die Lage der letzten Tangente, ob die Curve Asymptoten habe oder nicht (m. s. Bd. II., §. 62., 6.). Denn ist BL (Fig. 16) eine Asymptote der Curve QM, MT die Tangente im Puncte M, und A der Ursprung der rechtwinkeligen Coordinatenaxen AX, Fig. 16.

AY; so ist leicht zu sehen, dafs sich die Tangente MT der Asymptote LB immer mehr nähert, je weiter man den Berührungspunct M auf der Curve fortrücken läfst, und dafs endlich beide Geraden zusammenfallen, wenn dieser Punct M vom Ursprung A unendlich weit absteht; in diesem Falle fällt aber auch AT mit AB, und AS mit AC zusammen (m. vergl. auch Bd. II., §. 96., Anmerk.).

Berechnet man daher aus der gegebenen Gleichung der Curve $y=f(x)$ die Abschnitte AT und AS, welche man am einfachsten aus der Gleichung der Tangente (2, §. 45. findet, indem man (weil T und S die Durchschnittspuncte der Tangente oder Geraden MT mit den beiden Axen sind) zuerst y', dann $x'=0$ setzt, und beziehungsweise x' und y' daraus bestimmt, und setzt dann in diesen gewonnenen Ausdrücken $x=\infty$; so müssen diese respective in AB und AC übergehen, also endliche Werthe erhalten, im Falle die Curve wirklich eine Asymptote BL haben soll, und diese wird sofort durch die gefundenen Puncte B und C gehen.

a) Läuft die Asymptote BL mit der Abscissenaxe AX parallel, so wird für $x=\infty$: $x'=AB$ Unendlich und $y'=AC$ eine endliche Gröfse seyn.

b) Ist dagegen diese Asymptote mit der Ordinatenaxe AY parallel, so erhält, wenn man $y=\infty$ setzt, das auf der Abscissenaxe liegende Stück $x'=AB$ einen endlichen, das Stück $AC=y'$ aber, welches auf der Ordinatenaxe liegt, einen unendlichen Werth.

Man mufs also, um alle Asymptoten einer Curve, die sie etwa haben kann, zu entdecken und zu bestimmen, in den berechneten Ausdrücken von AT und AS nicht blofs x, sondern auch (wenn nicht etwa ohnehin schon für $x=\infty$ auch $y=\infty$ wird) $y=\infty$ setzen, und bemerken, ob dadurch beide dieser Ausdrücke, oder nur einer davon, durch die erste oder zweite Substitution einen endlichen reellen Werth erhält; wodurch in jedem Falle zugleich nach dem Vorigen die betreffende Asymptote bestimmt ist. Sollten aber AB und $AC=0$ werden, in welchem Falle die Asymptote durch den Anfangspunct der Coordinaten

ginge; so müfste man zur Festsetzung ihrer Lage in dem Quotienten $\frac{dy}{dx}$, x oder y Unendlich setzen, um dadurch die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels LBX dieser Asymptote mit der Abscissenaxe zu bestimmen. [M. s. §. 45., Gl. (1.]

Dem Gesagten zufolge erhält man nun aus Gl. (2, §. 45., wenn man nach und nach $y' = 0$ und $x' = 0$ setzt, beziehungsweise:

$$\left.\begin{aligned} -x' \text{ oder } AT &= y\frac{dx}{dy} - x \\ \text{und } y', \text{ d. i. } AS &= y - x\frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} (A;$$

und diefs sind die Ausdrücke, welche, wenn man in ihnen x oder $y = \infty$ setzt, in dem einen oder andern Fall theilweise, oder auch zusammen endliche Werthe annehmen müssen, wenn die betreffende Curve wirklich Asymptoten besitzt.

Beispiel 1.

Um zu untersuchen, ob die Linien zweiter Ordnung, deren Gleichung [Bd. II., §. 69., Gl. $(A]$ $y^2 = px + qx^2$ ist, Asymptoten besitzen, hat man, wenn diese Gleichung differentiirt wird: $2y\,dy = (p + 2qx)\,dx$, und daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p + 2qx}{2y} \text{ und } \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p + 2qx};$$

folglich ist nach den obigen Relationen $(A$:

$$AT = \frac{2y^2}{p + 2qx} - x = \frac{2(px + qx^2) - x(p + 2qx)}{p + 2qx}$$

$$= \frac{px}{p + 2qx} = \frac{p}{\frac{p}{x} + 2q},$$

$$AS = y - \frac{px + 2qx^2}{2y} = \frac{2(px + qx^2) - (px + 2qx^2)}{2y}$$

$$= \frac{px}{2\sqrt{(px + qx^2)}} = \frac{p}{2\sqrt{\left(\frac{p}{x} + q\right)}}$$

Setzt man in diesen beiden Ausdrücken $x = \infty$, wo-

durch AT in AB, und AS in AC übergeht; so erhält man:

$$AB = \frac{p}{2q} \quad \text{und} \quad AC = \frac{p}{2\sqrt{q}}.$$

Diese Ausdrücke zeigen nun, dafs wenn $q = 0$, was (Bd. II., §. 69.) für die Parabel Statt findet, oder q negativ ist, was für die Ellipse der Fall ist, die Curve keine Asymptoten hat, weil im ersten Falle AB und AC zugleich Unendlich, im letztern Falle aber AC imaginär wird; nur wenn q positiv ist, was bei der Hyperbel eintrifft, hat die Curve Asymptoten.

Um in diesem letztern Falle für den hyperbolischen Ast QM die Asymptote BL wirklich zu bestimmen, hat man, da die Gleichung der Hyperbel [Bd. II., §. 65., (2′]

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

also hier $p = \frac{2b^2}{a}$ und $q = \frac{b^2}{a^2}$ ist:

$$AB = \frac{p}{2q} = a \quad \text{und} \quad AC = \frac{p}{2\sqrt{q}} = b,$$

welche Stücke sofort, auf der Abscissen- und Ordinatenaxe beziehungsweise in der Richtung der negativen x und positiven y abgeschnitten, jene beiden Puncte B und C liefern, durch welche die gesuchte Asymptote geht (vergl. Bd. II., §. 62., 6.).

Beispiel 2.

Um zu untersuchen, ob die Curve, deren Gleichung $4xy - 3rx + ar = 0$ ist, Asymptoten habe oder nicht, erhält man durch die Differentiation:

$$4x\,dy + 4y\,dx - 3r\,dx = 0,$$

und daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3r - 4y}{4x} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{4x}{3r - 4y};$$

mithin nach (A:

$$AT = \frac{4xy}{3r - 4y} - x = \frac{8xy - 3rx}{3r - 4y}$$

$$\text{und} \quad AS = y - \frac{3rx - 4xy}{4x} = \frac{8y - 3r}{4}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken zuerst $x = \infty$, für welchen Werth, da aus der Gleichung der Curve

$$y = \frac{3rx - ar}{4x} = \tfrac{1}{4}\left(3r - \frac{ar}{x}\right)$$

folgt, $y = \frac{3}{4}r$ wird; so erhält man (da wieder AT in AB, und AS in AC übergeht):

$$AB = \infty \quad \text{und} \quad AC = \tfrac{3}{4}r.$$

Setzt man aber $y = \infty$, für welchen Werth, da aus der gegebenen Gleichung der Curve $x = \frac{-ar}{4y - 3r}$ folgt, $x = 0$ wird; so erhält man

$$AB = \frac{8x - \frac{3rx}{\infty}}{\frac{3r}{\infty} - 4} = 0 \quad \text{und} \quad AC = \infty.$$

Die erstern Werthe von $AB = \infty$ und $AC = \frac{3}{4}r$ zeigen, dafs die vorliegende Curve eine Asymptote hat, welche in dem Abstand von $\frac{3}{4}r$ mit der Abscissenaxe (oberhalb derselben) parallel läuft. Die letztern Werthe von $AB = 0$ und $AC = \infty$ hingegen verrathen noch eine zweite Asymptote dieser Curve, die zugleich mit der Ordinatenaxe zusammenfällt; sie zeigen nämlich, dafs diese Axe selbst eine Asymptote der Curve bildet (m. vergl. Bd. II, §. 155.).

§. 48.

Kennzeichen für die *Convexität* und *Concavität* der Curven.

Mit Hilfe der Differentialrechnung läfst sich auch ein einfaches Kennzeichen aufstellen, welches angibt, ob eine Curve an einer betreffenden Stelle gegen die Abscissenaxe convex (erhaben) oder concav (hohl) ist. Um dieses abzuleiten, seyen in Fig. 14, *a*) und *b*) für einen beliebigen Punct M der Curve BMM'', $AP = x$, $PM = y = f(x)$ die rechtwinkeligen Coordinaten, und $PP' = P'P'' = h$ eine willkürliche Zunahme der Abscisse; folglich $P'M' = f(x+h)$ und $P''M'' = f(x+2h)$ die zugehörigen Ordinaten. Zieht man durch M und M' die Secante $SMM'O$, und noch zur Fig. 14.

Abscissenaxe AX die Parallelen MV, $M'V'$; so erhält das Ordinatenstück $M''O$ offenbar in den beiden Fällen a) und b) entgegengesetzte Werthe, so, dafs wenn man dasselbe von der Curve aus gegen die Secante hin zählt, dieses in a), wo die Curve gegen die Abscissenaxe concav ist (wie die Ordinate), positiv, dagegen in b), wo die Curve gegen diese Axe convex angenommen ist, negativ ausfällt *).

Nun ist

$$M'Q = f(x+h) - f(x) = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots;$$

ferner wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke MVO und MQM':

$$OV = 2M'Q = 2\frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \ldots,$$

$$P''O = MP + VO = y + 2\frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \ldots$$

und

$$P''M'' = f(x+2h) = y + 2\frac{dy}{dx}h + 2\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \ldots;$$

folglich

in a): $M''O = P''O - P''M'' = -\frac{d^2y}{dx^2}h^2 - Ah^3 + \ldots,$

und in b): $M''O = P''M'' - P''O = +\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + Ah^3 + \ldots$

Da sich diese Untersuchung immer nur auf eine gewisse Stelle der Curve, hier auf die nächsten bei M liegenden Puncte bezieht; so kann man wieder h so klein annehmen, dafs das erste Glied in diesen Reihen gröfser als die Summe aller folgenden Glieder, und dadurch also das Zeichen derselben lediglich von jenem des ersten Gliedes abhängig wird. Da ferner das Zeichen dieser ersten Glieder von h, welches hier in der zweiten Potenz erscheint, unabhängig ist; so hängt endlich das Zeichen von $M''O$ offenbar nur von je-

*) Bekanntlich heifst ein Bogen einer Curve nach irgend einer Gegend hin convex oder concav, je nachdem der Durchschnitt der beiden an den Endpuncten dieses Bogens gezogenen Tangenten nach dieser oder nach der entgegengesetzten Gegend hin fällt.

nem des Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ ab. Da also bei positiven Ordinaten nach dem Vorigen $M''O$ in a) positiv und in b) negativ, und bei negativen Ordinaten, wenn nämlich der Curvenast unterhalb der Abscissenaxe liegt, $M''O$ in a) ebenfalls negativ, in b) aber positiv seyn soll; so mufs für positive y der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ in a) negativ und in b) positiv, für negative y hingegen in a) positiv und in b) negativ seyn; woraus sofort folgende allgemeine Regel fliefst:

eine Curve ist in irgend einem Puncte gegen die Abscissenaxe *concav* oder *convex*, je nachdem der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ für diesen Punct mit der Ordinate y das *entgegengesetzte* oder *dasselbe* Zeichen erhält.

Da man endlich der Abscissenaxe alle möglichen Lagen geben kann, so läfst sich auf diese Weise auch die Convexität und Concavität einer Curve nach jeder Gegend hin untersuchen.

Beispiel 1.

Um zu untersuchen, ob die Curve $y^2 = px$ gegen die Abscissenaxe convex oder concav sey, hat man

$$2y\,dy = p\,dx \quad \text{und} \quad 2y\,d^2y + 2\,dy^2 = 0,$$

$$\text{also daraus } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2;$$

oder, da aus der erstern Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$ folgt, auch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3}.$$

Da nun dieser Differentialquotient für positive Ordinaten negativ und für negative Ordinaten positiv ausfällt, also immer das entgegengesetzte Zeichen von y besitzt; so ist die betreffende Curve sowohl ober-, wie unterhalb der Abscissenaxe gegen diese concav. Und in der That auch, denn es ist die gegenwärtige Curve die gemeine Parabel auf ihre Hauptaxe bezogen.

Beispiel 2.

Für die Curve, deren Gleichung ist:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2,$$

folgt durch ein zweimaliges Differentiiren:

$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0$ und $dx^2 + dy^2 + (y-\beta)\,d^2y = 0$;

also ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\alpha}{y-\beta} \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{y-\beta}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \frac{-1}{y-\beta}\left[1 + \frac{(x-\alpha)^2}{(y-\beta)^2}\right],$$

oder endlich mit Rücksicht auf die gegebene Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\gamma^2}{(y-\beta)^3}.$$

Dieser Werth zeigt aber, daſs die Curve in jenen Puncten, in welchen $y > \beta$ ist, concav, in jenen Puncten hingegen, in welchen $y < \beta$ ist, convex gegen die Abscissenaxe sey. Es ist aber in der That die in Rede stehende Curve
Fig. 9. ein Kreis (Fig. 9), für welchen $A'X$ die Abscissenaxe, und $A'Q = \alpha$, $QC = \beta$ die Coordinaten des Mittelpunctes sind (Bd. II., §. 15.), so, daſs wenn ab ein mit der Axe $A'X$ paralleler Durchmesser ist, der obere Halbkreis aMb, für welchen die Ordinaten $PM = y > \beta$ sind, der Abscissenaxe die concave, der untere Halbkreis $aM'b$ hingegen, für welchen die Ordinaten $PM' = y < \beta$ ausfallen, dieser Axe die convexe Seite zukehrt.

Von den *berührenden* Curven.

§. 49.

Es sey hier wieder

$$y = f(x) \;.\;.\;. \;(1$$

Fig. 17. die Gleichung einer krummen Linie QMN (Fig. 17), und

$$y' = \varphi(x') \;.\;.\;. \;(2$$

die einer zweiten Curve $Q'MN'$. Haben beide Curven den Punct $M(x, y)$ gemein, und läſst man die Abscisse $AP = x$ um das beliebige Stück $Pp = h$ zunehmen; so folgt, wenn

in diesem Puncte p die Ordinaten gezogen werden,

für die Curve 1): $pm = f(x+h)$

$$= y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

und » » » 2): $pm' = \varphi(x'+h)$

$$= y' + \frac{dy'}{dx'}h + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

woraus sogleich hervorgeht, dafs die beiden Curven in M um so mehr zusammenfallen oder sich in diesem Puncte um so inniger berühren werden, je mehr correspondirende Glieder dieser beiden Reihen, von Vorne herein, für die kleinsten Werthe von h einander gleich sind. Findet daher aufser der Bedingung von $y' = y$ (und $x' = x$) noch jene $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$ Statt (wodurch die beiden ersten Glieder wechselweise gleich werden), so sagt man, die beiden Curven 1) und 2) berühren sich in M in der ersten Ordnung, oder es finde zwischen ihnen eine Berührung der ersten Ordnung Statt. Besteht ferner aufser den beiden vorigen, noch die Bedingungsgleichung $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ (wodurch also die drei ersten Glieder in beiden Reihen correspondirend einander gleich werden), so sagt man, dafs zwischen diesen beiden Curven in M eine Berührung der zweiten Ordnung Statt finde, u. s. w., so, dafs allgemein zwischen diesen beiden Curven in M eine Berührung der n^{ten} Ordnung angenommen wird, wenn die correspondirenden Differentialquotienten aus beiden Gleichungen (1 und (2 der Reihe nach, bis einschlüssig zu jenem der n^{ten} Ordnung, für diesen Punct M einander gleich werden.

Besteht aber in M zwischen den beiden Curven 1) und 2) eine Berührung von einer gewissen Ordnung, so kann keine dritte Curve, wenn sie nicht mit der ersten eine Berührung von einer wenigstens eben so hohen Ordnung bildet, zwischen diesen beiden Curven 1) und 2) durchgehen. Denn es besitze z. B. die zweite Curve mit der ersten im Puncte M eine Berührung der n^{ten} Ordnung, so dafs für

diesen Punct

$$y' = y,\ \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny'}{dx'^n} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Statt findet, und sey $Y = F(X)$ die Gleichung einer dritten Curve $Q''MN''$, für welche die Bedingungsgleichungen

$$Y = y,\ \frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

bestehen sollen, so, dafs zwischen dieser dritten und der ersten Curve blofs eine Berührung der $n-1^{\text{sten}}$ Ordnung Statt findet; so hat man, wie oben, für die Ordinate der dritten Curve:

$$pm'' = F(X+h) = Y + \frac{dY}{dX}h + \frac{d^2Y}{dX^2}\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Sucht man nun den Unterschied zwischen den Ordinaten pm, pm' und pm, pm''; so erhält man mit Rücksicht auf die vorigen Bedingungsgleichungen:

$$d)\quad pm - pm' = \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}y'}{dx'^{n+1}}\right)\frac{h^{n+1}}{2.3..(n+1)} + ..$$

$$\text{und}\quad pm - pm'' = \left(\frac{d^ny}{dx^n} - \frac{d^nY}{dX^n}\right)\frac{h^n}{2.3...n} + ..,$$

wobei man in beiden Differenzen nur das erste Glied der Reihe zu berücksichtigen braucht, weil man h wieder so klein nehmen kann, dafs schon dieses Glied allein entscheidet. Da nun in der erstern Differenz h in der $n+1^{\text{sten}}$, und in der letztern nur in der n^{ten} Potenz in diesem ersten Gliede vorkommt; so ist klar, dafs für die kleinsten Werthe von h

$$pm - pm' < pm - pm'',\ \text{d. i.}\ mm' < mm''$$

ist, also die dritte Curve, weit gefehlt, dafs sie zwischen den beiden erstern durchgehen könnte, sich von der Curve (1 mehr entfernt als die zweite.

§. 50.

Es sey nun die Curve (1, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, vollständig, hingegen die Curve (2, deren Gleichung ist $y' = \varphi(x')$, blofs der Gattung nach und noch

keinesweges hinsichtlich der darin vorkommenden beständigen Gröfsen, die noch unbestimmt seyn sollen, gegeben *); so können diese letztern aus den Bedingungsgleichungen des vorigen Paragraphes dergestalt bestimmt werden, dafs diese Curve (2, je nach der Anzahl der in $y' = \varphi(x')$ vorkommenden Constanten, mit der erstern Curve eine Berührung von einer gewissen Ordnung eingeht. Enthält z. B. die Gleichung $y' = \varphi(x')$ nur zwei unbestimmte Constanten, so kann man diese aus den beiden Gleichungen $y' = y$ und $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$ [wobei der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ aus der gegebenen Gleichung $y = f(x)$ der Curve (1 zu nehmen ist] vollständig bestimmen, und daher die Curve (2 auch nur der Bedingung unterwerfen, dafs sie mit der Curve (1 im Puncte $M(x, y)$ eine Berührung der ersten Ordnung eingehe. Soll dagegen die Curve (2 jene (1 in der zweiten Ordnung berühren, so fordern die drei Bedingungsgleichungen $y' = y$, $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, welche in diesem Falle bestehen müssen, dafs die Gleichung $y' = \varphi(x')$ wenigstens drei unbestimmte Constanten enthalte, u. s. w.; allgemein also wird die Curve (2 mit jener (1 eine Berührung der n^{ten} Ordnung nur dann eingehen können, wenn die Gleichung $y' = \varphi(x')$, dieser blofs der Gattung nach bestimmten Curve (2 wenigstens $n+1$ unbestimmte constante Gröfsen enthält, welche dann aus den betreffenden $n+1$ Bedingungsgleichungen zu bestimmen sind; oder es kann umgekehrt eine Curve, deren Gleichung m unbestimmte Constanten enthält, mit einer andern vollständig gegebenen krummen Linie höchstens eine Berührung der $m-1^{sten}$ Ordnung eingehen.

*) So ist $y' = Ax' + B$ die Gleichung einer geraden Linie, aber noch nicht vollkommen bestimmt, so lange nicht die beiden Constanten A und B durch was immer für Bedingungen festgesetzt sind; diese Linie bleibt aber nichts destoweniger, A und B mögen bestimmt seyn oder nicht, eine Gerade: folglich ist sie durch diese Gleichung der Gattung nach bestimmt.

Die nachstehenden Beispiele sollen das hier Vorgetragene erläutern.

§. 51.

Beispiele.

1. Es sey die Curve (2 eine gerade Linie, also ihre Gleichung $y' = ax' + b$ $[y' = \varphi(x')]$, und es sollen die beiden Constanten a und b so bestimmt werden, daſs die erstere eine gegebene Curve $y = f(x)$ im Puncte x, y in der ersten Ordnung berührt.

Aus der gegebenen Gleichung folgt, wenn man differentiirt:

$$\frac{dy'}{dx'} = a;$$

man hat also nach der ersten Bedingungsgleichung

$$(y' = y,\ x' = x):\quad y = ax + b,$$

ferner nach der zweiten

$$\left(\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}\right):\quad a = \frac{dy}{dx};$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man für die unbestimmten Gröſsen a und b die Werthe:

$$a = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad b = y - \frac{dy}{dx}x;$$

folglich ist die Gleichung der die Curve $y = f(x)$ im Puncte x, y berührenden Geraden, also der Tangente:

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

wobei x', y' die allgemeinen Coordinaten bezeichnen, und der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung $y = f(x)$ der gegebenen Curve zu entwickeln ist [vergl. §. 45., Gleichung (2] *).

*) Daſs aber diese berührende Gerade in der That der von den alten Geometern aufgestellten Definition einer Tangente Genüge leistet, geht daraus hervor, daſs diese mit der Curve $y = f(x)$ erstlich nur den Punct x, y gemein hat, und zweitens nach dem, was oben im §. 49. gezeigt wurde, durch

Anmerk. Aus dieser Gleichung der Tangente kann man nun auch auf einem ganz verschiedenen Wege die in §. 44. entwickelte Formel für die Subtangente, daraus die der Subnormale, u. s. w. ableiten. Denn es ist [Fig. 14., *a*)] die Subtangente $PT = AT + AP = AT + x$, oder, da AT der Werth von x' in der obigen Gleichung der Tangente für $y' = 0$, nämlich (da hier AT negativ ist) $AT = -x' = -x + y\frac{dx}{dy}$ ist, auch, wie in §. 44.: $PT = -x + y\frac{dx}{dy} + x = y\frac{dx}{dy}$. Ist AT positiv, wie in Fig. 15.; so hat man $PT = AT - AP = AT - x$, oder, da hier aus der Gleichung der Tangente für $y' = 0$, $AT = x' = x - y\frac{dx}{dy}$ folgt, wieder: Fig. 14, *a*) Fig. 15.

$$PT = x - y\frac{dx}{dy} - x = -y\frac{dx}{dy};$$

wobei sich das Zeichen — auf die entgegengesetzte Lage von PT bezieht.

Eben so ist in Fig. 14, *b*): Fig. 14, *b*)

$$PT = AP - AT = x - \left[x - y\frac{dx}{dy}\right] = y\frac{dx}{dy}.$$

2. Es sey die Curve (2 ein Kreis vom Halbmesser γ, dessen Mittelpunct die Coordinaten α, β besitzt; so ist ihre Gleichung:

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \gamma^2 \quad [y' = \varphi(x')],$$

also wenn man differentiirt:

$$(x' - \alpha)\, dx' + (y' - \beta)\, dy' = 0 \ldots (m,$$

und daraus $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{x' - \alpha}{y' - \beta}$.

Soll nun der Kreis mit der Curve $y = f(x)$ eine Berührung der ersten Ordnung eingehen, so erhält man aus den beiden Bedingungsgleichungen $y' = y$ (also auch $x' = x$) und $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$ sofort:

diesen Punct keine andere Gerade zwischen der erstern und der Curve möglich ist; weil diese die Curve zum wenigsten auch in der ersten Ordnung berühren müfste, in welchem Falle sie, da man die nämlichen Bedingungsgleichungen wie vorhin erhält, mit der erstern Geraden zusammenfiele, und weil sie ferner keine Berührung höherer Ordnung mit der Curve eingehen kann, da ihre Gleichung ebenfalls nur zwei constante Gröfsen enthält.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2 \;\ldots\; (1$$

$$\text{und} -\frac{x-\alpha}{y-\beta}=\frac{dy}{dx} \;\ldots\; (2.$$

Da sich aber aus diesen beiden Gleichungen (1 und (2 nicht alle drei unbestimmten constanten Gröfsen α, β, γ bestimmen lassen; so mufs es unzählig viele Kreise geben, welche sämmtlich der Bedingung, die Curve $y=f(x)$ im Puncte x, y in der ersten Ordnung zu berühren, Genüge leisten.

Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen α und β, oder, was auf dasselbe führt, $x-\alpha$ und $y-b$; so hat man zuerst aus (2: $y-\beta=-(x-\alpha)\frac{dx}{dy}$, und wenn dieser Werth in der Gleichung (1 substituirt wird:

$$(x-\alpha)^2\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)=\gamma^2,$$

daraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} x-\alpha=\dfrac{\mp\gamma\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} \\ \text{und mit diesem Werth ist} \\ y-\beta=\dfrac{\pm\gamma\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} \end{array}\right\} \text{I.}$$

In diesen Ausdrücken I. ist der Halbmesser γ noch unbestimmt und kann willkürlich angenommen werden; was mit der vorigen Bemerkung übereinstimmt, dafs es unendlich viele Kreise gibt, welche die gegebene Curve $y=f(x)$, aus welcher Gleichung wieder die in I. vorkommenden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$ zu nehmen sind, im Puncte x, y berühren. Um den geometrischen Ort der Mittelpuncte aller dieser Kreise zu finden, bemerke man, dafs sich die obige Gleichung (2 auch so schreiben läfst:

$$\beta-y=-\frac{dx}{dy}(\alpha-x) \;\ldots\; (3,$$

unter welcher Form man in ihr sogleich die Gleichung der durch den Berührungspunct x, y gehenden Normale erkennt, in welcher α, β die allgemeinen Coordinaten vorstellen [m. s. §. 45., Gl (3]; da nun in der That die Coordinaten α, β (so wie auch γ) von einem dieser Berührungs-

kreise zum andern genommen, veränderlich sind; so folgt, daſs die Mittelpuncte aller dieser genannten Kreise in der durch den Berührungspunct x, y gehenden Normale MN (Fig. 18) der Curve (QS) $y = f(x)$ liegen, und daſs also auch eine in diesem Puncte x, y an die Curve gezogene Tangente MT zugleich eine gemeinschaftliche Tangente an alle diese Berührungskreise seyn wird*). Fig. 18.

Da es offenbar unter diesen unzähligen Kreisen einen geben muſs, welcher die Curve inniger, als alle übrigen berührt und dieſs nach dem Vorhergehenden kein anderer seyn kann, als jener, welcher mit der Curve im Puncte x, y eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht; so wollen wir sofort zur Bestimmung dieses Kreises übergehen.

Krümmungskreis.

§. 52.

Damit der im vorigen Beispiel angenommene Kreis mit der Curve (1 eine Berührung der zweiten Ordnung eingehe, muſs nebst den vorigen beiden Bedingungsgleichungen auch noch die folgende $\frac{d^2 y'}{d x'^2} = \frac{d^2 y}{d x^2}$ Statt finden; welche sofort zur Bestimmung des in I. noch unbestimmten Halbmessers γ dienet. Es ist aber, wenn man die obige Gleichung (m noch einmal differentiirt und dabei dx' als constant annimmt: $dx'^2 + dy'^2 + (y' - \beta)\, d^2 y' = 0$, und daraus

$$\frac{d^2 y'}{d x'^2} = - \frac{1}{y' - \beta} \left(1 + \frac{d y'^2}{d x'^2}\right),$$

oder wenn man (zufolge der angeführten Bedingungsgleichungen) die Accente wegläſst und für $\frac{dy}{dx}$ den Werth aus

*) Man gelangt zu demselben Resultate, vielleicht auf eine noch anschaulichere Weise, wenn man berücksichtiget, daſs zur Bestimmung der Mittelpuncte aller dieser Kreise, weil diese vom Halbmesser unabhängig seyn muſs, nur aus den beiden in I. aufgestellten Gleichungen γ eliminirt werden darf; wodurch man aber wieder die obige Gleichung der Normale erhält.

der Gl. (2 des vorigen Paragraphes substituirt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{(y-\beta)^3} = \frac{-\gamma^2}{(y-\beta)^3}.$$

Substituirt man endlich in dieser letzten Gleichung für $y-\beta$ den bereits in I. gefundenen Werth, so erhält man auch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\gamma\, dx^3} \text{ und daraus } \gamma = \mp \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}$$

für den Halbmesser desjenigen Berührungskreises, für welchen die Berührung mit der Curve $y=f(x)$ im Puncte x, y in der zweiten Ordnung Statt findet, und der nun auf diese Weise vollkommen bestimmt und festgesetzt ist.

Da dieser letztere Kreis zugleich die Eigenschaft besitzt, dafs er unter allen berührenden Kreisen mit der Curve im Puncte x, y am innigsten zusammenfällt, also auch seine Krümmung mit jener der Curve in diesem Puncte x, y am nächsten kommt, so, dafs die Krümmung der Curve im besagten Punct durch jene dieses Kreises so zu sagen gemessen werden kann; so wird dieser Kreis insbesondere Krümmungskreis (*circulus osculator* oder *curvaturae*) und sein Halbmesser Krümmungshalbmesser (*radius osculi*) der Curve $y=f(x)$ im Puncte x, y genannt*).

Man hat also für den Krümmungskreis, wenn dieser für γ gefundene Werth in I. des vorigen Paragraphes substituirt wird, folgende Formeln:

Fig. 19. *) Da die Stärke der Krümmung des Bogens AB (Fig. 19) irgend einer Curve durch den Winkel w bestimmt wird, welchen die beiden an den Endpuncten A, B dieses Bogens gezogenen Tangenten einschliefsen; da ferner im Kreise dieser Winkel dem Mittelpunctswinkel ACB gleich ist, der in dem nämlichen Kreise für gleiche Bogen gleich grofs ist; so folgt, dafs der Kreis (die einzige krumme Linie von dieser Eigenschaft) durchaus eine gleichförmige oder dieselbe Krümmung besitzt, die noch überdiefs, wie man leicht sieht, dem Halbmesser umgekehrt proportionirt ist. Aus diesem Grunde ist auch der Kreis ganz dazu geeignet, um die Stärke der Krümmung einer Curve an irgend einer Stelle zu messen oder zu beurtheilen.

$$
\left.
\begin{aligned}
x - \alpha &= \frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right) = \frac{dy}{dx}\left\{\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right\} \\
y - \beta &= -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y} = -\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \\
\gamma &= \mp \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y} = \mp \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \; {}^{*)}
\end{aligned}
\right\} \text{II.}
$$

Hinsichtlich der doppelten Zeichen, welche im Ausdrucke von γ vorkommen, mufs man bemerken, dafs für das obere der Krümmungshalbmesser positiv ausfällt, wenn die Curve $y = f(x)$ (aus welcher Gleichung nämlich die in den vorigen Formeln enthaltenen Differentialquotienten zu nehmen sind) gegen die Abscissenaxe concav ist; dagegen negativ wird, wenn diese gegen die genannte Axe convex ist (weil, §. 48., $\frac{d^2y}{dx^2}$ im ersten Falle negativ und im zweiten positiv ausfällt); das Umgekehrte gilt für das untere Zeichen.

Da nun der Krümmungshalbmesser zufolge des vorigen Paragraphes in der Richtung der Normale liegt, und man übereingekommen ist, jene Lage desselben, welche er bei einer gegen die Abscissenaxe hohlen Curve erhält, als die positive anzusehen, in welchem Falle offenbar der Mit-

*) Nimmt man bei der zweiten Differentiation, nicht wie hier, dx als constant, sondern, was allgemeiner ist, als veränderlich an; so findet man unter dieser Voraussetzung ohne Schwierigkeit:

$$x - a = \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \quad y - \beta = \frac{-dx\,(dx^2 + dy^2)}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

$$\text{und} \quad \gamma = \mp \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x};$$

welche Ausdrücke für $d^2x = 0$ wieder, wie es seyn mufs, in die vorigen übergehen.

telpunct des Krümmungskreises in der Normale selbst, bei einer gegen die Abscissenaxe convexen Curve aber in ihrer Verlängerung liegt; so wird von diesen doppelten Zeichen gewöhnlich nur das obere oder negative beibehalten.

Anmerk. Eine bemerkenswerthe und sonderbar scheinende Eigenschaft des Krümmungskreises, die er übrigens mit allen berührenden Curven von gerader Ordnung gemein hat, ist, dafs er die Curve $y = f(x)$, indem er diese berührt, zugleich auch schneidet.

Fig. 17. Denn stellt QMN (Fig. 17) die Curve, $Q'MN'$ den Berührungskreis vor; so ist, §. 49., Gl. d), da hier $n = 2$ ist, und wenn man Kürze halber den Coefficienten von h^3 durch P bezeichnet:

$$pm - pm' = mm' = Ph^3 + \ldots$$

Eben so ist, wenn man $Pp' = -h$ nimmt und in p' die Ordinaten zieht:

$$\mu\mu' = -Ph^3 + \ldots,$$

so, dafs also für die kleinsten Werthe von h, für welche die Zeichen der ersten Glieder entscheidend sind, diese beiden Differenzen mm' und $\mu\mu'$ entgegengesetzte Zeichen erhalten; woraus sofort folgt, dafs wenn der Krümmungskreis gegen N hin unterhalb der Curve liegt, er gegen Q zu, oberhalb derselben liegen mufs und umgekehrt, so, dafs dieser die Curve in der That in M durchschneidet.

Das hier Erwiesene gilt offenbar zugleich für alle Berührungscurven von gerader Ordnung, weil die obige Differenz mm' in diesem Falle immer mit einer ungeraden Potenz von h anfängt; während bei den berührenden Curven von ungerader Ordnung, dieses erste Glied der Reihe mit einer geraden Potenz von h verbunden ist, also sein Zeichen nicht ändert, wenn man $+h$ in $-h$ verwandelt; und daher findet auch bei diesen kein Durchschneiden mit der Curve $y = f(x)$ im Berührungspuncte Statt.

§. 53.

Beispiel.

Um den Vortrag des vorigen Paragraphes durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir den Krümmungshalbmesser für die Linien zweiter Ordnung aufsuchen.

Die Gleichung dieser Linien, die Abscissen vom Schei-

tel gezählt, ist [Bd. II., §. 69., (A)]:

$$y^2 = px + qx^2 \quad [y = f(x)]$$

und daraus folgt

$$2y\,dy = (p + 2qx)\,dx \text{ und } 2y\,d^2y + 2\,dy^2 = 2q\,dx^2;$$

also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p + 2qx}{2y} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y}\left(q - \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \frac{4qy^2 - (p + 2qx)^2}{4y^3}.$$

Diese Werthe in der dritten Formel von II. des vorhergehenden Paragraphes substituirt, geben (wenn der obigen Bemerkung gemäſs nur das obere Zeichen beibehalten wird):

$$\gamma = \frac{-4y^3\left[1 + \frac{(p + 2qx)^2}{4y^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{4qy^2 - (p + 2qx)^2} = \frac{-[4y^2 + (p + 2qx)^2]^{\frac{3}{2}}}{2[4qy^2 - (p + 2qx)^2]}$$

oder wenn man im Nenner für y^2 den Werth aus der gegebenen Gleichung setzt, und Zähler und Nenner mit -1 multiplicirt:

$$\gamma = \frac{[4y^2 + (p + 2qx)^2]^{\frac{3}{2}}}{2p^2}.$$

Bezeichnet man die Normale der Linien zweiter Ordnung durch n, so ist §. 44., Form. (3:

$$n = y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}[4y^2 + (p + 2qx)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{also } 8n^3 = [4y^2 + (p + 2qx)^2]^{\frac{3}{2}};$$

folglich auch einfacher:

$$\gamma = \frac{8n^3}{2p^2} = \frac{n^3}{(\frac{1}{2}p)^2} \ldots (s,$$

und da p den Parameter bezeichnet, so ist in den Linien zweiter Ordnung der Krümmungshalbmesser für irgend einen Punct der Curve, gleich der dritten Potenz der Normale dieses Punctes, dividirt durch das Quadrat des halben Parameters.

Da im Scheitel ($x = 0$, $y = 0$) $n = \frac{1}{2}p$ ist, so folgt für diesen Punct:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}p \ldots (s'.$$

Da der Mittelpunct des Krümmungskreises (§. 51.) in der durch den Berührungspunct gehenden Normale liegt, diese aber nach den, am betreffenden Orte erläuterten Methoden, leicht für jeden Punct zu construiren ist; so ist es überflüssig, auch noch die Coordinaten α, β dieses Mittelpunctes zu bestimmen, und bleibt solches sonach dem eigenen Fleiſse des Studirenden überlassen.

Wendet man nun die obige Formel (s auf die einzelnen Linien der zweiten Ordnung an, so hat man:

a) Für die Ellipse, die Abscissen vom Mittelpunct aus gezählt [Bd. II., §. 97.; Gl. (7]:

$$n = \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^4 - c^2 x^2)} \text{ und (§. 69.) } \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a};$$

mithin

$$\gamma = \frac{b^3}{a^6}(a^4 - c^2 x^2)^{\frac{3}{2}} : \frac{b^4}{a^2} = \frac{(a^4 - c^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}, \text{ wobei } c^2 = a^2 - b^2 \text{ ist.}$$

b) Für die Hyperbel ist eben so (Bd. II., §. 97. u. 69.):

$$n = \frac{b}{a^2}\sqrt{(c^2 x^2 - a^4)} \text{ und } \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a};$$

$$\text{daher } \gamma = \frac{b^3}{a^6}(c^2 x^2 - a^4)^{\frac{3}{2}} : \frac{b^4}{a^2} = \frac{(c^2 x^2 - a^4)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b};$$

welches Resultat auch aus dem vorigen Werthe von γ gefunden wird, wenn man dort statt b, $b\sqrt{(-1)}$ setzt.

c) Für die Parabel endlich ist

$$n = \sqrt{(px + \tfrac{1}{4}p^2)},$$

$$\text{folglich } \gamma = (px + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} : \tfrac{1}{4}p^2 = \frac{(p + 4x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}.$$

Von den *Evoluten* der krummen Linien.

§. 54.

Da die Coordinaten des Mittelpunctes α, β des Krümmungskreises an den Punct x, y der Curve (1 $[y = f(x)]$ und dessen Halbmesser γ Functionen von x sind; so sind diese drei Gröſsen von einem Punct der Curve zum andern genommen, veränderlich. Denkt man sich an alle Puncte dieser Curve (1 die Krümmungskreise gezogen,

so bildet die Aufeinanderfolge aller ihrer Mittelpuncte eine gewisse Curve, oder es liegen, wenn man lieber will, die sämmtlichen Mittelpuncte dieser Kreise in einer Curve, die wir sofort bestimmen wollen.

1. Die Gleichungen, aus denen wir in den vorhergehenden Paragraphen (§§. 51., 52.) die Werthe von α, β, γ gefunden haben, waren:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2 \quad \ldots (1$$

$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0 \quad \ldots (2$$

$$dx^2 + dy^2 + (y-\beta)\,d^2y = 0 \quad \ldots (3$$

und davon ist die zweite, wie wir gesehen haben, da sie auch die Form annimmt

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x) \quad \ldots (a$$

die Gleichung der Normale MO (Fig. 20) für den Punct M Fig. 20.
(x, y) der Curve (1 oder $BM'C$. Differentiirt man nun die Gleichungen (1 und (2 in Bezug auf alle darin vorkommenden Gröfsen, und sieht dabei y, α, β und γ als Functionen von x an; so erhält man:

$$(x-\alpha)\,dx - (x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,dy - (y-\beta)\,d\beta = \gamma\,d\gamma$$

$$\text{und } dx^2 - d\alpha\,dx + dy^2 - d\beta\,dy + (y-\beta)\,d^2y = 0$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (2 und (3 auch:

$$(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,d\beta = -\gamma\,d\gamma \quad \ldots (4$$

$$\text{und } d\alpha\,dx + d\beta\,dy = 0 \quad \ldots (5.$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{d\beta}{d\alpha},$$

und wenn dieser Werth in der obigen Gleichung (a substituirt wird, so geht dieselbe in folgende über:

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha) \quad \ldots (6$$

welche sofort zeigt, dafs die Normale MO, mit deren Richtung immer der Krümmungshalbmesser zusammenfällt, eine *Tangente* an die in Untersuchung stehende Curve der Mittelpuncte DOE im Puncte α, β bildet.

2. Setzt man diesen letzten Werth von $\gamma - \beta$ in die Gleichungen (1 und (4, so erhält man

$$(x-\alpha)^2\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)=\gamma^2 \text{ und } (x-\alpha)\left(d\alpha+\frac{d\beta^2}{d\alpha}\right)=-\gamma d\gamma$$

folglich auch, wenn man aus diesen beiden letzten Gleichungen $x - \alpha$ eliminirt:

$$d\gamma = \sqrt{(d\alpha^2 + d\beta^2)},$$

und diese Relation zeigt, dafs das Differential des Krümmungshalbmessers dem Differential der Mittelpunctscurve [§. 46., (1] gleich ist, oder dafs der Krümmungshalbmesser nach *denselben* Differenzen, wie der Bogen der Curve *DOE*, deren allgemeine Coordinaten α, β sind, variirt *).

Diese beiden Eigenschaften 1. und 2. nun zusammengenommen, charakterisiren die fragliche Mittelpunctscurve *DOE* hinlänglich: stellt man sich nämlich vor, dafs über die convexe Seite dieser Curve ein vollkommen biegsamer, undehnbarer Faden gelegt und von dieser nach und nach so abgewickelt werde, dafs er immer straff angespannt bleibt; so wird dieser Faden, wenn er bereits bis *O* abgewickelt worden, in diesem letztern Puncte eine Tangente *OM* an die Curve *DOE* bilden. Liegt nun der Endpunct *M* des Fadens in der Curve *MM'C* [Curve (1] und setzt man die Abwicklung z. B. bis *O'* fort, wodurch der Faden die Lage der in *O'* gezogenen Tangente *M'O'* erhält; so mufs zufolge der zweiten Eigenschaft, nämlich wegen $O'M' - OM =$ Bog. OO', das Ende des Fadens *M'* oder der beschreibende Punct immer noch in dieser Curve *BM'C*

*) Es ist nämlich, wenn man das Element des Bogens der Mittelpunctscurve wieder durch ds bezeichnet:

$$ds = \sqrt{(d\alpha^2 + d\beta^2)},$$

also zufolge der obigen Relation: $d\gamma = ds$, oder wenn c eine Constante bezeichnet, auch $d\gamma = d(s+c)$, und daher:

$$7)\quad \gamma = s + c.$$

Für einen zweiten Punct ist eben so: $\gamma' = s' + c$; folglich $\gamma - \gamma' = s - s'$.

liegen, so, dafs er dieselbe keinen Augenblick verlassen, sondern eigentlich durch diese Abwicklung beschrieben hat. Weil aber auf diese Weise die Curve (1 oder BMC durch Abwicklung oder Evolution entstanden ist; so wird die Curve der Mittelpuncte DOE die Evolute oder Abgewickelte (*développée*) der gegebenen BMC, jene BMC aber, in Bezug auf diese, die Evolvente oder durch Abwicklung erzeugte (*développante*) genannt. Man sieht hieraus, dafs die Evolute in Hinsicht auf ihre Evolvente ungefähr das ist, was der Mittelpunct des Kreises in Bezug auf die Peripherie desselben, dafs sich aber der Halbmesser dabei von einem Puncte der Evolvente zum andern ändert.

Da übrigens der Mittelpunct des Krümmungskreises zugleich der Durchschnitt zweier nächsten Normalen ist*); so enthält die Curve der Mittelpuncte oder die Evolute DOE zugleich auch alle diese Durchschnittspuncte; was man auch schon ohne weitere Entwicklung daraus erkennen kann, dafs der Durchschnittspunct L mit der Curve DOE um so mehr zusammenfällt, je mehr sich die beiden Puncte O und O' einander nähern.

3. Um endlich die Gleichung der, der gegebenen Curve (1, $y = f(x)$ entsprechenden Evolute zu finden, wird man aus $y = f(x)$ die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ableiten, diese, so wie den Werth von y in die obigen Gleichungen (2 und (3.

*) Die Gleichung der Normale für den Berührungspunct x, y ist nämlich [§. 45., Gl. (3]

$$(y' - y)\,dy + (x' - x)\,dx = 0.$$

Geht man zur nächsten Normale über, differentiirt demnach diese Gleichung in Bezug auf den Berührungspunct x, y; so erhält man $(y' - y)\,d^2y - dx^2 - dy^2 = 0$, und wenn man zur Bestimmung des Durchschnittes der beiden Normalen diese Gleichungen mit einander verbindet:

$$x - x' = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right) \text{ und } y - y' = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y},$$

so, dafs in der That, wie die Vergleichung mit II., §. 52., zeigt, die Coordinaten x', y' dieses Durchschnittspunctes, mit jenen α, β des Mittelpunctes des Krümmungskreises identisch sind.

oder noch einfacher, in die beiden ersten von II., §. 52., substituiren, und endlich aus den beiden resultirenden Gleichungen, welche sofort nur noch α, β, x enthalten, x eliminiren; dadurch erhält man die Relation zwischen α und β, d. i. die gesuchte Gleichung der **Evolute** oder **Mittelpunctscurve**.

§. 55.

Beispiele.

1. Um für die gemeine **Parabel**, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, die Evolute zu finden, hat man zuerst aus dieser Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3};$$

folglich, wenn man diese Werthe, so wie jenen $y = \sqrt{(px)}$ in die beiden ersten der Gleichungen II., §. 52., substituirt, ganz einfach:

$$3x + \frac{p}{2} - \alpha = 0 \text{ und } \frac{4x\sqrt{(px)}}{p} + \beta = 0.$$

Eliminirt man daher aus diesen beiden Gleichungen x, so erhält man ganz leicht:

$$\beta^2 = \frac{16}{27p}\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^3 \ldots (b$$

für die gesuchte **Evolute der Parabel**.

Zufolge dieser Gleichung (b besteht also unsere Curve aus zwei gleichen entgegengesetzten Aesten $A'D$, $A'D'$
Fig. 21. (Fig. 21), die sich ober- und unterhalb der Axe AX ins Unendliche erstrecken. Um ihren Durchschnitt A' mit der Abscissenaxe zu erhalten, wird man in (b, $\beta = 0$ setzen und daraus $\alpha = AA'$ bestimmen; diefs gibt $\alpha = AA' = \frac{p}{2}$. Nimmt man daher für die gefundene Evolute der *Apollonischen* Parabel, diesen eben bestimmten Punct A' zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordininaten, setzt also in der obigen Gleichung (b statt α, $\alpha + \frac{p}{2}$; so erhält man für die Evolute die einfachere Gleichung:

$$\beta^2 = \frac{16}{27p} \alpha^3 \ldots (b',$$

eine Gleichung, welche sofort der **cubischen** oder *Neil*'**schen Parabel**, die Abscissen vom Scheitel A' gezählt, angehört *).

Wie man sieht, wird der obere Ast AMR der gemeinen Parabel durch Abwicklung des Fadens von dem untern Ast $A'D'$, und der untere Ast $AM'R'$ der erstern, durch Abwicklung des Fadens von dem obern Ast $A'D$ der *Neil*'schen Parabel beschrieben; dabei muſs der Faden für den Scheitel A, für welchen er die Lage $A'A$ (als Tangente der Evolute in A') hat, die Länge $A'A = \frac{p}{2}$ erhalten, welches in der That auch [§. 53., Gl. $(s'$] die Gröſse des Krümmungshalbmessers γ im Scheitel A der *Apolloni*'schen Parabel ist **).

2. Für die **Ellipse**, die Abscissen vom Mittelpunct gezählt, hat man (Bd. II., §. 56.) $y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$, und daraus:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*) Alle ebenen Curven nämlich, deren Gleichungen in jener allgemeinen $y^n = Ax^m$ begriffen sind, werden **Parabeln** genannt, und je nach den höchsten Potenzen von x und y, in Parabeln des 2ten, 3ten, ... Grades abgetheilt. Die cubische Parabel heiſst insbesondere noch die *Neil*'sche, weil sie der englische Geometer *Wilhelm Neil* zuerst rectificirt hat (1657); es ist dieſs überhaupt die **erste** Curve, welche rectificirt worden ist.

) Es ist leicht zu sehen, daſs sich die Länge des Bogens der cubischen oder *Neil*'schen Parabel genau durch eine gerade Linie ausdrücken läſst, d. h. daſs sie **rectificabel sey; denn es ist z. B. der Bogen $A'O'$ offenbar gleich der Differenz aus dem Krümmungshalbmesser MO' im Puncte M und jenem AA' im Scheitel A der gemeinen Parabel, d. i.

$$= \frac{(p + 4x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}} - \frac{p}{2} \quad [\S. 153., c)].$$

Dieselbe Bemerkung gilt für die Evoluten aller **algebraischen** Curven; weil für diese letzteren der Krümmungshalbmesser immer durch eine **algebraische** Gleichung gegeben oder ausgedrückt ist.

Diese Werthe wieder in die beiden ersten Gleichungen II., §. 52., substituirt, geben nach einigen einfachen Reductionen:

$$x - \alpha = \frac{x(a^4 - c^2 x^2)}{a^4}$$

$$\text{und } \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} - \beta = \frac{(a^4 - c^2 x^2)\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a^3 b},$$

aus welchen sofort noch x zu eliminiren ist, um die Gleichung in α, β oder der Evolute zu erhalten.

Es folgt aber aus der letzten Gleichung:

$$(a^4 - c^2 x^2 - a^2 b^2)\sqrt{(a^2 - x^2)} = -a^3 b \beta$$

$$\text{oder } (a^2 c^2 - c^2 x^2)\sqrt{(a^2 - x^2)} = -a^3 b \beta$$

d. i. $c^2 (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = - a^3 b \beta$, und daraus

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 b^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt sonach ganz einfach:

$$x^2 = \frac{a^2 (a\alpha)^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}, \text{ also } a^2 - x^2 = \frac{a^2}{c^{\frac{4}{3}}}\left[(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} - (a\alpha)^{\frac{2}{3}}\right];$$

wird daher dieser Werth dem vorigen gleich gesetzt, so erhält man, wenn man gehörig abkürzt, für die Gleichung der Evolute der Ellipse:

$$b^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \text{ *)}.$$

Für $a = b$ geht die Ellipse in einen Kreis, und die Gleichung der Evolute in $\beta^{\frac{2}{3}} = -\alpha^{\frac{2}{3}}$, oder, wenn man die dritte Wurzel auszieht, in $\beta^2 + \alpha^2 = 0$ über, welche bekanntlich in das System der beiden Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$ zerfällt, und sofort anzeigt, daſs sich für den Kreis die Evolute auf einen Punct (den Mittelpunct des Kreises) reducirt.

Setzt man in der vorigen Gleichung statt b, $b\sqrt{(-1)}$; so erhält man für die Evolute der Hyperbel die

*) Um den fleiſsigen Anfänger nicht um alles Vergnügen des Selbstfindens zu bringen, überlassen wir ihm die Discussion dieser Gleichung zur Auffindung der Form und vorzüglichsten Eigenschaften dieser Curve oder Evolute.

Gleichung:

$$a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Anmerk. Um umgekehrt aus der gegebenen Gleichung der Evolute $\beta = \varphi(\alpha)$ die Gleichung der Evolute $y = f(x)$ zu finden, müfste man aus den beiden durch Verbindung der Gleichungen (4 und (6, §. 54., entstehenden Gleichungen:

$$x - \alpha = -\gamma\frac{d\alpha}{ds} \text{ und } y - \beta = -\gamma\frac{d\beta}{ds},$$

wo $ds = d\gamma = \sqrt{(d\alpha^2 + d\beta^2)}$ ist, oder vielmehr [wenn man für β den Werth aus $\beta = \varphi(\alpha)$ und für γ jenen $s + c$ aus der Gl. (7, §. 54., Note, substituirt] aus jenen

$$\alpha - x = (s + c)\frac{d\alpha}{ds} \text{ und } \varphi(\alpha) - y = (s + c)\frac{d\beta}{ds}$$

α eliminiren, wodurch man eine Gleichung in x, y und c, d. i. die gesuchte Gleichung der Evolvente erhielte; diefs setzt jedoch offenbar voraus, dafs sich der Werth des Bogens s aus dem Differentialausdruck $ds = \sqrt{(d\alpha^2 + d\beta^2)}$ (mittelst Integration) bestimmen, d. h., dafs sich die gegebene Evolute rectificiren lasse. (M. vergl. die Note am Ende des ersten Beisp.) Auch könnte man zur Bestimmung der gesuchten Evolvente, aus den beiden ersten Gleichungen II., §. 52., nachdem man in der letztern für β den Werth $\varphi(\alpha)$ aus der gegebenen Gleichung der Evolute substituirt hat, die Gröfse α eliminiren, um dadurch die Differentialgleichung der zweiten Ordnung in x, y, und daraus dann, wenn sie sich integriren läfst, die gesuchte Gleichung der Evolvente zu erhalten.

Auch sieht man aus dem erstern Verfahren (wenn sich dasselbe anwenden läfst) deutlich, dafs die entstehende Gleichung der Evolvente, da sie die willkürliche Constante c enthält, eben so vielen verschiedenen Curven angehören wird, als verschieden die Werthe sind, die man der unbestimmten Gröfse c beilegen kann; diefs hängt damit zusammen, dafs man den beschreibenden Punct wo immer auf dem um die Evolute geschlagenen Faden annehmen, also zu jeder Evolute unzählig viele Evolventen beschreiben kann,

Von den *besondern* Puncten der Curven.

§. 56.

Erklärung.

Unter den besondern Puncten einer Curve versteht man alle jene Puncte, in welchen eine besondere oder be-

merkenswerthe Eigenschaft derselben Statt findet. Dergleichen Puncte sind *A*) Puncte, in welchen die Ordinate ihr Maximum oder Minimum erreicht (*B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, Fig. 1); *B*) Puncte, in welchen die Curve ihre Convexität (diese auf irgend eine Gerade, z. B. die Abscissenaxe bezogen) in Concavität oder umgekehrt verändert: Wendungs-, Biegungs- oder Flexionspuncte (*m*, Fig. 22 und 23); *C*) Puncte, in welchen die Curve in ihrem Laufe plötzlich inne hält und von da in irgend einer andern Richtung zurückgeht: Rückkehrpuncte oder auch Spitzen (*m*, Fig. 28 — 32); *D*) Puncte, durch welche die Curve mehrere Male hindurch geht: vielfache Puncte (*m*, in Fig. 33 — 35); *E*) Puncte endlich, welche von der Curve ganz isolirt, und doch mit in der Gleichung der Curve begriffen sind: beigeordnete oder conjugirte Puncte (*B*, Fig. 36).

Wir wollen nun in den folgenden Paragraphen diese hier aufgezählten Puncte, welche unter den besonderen die Vorzüglichsten sind, der Reihe nach und in Kürze durchgehen.

A) Die *gröſsten* und *kleinsten* Ordinaten.

§. 57.

Wir haben in §. 45. (Anmerk.) gesehen, daſs der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ (als trigon. Tangente des Winkels α der Tangente mit der Abscissenaxe) positiv ist, wenn die Ordinaten einer gegen die Abscissenaxe concaven Curve zunehmen, dagegen negativ wird, wenn diese abnehmen; es muſs demnach im Puncte *B* der gröſs-
Fig. 1. ten Ordinate *bB* (Fig. 1) dieser Quotient $\frac{dy}{dx}$ offenbar sein Zeichen ändern. Dasselbe gilt auch im Puncte *C* der kleinsten Ordinate einer gegen die Abscissenaxe convexen Curve. Es muſs daher in den Puncten der gröſsten und kleinsten Ordinaten, der erste Differentialquotient

$\frac{dy}{dx} = 0$ oder $= \frac{1}{0} = \infty$ seyn*), also muſs in diesen Puncten die Tangente entweder mit der Abscissen- oder mit der Ordinatenaxe parallel laufen; wodurch sofort die Grenzen der Curve gegen die beiden rechtwinkeligen Coordinatenaxen bestimmt sind**).

Für jenen Punct der Curve aber, für welchen der Quotient $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, erhalten die Coordinaten des Mittelpunctes des Krümmungskreises (§. 52., II.) die Werthe:

$$\alpha = x \text{ und } \beta = y + \left(1 : \frac{d^2 y}{dx^2}\right),$$

woraus sofort folgt, daſs wenn der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ negativ ausfällt (für jene Werthe von x nämlich, für welche $\frac{dy}{dx} = 0$ ist), $\beta < y$ ist, also der Mittelpunct des Krümmungskreises diesseits der Curve, d. i. von der Curve aus gegen die Abscissenaxe liegt, folglich die Curve gegen diese Axe concav; daſs hingegen, wenn dieser zweite Differentialquotient positiv ausfällt, also $\beta > y$ wird, der Mittelpunct des genannten Kreises

*) Eine ganze continuirliche Function kann das Zeichen nur ändern, indem diese durch Null geht; dagegen kann eine Bruchfunction ihr Zeichen nicht nur mit dem Zähler (in welchem Falle diese ebenfalls durch Null geht), sondern auch mit dem Nenner ändern, in welchem Falle, da der Nenner dabei, als eine ganze Function, durch Null geht, die Bruchfunction selbst durch Unendlich gehen muſs.

**) Will man also die Grenzen einer Curve sowohl nach der Richtung der Ordinaten-, als auch nach jener der Abscissenaxe bestimmen; so muſs man aus der Gleichung der Curve den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ ableiten, denselben $= 0$ und auch $= \frac{1}{0}$ setzen, und aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der gegebenen, die reellen Werthe von x und y entwickeln. Da aber auch (wie wir hier sehen werden) in andern Puncten dieser Curve, die keine Grenzpuncte sind, $\frac{dy}{dx} = 0$ oder $= \frac{1}{0}$ Statt finden kann; so muſs man die Curve in der Nähe der dem gefundenen Werthe von x, y entsprechenden Puncten noch besonders discutiren oder untersuchen, und sich durch die Nachbarwerthe von dem Daseyn der gröſsten oder kleinsten Werthe von y und x wirklich überzeugen.

jenseits der Curve liegt, folglich diese gegen die Abscissenaxe convex ist; welche Ergebnisse sofort auch vollkommen mit jenen des §. 48. übereinstimmen.

Da aber die größten Ordinaten bei den concaven, und die kleinsten bei den convexen Bogen der Curven Statt finden; so kann man also sagen, daſs in jenen Puncten einer vorliegenden Curve, in welchen $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, die Ordinaten gröſser als die unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden; daſs hingegen in jenen Puncten, in welchen $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, die Ordinaten kleiner, als die benachbarten sind. Da man endlich in jedem Falle aus der Gleichung der Curve, ohne auf den zweiten Differentialquotienten überzugehen, entscheiden kann, ob in jenem Puncte, in welchem $\frac{dy}{dx} = 0$ oder $= \infty$ ist, ein gröſster oder kleinster Werth Statt findet; so brauchen wir den Fall, in welchem auch $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ wird, nicht weiter zu berücksichtigen *). Will man aber bloſs den ersten Quotienten $\frac{dy}{dx}$ in Betracht ziehen, so bemerke man, daſs eine gröſste oder kleinste Ordinate vorhanden ist, je nachdem dieser Quotient aus dem Positiven ins Negative, oder aus dem Negativen ins Positive übergeht; weil (§. 45., Anmerk.) im ersten Falle die Ordinaten anfangs zu- und dann abnehmen, im zweiten Falle aber das Gegentheil Statt findet.

*) Man sieht, daſs diese Ergebnisse genau mit den analytischen Entwicklungen über die gröſsten und kleinsten Werthe der Functionen (§§. 37. — 39.) übereinstimmen. Auch haben wir schon dort (§. 37.) zur Versinnlichung des Umstandes, daſs eine Function mehrere Maxima und Minima haben könne, zur geometrischen Betrachtung unsere Zuflucht genommen und auf die Curve in Fig. 1 hingewiesen, welche mehrere gröſste und kleinste Ordinaten besitzt, unter welchen bB die absolut gröſste und gG die absolut kleinste ist.

§. 58.

Um das Vorhergehende zu erläutern, wollen wir die Familie der Curven betrachten, die in der Gleichung

$$y = b + c(x-a)^n$$

begriffen sind.

Für diese folgt

$$\frac{dy}{dx} = nc(x-a)^{n-1} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)c(x-a)^{n-2}.$$

1. Ist nun n gerad, also $n-1$ ungerad und $n-2$ wieder gerad; so ist $\frac{dy}{dx}$ für $x > a$ positiv und für $x < a$ negativ. Es ändert also dieser Quotient bei dem Uebergange von $x > a$ in $x < a$ sein Zeichen, und wird auch in der That für $x = a$ Null; folglich muſs in dem Puncte $x = a$, $y = b$ der Curve eine gröſste oder kleinste Ordinate Statt finden. Da aber bei einer continuirlichen Zunahme von x, dieser Quotient $\frac{dy}{dx}$ aus dem Negativen ins Positive übergeht; so findet zufolge der am Schlusse des vorigen Paragraphes gemachten Bemerkung, in dem genannten Puncte $x = a$, $y = b$ eine kleinste Ordinate Statt; und in der That, es folgt für diese Hypothese (von n gerad) aus der ursprünglichen Gleichung für $x = a \pm h$: $y = b + ch^n$, während für $x = a$ nur $y = b$ wird.

Ist c negativ, also $y = b - c(x-a)^n$; so wird, wenn alles Uebrige dasselbe bleibt, die Ordinate im Puncte $x = a$, $y = b$ ein Maximum; denn für $x = a \pm h$ werden die Nachbarwerthe $y = b - ch^n$ kleiner als $y = b$.

2. Ist n ungerad, also $n-1$ gerad; so findet im ersten Quotienten, welcher, es mag $x >$ oder $< a$ seyn, immer positiv bleibt, kein Zeichenwechsel, also auch im Puncte $x = a$, $y = b$, obschon auch dafür $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, weder eine gröſste noch eine kleinste Ordinate Statt; und in der That, setzt man $x = a + h$ und $x = a - h$; so wird, wenn c positiv ist, beziehungsweise $y = b + ch^n$ und $y = b - ch^n$, und wenn c negativ ist: $y = b - ch^n$ und $y = b + ch^n$, so,

dafs in beiden Fällen die Nachbarwerthe weder beide grösser, noch beide kleiner als die Ordinate $y=b$ werden.

Da ferner $n-2$ auch ungerad ist, so ändert der zweite Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$, welcher für $x<a$ negativ und für $x>a$ positiv ist, im Puncte $x=a$ sein Zeichen; es geht also offenbar (§. 48.) die Curve in diesem Puncte $x=a$, $y=b$, in welchem $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ist, aus der concaven in die convexe Form über, und es ist daher [§. 56., B)] dieser Punct

Fig. 22. m (Fig. 22), in welchem $\left(\text{wegen } \frac{dy}{dx}=0\right)$ immer noch die Tangente, die aber die Curve zugleich auch schneidet, mit der Abscissenaxe parallel ist, ein Biegungspunct.

3. Ist n ein Bruch, dessen Zähler gerad und Nenner ungerad ist, und z. B. (um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben) $=\frac{2}{3}$; so wird

$$y=b+c(x-a)^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2c}{3(x-a)^{\frac{1}{3}}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2c}{9(x-a)^{\frac{4}{3}}}.$$

Der erste Quotient ändert beim Uebergang von $x<a$ in $x>a$ sein Zeichen, und geht aus dem Negativen ins Positive über; also findet im Puncte $x=a$, $y=b$, für welchen nun $\frac{dy}{dx}=\infty$ wird, ein Minimum der Ordinate Statt. Da aber in diesem Puncte $\left(\text{wegen } \frac{dy}{dx}=\infty\right)$ die Tangente auf der Abscissenaxe perpendikulär steht, und der zweite Differentialquotient sowohl für $x<a$ als $>a$ immer negativ bleibt, also die Curve fortwährend ihre concave Seite

Fig. 29. der Abscissenaxe zukehrt; so bildet dieser Punct m (Fig. 29), in welchem diese kleinste Ordinate Statt findet, zugleich einen Rückkehrpunct [§. 56., C)].

Wäre c negativ, also $y=b-c(x-a)^{\frac{2}{3}}$; so würde man mit diesem Minimum ganz analog in dem Puncte m

Fig. 30. (Fig. 30), für welchen nämlich $x=a$ und $y=b$ ist, ein Maximum oder eine gröfste Ordinate erhalten.

B) Die *Wendungs-* oder *Flexions*puncte.

§. 59.

Es folgt schon aus dem, was (§. 48.) über das Kennzeichen: ob eine Curve gegen die Abscissenaxe convex oder concav sey, vorgetragen wurde, daſs im Wendungspunct der zweite Quotient $\frac{d^2 y}{d x^2}$ sein Zeichen ändern, und also in diesem Puncte $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ oder $= \frac{1}{0} = \infty$ seyn müsse. Um jedoch diesen Gegenstand noch weiter auseinander zu setzen, sey im Wendungspunct m (Fig. 23) die Tangente mt gezogen; so sieht man sogleich, daſs die nächsten Puncte an m auf entgegengesetzten Seiten dieser Tangente liegen, so, daſs wenn man die Abscisse $Ap = x$ dieses Punctes um gleiche Stücke $pp' = pp'' = h$ zu- und abnehmen läſst, dann die Ordinaten $p'm'$ und $p''m''$ zieht, die Stücke $m'b'$ und $m''b''$ sofort entgegengesetzte Zeichen erhalten. Fig. 23

Nun ist aber $m'b' = m'p' - b'p'$, oder, wenn man durch m die Parallele md mit der Abscissenaxe zieht: $m'b' = m'p' - (p'd + b'd)$, oder wegen $m'p' = f(x+h)$ [wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Curve ist], $p'd = pm = y$ und $b'd = md \; tang. \, b'md = h \frac{dy}{dx}$ (wegen W. $b'md =$ W. mtX), endlich:

$$m'b' = f(x+h) - y - h\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{d x^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3 y}{d x^3}\frac{h^3}{2.3} + \ldots,$$

wenn man nämlich noch $f(x+h)$ nach der *Taylor*'schen Formel entwickelt.

Um $m''b''$ zu erhalten, darf man in diesem letztern Ausdrucke nur h negativ nehmen; man hat daher:

$$m''b'' = \frac{d^2 y}{d x^2}\frac{h^2}{2} - \frac{d^3 y}{d x^3}\frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

Da man nun wieder h so klein nehmen kann, daſs $m''b''$ das Zeichen des ersten Gliedes der Reihe erhält, dieses aber mit dem Zeichen des ersten Gliedes der vorigen Reihe, also auch bei den kleinsten Werthen von h mit dem Zeichen

von $m'b'$ übereinstimmt; so können die beiden Gröfsen $m'b'$, $m''b''$, wie es doch für den Flexionspunct m seyn mufs, nur dann entgegengesetzte Zeichen erhalten, wenn zuerst für diesen Punct m, $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ wird, ohne dafs dafür auch $\frac{d^3y}{dx^3}$ verschwindet, oder wenn auch $\frac{d^3y}{dx^3} = o$ werden sollte, überdiefs noch der vierte Quotient $\frac{d^4y}{dx^4} = o$ wird, u. s. w.

Ist $x = a$ die Abscisse dieses Wendungspunctes m, so kann auch die Gleichung der Curve $y = f(x)$ so beschaffen seyn, dafs sich $f(x + h)$ für den besondern Werth von $x = a$ nicht nach ganzen positiven Potenzen von h entwickeln läfst (§. 11.), in welchem Falle, wie wir am betreffenden Orte gezeigt haben, auch $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty = \frac{1}{o}$ seyn kann.

Um also zu untersuchen, ob die Curve $y = f(x)$ einen Wendungspunct habe, wird man aus ihrer Gleichung den zweiten Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ ableiten, und wenn dieser die Bruchform $\frac{X}{X'}$ erhält, nicht blofs $X = o$, sondern auch $X' = o$ setzen, wodurch beziehungsweise $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ und $= \infty$ wird, und aus der einen und der andern Gleichung mit Zuziehung der ursprünglichen $y = f(x)$ die reellen Werthe von x und y bestimmen. Hat man nun aus diesen Gleichungen z. B. $x = a$, $y = b$ gefunden; so ist es möglich, dafs dieser Punct der Curve $x = a$, $y = b$ ein Flexionspunct sey. Um sich jedoch davon zu überzeugen (da auch in andern, z. B. in den Grenzpuncten der Curve $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ oder ∞ seyn kann), wird man den Lauf der Curve in der Nähe dieses Punctes untersuchen, und in dem abgeleiteten Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $x = a \pm h$ setzen, um zu sehen, ob für die doppelten Zeichen, bei den kleinsten Werthen von h, dieser zweite Differentialquotient wirklich entgegengesetzte Zeichen erhält; in welchem Falle offenbar die benachbarten

Puncte von m, die einen dem convexen, die andern dem concaven Theil der Curve angehören, also der Punct m in der That ein Wendungspunct seyn wird.

§. 60.

Beispiele.

1. Um zu untersuchen, ob die Curve, deren Gleichung $x^3 - axy - b^2 y = 0$ ist, einen Wendungspunct besitze, hat man aus dieser Gleichung:

$$y = \frac{x^3}{ax + b^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax^3 + 3b^2x^2}{(ax + b^2)^2} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2x^3 + 6ab^2x^2 + 6b^4x}{(ax + b^2)^3}.$$

Wird nun der zweite Quotient $= 0$ gesetzt, so entsteht die Gleichung $2a^2x^3 + 6ab^2x^2 + 6b^4x = 0$, aus welcher eine reelle Wurzel $x = 0$ und zwei imaginäre, die also hier unbrauchbar sind, folgen; da ferner aus der ursprünglichen Gleichung für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, so ist es möglich, dafs der Punct $x = 0$, $y = 0$, nämlich der Ursprung, ein Wendungspunct sey. Um sich davon zu überzeugen, hat man für $x = 0 + h$: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2h^3 + 6ab^2h^2 + 6b^4h}{(ah + b^2)^3}$ positiv, und für $x = 0 - h$: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6b^4h - 6ab^2h^2 + 2a^2h^3}{(b^2 - ah)^3}$, also für die kleinsten Werthe von h offenbar negativ; es besteht daher wirklich im Ursprunge der Coordinaten A (Fig. 24) ein Wendungspunct. Fig. 24

Anmerk. Da für diesen Punct $x = 0$, $y = 0$ zugleich auch der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = 0$ wird; so beweist dieses, dafs hier die Tangente im Wendungspunct mit der Abscissenaxe parallel läuft, also mit dieser letztern zusammenfällt.

2. Es sey $y = b + c(x - a)^{\frac{3}{5}}$ die Gleichung einer Curve und zu untersuchen, ob diese letztere einen Flexionspunct besitze. Es folgt aus dieser Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{5}c(x - a)^{-\frac{2}{5}}$$

und $\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{6}{25} c (x-a)^{-\frac{7}{5}} = -\frac{6c}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$;

man sieht nun sogleich, daſs dieser zweite Quotient nicht Null werden kann (weil sonst $c = 0$ seyn müſste), und man also hier $\frac{d^2 y}{d x^2} = \infty = \frac{1}{0}$, d. i. $25(x-a)^{\frac{7}{5}} = 0$ setzen müsse; woraus sofort $x = a$ folgt. Setzt man ferner, um zu sehen, ob in diesem Puncte $x = a$, $y = b$ (welcher Werth von y aus der ursprünglichen Gleichung folgt) wirklich eine Einbiegung Statt habe, $x = a \pm h$; so wird $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-6c}{\pm 25 h^{\frac{7}{5}}}$, welcher Quotient in der That Resultate mit entgegengesetzten Zeichen liefert: es ist daher der Punct $x = a$, $y = b$ der
Fig. 25. Curve (m, Fig. 25), in welchem, da auch $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird, die Tangente auf der Abscissenaxe perpendikulär steht, ein Wendungspunct.

3. Für die Gleichung $y = x + (x-a)^{\frac{5}{3}}$ hat man:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \tfrac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{10}{9(x-a)^{\frac{1}{3}}}.$$

Die Gleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ gibt für x keinen Werth; dagegen folgt aus jener $\frac{d^2 y}{d x^2} = \infty$, nämlich aus $9(x-a)^{\frac{1}{3}} = 0$: $x = a$; und da ferner für $x = a \pm h$, $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{10}{\pm 9 h^{\frac{1}{3}}}$, also positiv und negativ wird; so findet im Puncte $x = a$, $y = a$ der entsprechenden Curve, in welchem, wie man sieht, $\frac{dy}{dx} = 1$ ist, nämlich die Tangente mit der Abscissenaxe ei-
Fig. 26. nen Winkel von 45° bildet, eine Wendung Statt (m, Fig. 26).

4. Um endlich noch zu untersuchen, ob die Curve, deren Gleichung ist: $y = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$, einen Flexionspunct habe, findet man

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{2}{3} c (x-a)^{-\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-2c}{9(x-a)^{\frac{4}{3}}},$$

so, dafs aus der Bedingungsgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ wieder $x = a$ folgt.

Setzt man aber weiters $x = a \pm h$, so wird für beide Zeichen: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2c}{9h^{\frac{4}{3}}}$; woraus sofort hervorgeht, dafs die Curve fortwährend gegen die Abscissenaxe concav (§. 48.), also der Punct $x = a$, $y = b$ kein Wendungspunct ist.

C) Die *Rückkehrpuncte* oder *Spitzen*.

§. 61.

Ein Rückkehrpunct oder eine Spitze kann gebildet werden, entweder indem die beiden sich in diesem Puncte vereinigenden Curvenäste ihre convexen Seiten einander zukehren, oder indem die convexe Seite des einen gegen die concave Seite des andern Astes gewendet ist; im ersten Falle wird dieser Punct (m, Fig. 29 bis 31) ein Rückkehrpunct oder eine Spitze der ersten Art, und im zweiten Falle (m, Fig. 32) eine Spitze der zweiten Art, oder wohl auch Schnabel genannt; im ersten Falle liegen die beiden Curvenäste (wenigstens ihre zunächst an m befindlichen Puncte) zu verschiedenen, im zweiten Falle auf der nämlichen Seite der in diesem Puncte gezogenen Tangente. Fig. 29 bis 31. Fig. 32.

Ist nun $y = f(x)$ die Gleichung der Curve, und m ein Rückkehrpunct derselben, dessen Coordinaten $x = a$, $y = b$ sind; so mufs die Gleichung $y = f(x)$ nothwendig so beschaffen seyn, dafs y für $x = a$ nur den einzigen Werth b, für $x = a + h$, wenn auch h noch so klein angenommen wird, zwei reelle Werthe, und endlich für $x = a - h$ imaginäre Werthe erhält. Diese Bedingungen fordern aber offenbar, dafs die Function $f(x)$ eine Wurzelgröfse von der Form $\sqrt[m]{(x-a)^n}$, in welcher m einen geraden und n einen ungeraden Exponenten bezeichnet, enthalte; denn diese liefert in der That für $x = a + h$ zwei reelle

Werthe, verschwindet für $x = a$, und wird endlich für $x = a - h$ imaginär.

Für den Rückkehrpunct erster Art mufs ferner, wie man leicht sieht, $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ oder $= \infty$ seyn, weil dieser Quotient im genannten Punct sein Zeichen ändert; und es mufs zugleich dieser zweite Quotient für $x = a + h$ Resultate mit entgegengesetzten Zeichen liefern. (Den speciellen Fall, in welchem die Curve die Lage wie in Fig. 29 oder 30 hat, und also dieses letztere nicht Statt zu finden scheint, haben wir bereits im §. 58., Beisp. 3. erörtert, und wird unten — m. s. die Anmerk. und im folgenden Paragr. Beisp. 3. — noch insbesondere berücksichtigt werden.)

Für den Rückkehrpunct zweiter Art läfst sich keine solche Bedingungsgleichung aus dem zweiten Quotienten aufstellen, weil dieser sein Zeichen, wie man sieht, in diesem Puncte nicht ändert, also nicht nothwendig $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ oder ∞ seyn mufs; dagegen mufs aber dieser Quotient $\frac{d^2 y}{d x^2}$ für $x = a + h$, wenigstens bei den kleinsten Werthen von h, zwei Werthe von einerlei Zeichen erhalten.

Um daher zu untersuchen, ob die Curve $y = f(x)$ einen Rückkehrpunct darbietet, wird man aus dieser Gleichung jenen Punct $x = a$, $y = b$ bestimmen, in welchem die Curve in ihrem Laufe inne hält (wofür nämlich y, wenn man $x = a - h$ setzt, imaginär wird); wenn man $x = a$ substituirt, nur den einzigen Werth b; und wenn man endlich $x = a + h$ setzt, zwei reelle Werthe erhält. (Für eine Spitze der ersten Art findet man diesen Punct aus der Gleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ oder $= \infty$.) Sodann wird man noch den zweiten Quotienten $\frac{d^2 y}{d x^2}$ für $x = a + h$, so wie überhaupt den Lauf der Curve in der Nähe dieses Punctes $x = a$, $y = b$ untersuchen, um sich zu überzeugen, ob derselbe wirklich ein Rückkehrpunct sey oder nicht.

Anmerk. Enthält die Gleichung $y = f(x)$, statt der Wurzelgröſse $\sqrt[m]{(x-a)^n}$, jene $\sqrt[m]{(a-x)^n}$; so wird nun umgekehrt y für $x = a + h$ imaginär, und für $x = a - h$ reell, so, daſs also die beiden Curvenäste, gegen die vorige stillschweigende Voraussetzung, jetzt in der Richtung der negativen x hin liegen; was jedoch in der Untersuchung keinen wesentlichen Unterschied begründet.

Sollte ferner in der Function $f(x)$, anstatt der vorigen Wurzelgröſse $(x-a)^{\frac{n}{m}}$, jene $(x-a)^{\frac{m}{n}}$ vorkommen, wobei nun der Nenner des Bruchexponenten ungerad und dafür der Zähler gerad wäre; so dürfte man nur x mit y verwechseln und die Untersuchung wie vorhin vornehmen, dabei aber nicht unberücksichtigt lassen, daſs dadurch auch die beiden Coordinatenaxen mit einander vertauscht worden sind.

§. 62.

Beispiele.

1. Betrachtet man die Curve, deren Gleichung

$$y = x \pm \sqrt{x^3}$$

ist; so zeigt sich aus dieser letztern sogleich, daſs $x = 0$, $y = 0$ ein Punct sey, in welchem die Curve in ihrem Laufe inne hält; denn es wird y für $x = 0 - h$ imaginär. Da ferner für $x = 0$, y nur einen, und für $x = 0 + h$ zwei reelle Werthe $(h \pm h\sqrt{h})$ erhält; so läſst sich vermuthen, daſs dieser Punct $x = 0$, $y = 0$, nämlich der Ursprung A (Fig. 27) ein Rückkehrpunct seyn werde. Um dieſs aber auſser Zweifel zu setzen, hat man aus der gegebenen Gleichung: Fig. 27.

$$\frac{dy}{dx} = 1 \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{x} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

Da nun für $x = 0 + h$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{h}}$ wird; so folgt, daſs der obere Ast der Curve gegen die Abscissenaxe convex, und der untere gegen diese concav sey; es ist daher in der That dieser Punct A ein Rückkehrpunct, und zwar der ersten Art.

Anmerk. Da in diesem Puncte A $(x = 0, y = 0)$ $\frac{dy}{dx} = 1$ ist,

so bildet die in A gezogene Tangente AN mit der Abscissenaxe einen Winkel von 45°; wird diese construirt, indem man in einem beliebigen Puncte P die Ordinate zieht, $PN = AP$ abschneidet und AN zieht; so ist offenbar

$$NM = x + \sqrt{x^3} - x = + x\sqrt{x}$$
$$\text{und } Nm = x - \sqrt{x^3} - x = - x\sqrt{x}.$$

Den Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ betreffend, so ist dieser, wie man sieht, in diesem Punct $x = 0$, $y = 0$ Unendlich.

2. Um zu untersuchen, ob sich in der Curve

$$y = b + p(x-a)^2 \pm q\sqrt{(x-a)^5}$$

ein Rückkehrpunct befindet, hat man für $x = a$: $y = b$, für $x = a - h$ wird y imaginär, und für $x = a + h$ erhält y zwei reelle Werthe, nämlich $b + ph^2 \pm q\sqrt{h^5}$; es ist also möglich, daſs in diesem Puncte $x = a$, $y = b$ eine Spitze Statt findet. Man hat ferner, um sich davon zu überzeugen,

$$\frac{dy}{dx} = 2p(x-a) \pm \tfrac{5}{2}q(x-a)^{\frac{3}{2}}$$
$$\text{und } \frac{d^2y}{dx^2} = 2p \pm \tfrac{15}{4}q(x-a)^{\frac{1}{2}};$$

also wird für $x = a + h$: $\frac{d^2y}{dx^2} = 2p \pm \frac{15}{4}qh^{\frac{1}{2}}$.

Da nun, wenn man h so klein nimmt, daſs $\frac{15}{4}qh^{\frac{1}{2}} < 2p$ wird, dieser zweite Differentialquotient für beide Zeichen positiv ausfällt; so folgt, daſs beide Curvenäste gegen die Abscissenaxe convex sind, und daſs demnach der Punct $x = a$, $y = b$ ein Rückkehrpunct der zweiten Art sey (m, Fig. 28). Fig. 28.

Anmerk. Für $x = a$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, zum Beweise, daſs in dem genannten Rückkehrpunct die Tangente mit der Abscissenaxe parallel läuft. Auch sieht man, daſs jener Punct m' des untern Astes, welchem die Abscisse $x = a + \frac{64}{225}\frac{p^2}{q^2}$ entspricht, ein Wendungspunct ist; weil für diesen Punct der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ wird. Für den Rückkehrpunct $x = a$, $y = b$ ist endlich $\frac{d^2y}{dx^2} = 2p$.

3. Um endlich noch die Curve, deren Gleichung $y = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$ ist, in Bezug auf einen Rückkehrpunct zu untersuchen, wird man, da x sowohl positiv als negativ genommen, ohne Ende zunehmen kann, ohne dafs dadurch y imaginär wird, also die Curve in der Richtung der Abscissenaxe nicht inne hält, x mit y verwechseln; dadurch erhält man $x = b + c(y-a)^{\frac{2}{3}}$, oder, wenn man diese Gleichung nach y auflöst:

$$y = a \pm \sqrt{\left(\frac{x-b}{c}\right)^3}.$$

Aus dieser Gleichung aber folgt, dafs die Curve in ihrem Laufe im Puncte $x = b$, $y = a$ inne hält; weil y für $x = b - h$ imaginär wird; und dafs y für $x = b + h$ zwei reelle Werthe: $a \pm \left(\frac{h}{c}\right)^{\frac{3}{2}}$ erhält.

Um also noch zu sehen, ob der Punct $x = b$, $y = a$ wirklich ein Rückkehrpunct ist, hat man

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3}{2} \frac{(x-b)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{[c^3(x-b)]}}.$$

Da also für $x = b + h$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{(c^3 h)}}$ wird; so ist dieser Punct $x = b$, $y = a$ wirklich ein Rückkehrpunct, und zwar der ersten Art.

Da durch die obige Vertauschung von x mit y auch die beiden Coordinatenaxen mit einander verwechselt worden sind, so hat die Curve die in Fig. 29 angegebene Form, in welcher m der Wendungspunct ist. Fig. 29.

Anmerk. Da für diesen Punct $x = b$, $y = a$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = 0$ wird; so läuft (weil, wie gesagt, die beiden Axen zu verwechseln sind) die Tangente in diesem Punct mit der Ordinatenaxe parallel. Dafs endlich in demselben Punct m die Ordinate ein Kleinstes ist, haben wir schon im §. 58., Beispiel 3. gefunden.

Die *vielfachen* Puncte.

§. 63.

Ein vielfacher Punct, welcher insbesondere ein zweifacher oder doppelter, dreifacher, u. s. w. heiſst, je nachdem sich in demselben zwei, drei, u. s. w. Aeste der nämlichen Curve begegnen, kann gebildet werden: erstens, indem sich die Aeste in diesem Puncte schneiden, und daher jeder derselben seine besondere Tangente mn, mn', Fig. 33, 34, hat; und zweitens, indem sich die Curvenäste in diesem Puncte berühren, und sofort hier eine gemeinschaftliche Tangente mn besitzen (Fig. 35).

Fig. 33 bis 35.

Zur Entwicklung der Regel, die vielfachen Puncte einer Curve aufzufinden, wollen wir der gröſsern Einfachheit wegen zuerst annehmen, die Curve $y = f(x)$ besitze in (m) $x = a$, $y = b$ einen doppelten oder zweifachen Punct.

Befreit man die Gleichung der Curve von ihren Wurzelgröſsen, so läſst sich diese durch $u = o$, wo u eine rationale Function von x und y ist, darstellen, und man findet daraus, wegen $du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = o$ [§. 26., l) und (3]:

$$1)\quad \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right) \frac{dy}{dx} = o \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)},$$

wobei nun offenbar auch die Quotienten $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ rationale Functionen von x und y sind.

Dieser Quotient $\frac{dy}{dx}$ erhält aus der letztern Gleichung, da er bloſs in der ersten Potenz vorkommt, und, wie gesagt, die Quotienten $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$ rational sind, nur einen einzigen Werth; da nun aber im ersten Falle, in welchem sich nämlich beide Curvenäste im Puncte $x = a$, $y = b$

schneiden, dieser Quotient $\frac{dy}{dx}$ (als trigonom. Tangente des Winkels, der Tangente und Abscissenaxe) in diesem Puncte zwei Werthe haben muſs, welche sofort aus der vorigen Gleichung nicht gefunden werden können; so muſs nothwendig für $x = a$ und $y = b$, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, nämlich $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ werden; weil nur in dieser Form mehrere Werthe von $\frac{dy}{dx}$ enthalten seyn können. (M. vergl. Bd. I., §. 76.)

Im zweiten Falle, in welchem sich die Curvenäste in diesem Puncte, und zwar z. B. in der $n - 1^{\text{sten}}$ Ordnung berühren, sind (§. 49) für beide Aeste die $n - 1^{\text{sten}}$ Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ correspondirend einander gleich; dagegen muſs schon jener der n^{ten} Ordnung $\frac{d^n y}{dx^n}$ für $x = a$, $y = b$ zwei verschiedene Werthe erhalten. Nun folgt aber nach §. 27., Gleichung (r aus $f(x, y) = u = 0$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{V}{\left(\frac{du}{dy}\right)},$$

wo V eine Function von x, y und den Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ ist; es kann also ebenfalls dieser Quotient $\frac{d^n y}{dx^n}$, welcher in der letzten Gleichung nur in der ersten Potenz vorkommt, und in welcher V sowohl wie $\left(\frac{du}{dy}\right)$ rationale Functionen von x und y sind, für diesen Punct $x = a$, $y = b$ nicht anders zwei verschiedene Werthe anzeigen, als daſs er dafür die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Da nun aber auf diese Weise der Nenner des vorigen Bruches, d. i. $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ seyn muſs; so folgt aus der obigen Gleichung 1) auch $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$: es muſs also in beiden Fällen

für den vielfachen Punct $x=a$, $y=b$: $\left(\frac{du}{dx}\right)=0$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)=0$, daher [nach der obigen Gleichung 1)] auch $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ Statt finden; indeſs unterscheiden sich beide Fälle dadurch, daſs im erstern, in welchem sich die Curvenäste schneiden, der Quotient $\frac{dy}{dx}$ verschiedene (hier beim doppelten Punct zwei), und im zweiten Falle, in welchem sich die Aeste im vielfachen Punct bloſs berühren, nur gleiche Werthe erhält.

Das Umgekehrte findet nicht nothwendig Statt, d. h. es können die Quotienten $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ für $x=a$, $y=b$ auf Null, also $\frac{dy}{dx}$ auf $\frac{0}{0}$ reducirt werden, ohne daſs deſswegen auch dieser Punct $x=a$, $y=b$ der Curve ein Vielfacher ist. (M. s im folgenden Paragraphe das dritte Beispiel.)

Um also die vielfachen Puncte einer Curve, deren von allen Wurzelgröſsen befreite Gleichung $u=f(x,y)=0$ ist, aufzufinden, wird man aus den beiden Gleichungen

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right)=0$$

die Werthe von x und y bestimmen, und von diesen Auflösungen nur jene beibehalten, welche auch der Gleichung der Curve $u=0$ Genüge leisten; dadurch erhält man die Coordinaten aller Puncte, welche vielfache Puncte der Curve seyn können. Um indeſs darüber Gewiſsheit zu erlangen, muſs man noch den Lauf der Curve in der Nähe dieser Puncte untersuchen, und dabei ganz besonders auf die Anzahl der Werthe des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ in diesen Puncten Rücksicht nehmen. Da man aber den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ aus der ersten Differentialgleichung $du=0$ [d. i. aus der obigen Gl. 1)] für die vielfachen Puncte nicht bestimmen kann, indem sich diese auf die identische Gleichung $0=0$ reducirt;

so mufs man auf die Differentialgleichung **zweiter** Ordnung $d^2 u = 0$ übergehen, welche sofort [§. 27., Gl. (m)] wegen $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ ist:

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 0;$$

und aus dieser Gleichung wird man, da $\frac{dy}{dx}$ in der zweiten Potenz vorkommt, die zwei Werthe dieses Quotienten finden, wenn der gesuchte Punct ein **doppelter** ist. Ist dagegen der fragliche Punct ein **dreifacher**, so, dafs auch (für den ersten der angeführten Fälle nämlich) $\frac{dy}{dx}$ einen dreifachen Werth erhält; so reicht selbst die vorige Gleichung zu seiner Bestimmung nicht hin, und man mufs dann die drei Werthe aus der Differentialgleichung der dritten Ordnung $d^3 u = 0$, in welcher sofort dieser Quotient $\frac{dy}{dx}$ in der dritten Potenz erscheint, bestimmen, u. s. w.

§. 64.

Beispiele.

1. Um die Curve, deren Gleichung $ay^2 - bx^2 + x^3 = 0$ ist, in Hinsicht auf vielfache Puncte zu untersuchen, hat man, da hier $u = ay^2 - bx^2 + x^3$ ist, für die obigen Bedingungsgleichungen:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = -2bx + 3x^2 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2ay = 0;$$

daraus: $x = 0$, $x = \frac{2}{3}b$ und $y = 0$, nämlich die beiden Auflösungen $x = 0$, $y = 0$ und $x = \frac{2}{3}b$, $y = 0$; von denen jedoch die letztere sogleich wegfällt, weil sie der Gleichung der Curve $u = 0$ kein Genüge leistet, also der Punct $x = \frac{2}{3}b$ $y = 0$ kein Punct der Curve ist. Dagegen ist die erste Auflösung $x = 0$, $y = 0$ brauchbar, und es **kann** daher dieser Punct ein **vielfacher** seyn. Um dieses näher zu untersuchen, hat man

$$d^2 u = (6x - 2b)\,dx^2 + 2a\,dy^2 + 2ay\,d^2y = 0,$$

oder wegen $2ay = 0$ [d. i. $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$] auch:

$$6x - 2b + 2a\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 0,$$

und daraus $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \frac{b-3x}{a}$; also für den fraglichen Punct, in welchem $x = 0$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Es ist demnach der Punct $x = 0$, $y = 0$ (der Anfangs-
Fig. 34. punct A, Fig. 34) ein doppelter Punct, welcher aus dem Durchschnitt zweier Aeste entsteht (weil es in diesem Puncte A zwei verschiedene Tangenten gibt).

Anmerk. Die beiden Curvenäste bilden, indem sie durch den doppelten Punct A gehen, in diesem Puncte einen sogenannten Knoten, und zwischen diesem ($x = 0$) und $x = b = AB$ eine Ovale.

2. Für die Curve $y = b \pm (x-a)^3\sqrt{(x-c)}$ erhält man, wenn aus dieser Gleichung die Wurzelgröſse weggebracht *) und die entstehende Gleichung auf Null reducirt wird:

$$u = (y-b)^2 - (x-a)^6(x-c) = 0,$$

und daraus für die obigen Bedingungsgleichungen:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = -6(x-a)^5(x-c) - (x-a)^6 = 0$$

und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 2(y-b) = 0$,

aus welchen beiden Gleichungen man zwei Auflösungen erhält, von denen aber nur jene $x = a$, $y = b$ zugleich der ursprünglichen Gleichung der Curve entspricht.

Sucht man nun für diesen Punct $x = a$, $y = b$ aus der Differentialgleichung $d^2u = 0$ den Quotienten $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2$;

*) Dieses ist nämlich zufolge des vorigen Paragraphes eine ausdrückliche Bedingung, und zwar deſshalb, weil sich sonst der Quotient $\frac{dy}{dx}$ wirklich auf einen vielfachen Punct beziehen könnte, ohne doch in der Form $\frac{0}{0}$ zu erscheinen.

so findet man ganz einfach: $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 0$, also $\frac{dy}{dx} = \pm 0$, und da, wenn man auf die höhern Differentialgleichungen $d^3u = 0, \ldots$ übergeht, keine höhere Potenz von $\frac{dy}{dx}$ mehr vorkommt (oder einfacher, da, wie die ursprüngliche Gleichung zeigt, die Curve nur aus zwei Aesten besteht); so ist dieser Punct $x = a$, $y = b$ (m, Fig. 35) ein doppelter, welcher (da beide Tangenten zusammen fallen) durch Berührung der beiden Curvenäste entsteht, und in welchem die gemeinschaftliche Tangente mit der Abscissenaxe parallel ist. Fig. 35.

Da zugleich in diesem doppelten Punct, wie man leicht findet, für beide Curvenäste

$$y = b,\ \frac{dy}{dx} = 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ und } \frac{d^3y}{dx^3} = \pm 6\sqrt{(a-c)}$$

ist, also für beide Aeste die Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ wechselsweise einander gleich sind; so berühren sich die beiden Aeste in diesem doppelten Puncte in der zweiten Ordnung und besitzen sofort in diesem Punct einen gemeinschaftlichen Berührungskreis.

Anmerk. Diese Curve bildet zwischen den beiden Puncten B und m, deren Abscissen $x = c$ und $x = a$ sind, eine Ovale.

3. Untersucht man ferner die Gleichung

$$u = y^3 - (x-a)^3 x = 0,$$

so erhält man für die obigen Bedingungsgleichungen $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$:

$$-(x-a)^3 - 3x(x-a)^2 = 0 \text{ und } 3y^2 = 0,$$

und daraus die beiden Auflösungen: $x = a$, $y = 0$, und $x = \frac{a}{4}$, $y = 0$; von denen aber nur die erste zugleich auch der ursprünglichen Gleichung Genüge leistet, folglich die letztere als unbrauchbar wegzulassen ist.

Da aber, wie die obige Gleichung nach y aufgelöst,

d. i. $y = (x - a)\sqrt[3]{x}$ zeigt, die Curve nur aus einem Ast besteht; so kann es darin keinen vielfachen Punct geben, obschon auch hier aus der ursprünglichen Gleichung für $x = a$, $y = 0$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ wird.

4. Für die Gleichung endlich

$$u = x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0$$

sind die obigen Bedingungsgleichungen:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 4x^3 + 4axy = 0 \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right) = 2ax^2 - 3ay^2 = 0 \,..\, (1;$$

daraus erhält man die Auflösungen (Bd. I., Cap. 3., II.)

$$x = 0, \quad x = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad x = -a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$
$$y = 0, \quad y = -\tfrac{2}{3}a, \quad y = -\tfrac{2}{3}a;$$

und da von diesen nur das System $x = 0$, $y = 0$ der Gleichung der Curve Genüge leistet; so kann auch nur dieser Punct $x = 0$, $y = 0$ ein vielfacher seyn.

Man hat ferner für die Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn man gleich das Glied, welches zufolge der obigen Gleichung (1 verschwindet, wegläſst:

$$d^2u = 6x^2 + 2ay + 4ax\frac{dy}{dx} - 3ay\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 0,$$

eine Gleichung, aus welcher der Differentialquotient nicht bestimmt werden kann, weil diese für den betreffenden Punct $x = 0$, $y = 0$ identisch Null wird.

Geht man sonach auf die Differentialgleichung dritter Ordnung über, so erhält man, nach Hinweglassung der Glieder, die zufolge der obigen Gleichung (1 verschwinden [nämlich $(2ax^2 - 3ay^2)\,d^3y$ und $(2ax\,dx - 3ay\,dy)\,d^2y$] sofort:

$$d^3u = 4x + 2a\frac{dy}{dx} - a\left[\frac{dy}{dx}\right]^3 = 0$$

also daraus für $x = 0$:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^3 - 2\frac{dy}{dx} = 0, \text{ folglich } \frac{dy}{dx} = 0, \; +\sqrt{2} \text{ und } -\sqrt{2}.$$

Es ist demnach der Punct $x = 0$, $y = 0$ (der Ursprung) ein dreifacher Punct, in welchem sich die drei Zweige

sofort schneiden. Für den einen Zweig läuft die Tangente in diesem Puncte mit der Abscissenaxe parallel (fällt also wegen $y = 0$ mit dieser zusammen); für die beiden anderen, welche, wie leicht zu sehen, gegen die Ordinatenaxe symmetrisch liegen, werden die Tangenten durch $tang.\,\alpha = +\sqrt{2}$ und $tang.\,\alpha' = -\sqrt{2}$, wo α, α' ihre Neigungswinkel mit der Abscissenaxe sind, bestimmt.

Anmerk. Da man auch die Rückkehrpuncte oder Spitzen zu den vielfachen Puncten zählen kann; so läfst sich die hier entwickelte Regel auch auf diese anwenden. Es ist in der That, wenn wir das erste Beispiel des §. 62. wieder vornehmen und die dortige Gleichung $y = x \pm \sqrt{x^3}$ auf eine rationale Form, d. i. auf $u = (y-x)^2 - x^3 = 0$ bringen, daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y-x) + 3x^2}{2(y-x)};$$

welcher Differentialquotient für den gefundenen Rückkehrpunct $x = 0$, $y = 0$ wirklich die Form $\frac{0}{0}$ erhält.

So ist z. B. für die cubische Parabel (§. 55.)

$$u = y^2 - Ax^3 = 0,$$

wenn man die obigen Bedingungsgleichungen aufstellt:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = -3Ax^2 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y = 0,$$

und daraus $x = 0, y = 0$; welcher Punct zugleich der Curve angehört und für welchen also $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{0}{0}$ ist. Um jedoch die Natur dieses Punctes näher zu untersuchen, hat man aus der Differentialgleichung $d^2u = 0$, für $x = 0$, $y = 0$:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 0, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = \pm 0;$$

es ist daher der Anfangspunct dieser Parabel, in welchem sich die beiden Aeste berühren, ein doppelter Punct; zugleich bildet die Abscissenaxe in diesem Puncte die gemeinschaftliche Tangente. Da endlich der zweite Quotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pm 3A}{4\sqrt{(Ax)}}$$

für diesen Punct $x = 0$, $y = 0$ Unendlich wird; so kann dieser Punct zugleich ein Rückkehrpunct der ersten Art seyn (§. 61.). Und da in der That aus der Gleichung der

Curve y für negative Werthe von x, imaginär ausfällt, und für $x = o + h$ der Quotient $\frac{d^2 y}{d x^2} = \pm \frac{3 A}{4 \sqrt{(A h)}}$ wird; so ist diefs ein Zeichen, dafs die beiden Curvenäste, welche gegen die Abscissenaxe durchaus convex sind (§. 48.) im Anfangspuncte $x = o$, $y = o$ einen Rückkehrpunct oder eine Spitze der ersten Art bilden.

Die *conjugirten* oder beigeordneten Puncte.

§. 65.

Da die beigeordneten Puncte, obschon ihre Coordinaten der Gleichung der Curve $y = f(x)$ Genüge leisten, von dieser letztern völlig getrennt oder isolirt sind; so mufs, wenn $x = a$ die Abscisse eines solchen Punctes ist: y für $x = a$ reell, für $x = a \pm h$ hingegen, wenigstens für die kleinsten Werthe von h, imaginär ausfallen. Da nun aber, wenn man den Werth von y für $x = a \pm h$ durch y' bezeichnet,

$$y' = y \pm \frac{d y}{d x} h + \frac{d^2 y}{d x^2} \frac{h^2}{2} \pm \frac{d^3 y}{d x^3} \frac{h^3}{2 . 3} + \ldots$$

ist; so folgt, dafs in der Reihe der Differentialquotienten $\frac{d y}{d x}$, $\frac{d^2 y}{d x^2}$, ... nothwendig einer kommen mufs, welcher für $x = a$ [um nämlich $f(a \pm h)$ zu erhalten] imaginär wird. Offenbar gilt auch das Umgekehrte, so, dafs wenn für $x = a$, y reell und zugleich einer dieser genannten Differentialquotienten imaginär wird, der Punct $x = a$, $y = f(a)$ ein conjugirter Pnnct der Curve $y = f(x)$ seyn wird.

Auch mufs sich, wie bei den vielfachen Puncten, der Differentialquotient $\frac{d y}{d x}$, welcher aus der von ihren Wurzelgröfsen befreiten Gleichung der Curve $u = o$ abgeleitet ist, für einen solchen Punct unter der Form $\frac{o}{o}$ darstellen. Denn nimmt man an, dafs in der Reihe der auf einander folgenden Differentialquotienten jener $\frac{d^n y}{d x^n}$ der erste ist, welcher für $x = a$ imaginär wird; so soll zufolge der im

§. 27. entwickelten Relation (r, dieser imaginäre Werth aus der Gleichung

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \frac{V}{\left(\frac{d u}{d y}\right)}$$

hervorgehen; dieses ist aber nicht möglich, weil nach dem, was vorausgesetzt wurde, weder V noch $\left(\frac{d u}{d y}\right)$ eine Wurzelgröfse enthält (was sonst, wenigstens bei den algebraischen Curven, der Fall seyn müfste). Dieser Widerspruch kann aber nicht anders gehoben werden, als dafs obiger Quotient die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, oder was dasselbe ist, dafs die Gleichung $\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^n y}{d x^n} - V = 0$ für $x = a$ identisch Null wird; es mufs also für $x = a$: $\left(\frac{d u}{d y}\right) = 0$, und daher wegen Gleichung 1), §. 63., auch $\left(\frac{d u}{d x}\right) = 0$, folglich endlich

$$\frac{d y}{d x} = -\frac{\left(\frac{d u}{d x}\right)}{\left(\frac{d u}{d y}\right)} = \frac{0}{0} \text{ seyn.}$$

Um also die beigeordneten Puncte der Curve $u = 0$ zu entdecken, wird man wieder aus den Gleichungen

$$\left(\frac{d u}{d x}\right) = 0 \text{ und } \left(\frac{d u}{d y}\right) = 0$$

die Werthe von x und y bestimmen, und davon die Auflösungen, welche zugleich auch der ursprünglichen Gleichung der Curve Genüge leisten, in Bezug auf jene Eigenschaften, die den beigeordneten Puncten zukommen und oben bemerkt wurden, noch näher untersuchen.

§. 66.

Beispiele.

1. Um zu untersuchen, ob die Curve $y = (x + a)\sqrt{x}$ beigeordnete Puncte besitze, hat man, wenn diese Gleichung von der Wurzelgröfse befreit wird:

$$u = y^2 - (x + a)^2 x = 0$$

und daraus erhält man für die obigen Bedingungsgleichungen:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = -(x+a)^2 - 2(x+a)x = 0 \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y = 0\,;$$

aus welchen die brauchbare Auflösung $x = -a$, $y = 0$ folgt.

Um nun zu sehen, ob der Punct $x = -a$, $y = 0$, welcher in der ursprünglichen Gleichung der Curve mit enthalten ist, wirklich ein conjugirter sey; so folgt für $x = -a \pm h$: $y = \pm h\sqrt{(\pm h - a)}$; woraus sofort hervorgeht, dafs für $h < a$, y in beiden Fällen imaginär
Fig. 36. ausfällt, und dafs also dieser Punct (B, Fig. 36) in der That ein conjugirter oder beigeordneter Punct ist.

2. Behandelt man die Gleichung

$$y = b \pm (x-a)^3 \sqrt{(x-c)}$$

der im zweiten Beispiele des §. 64. in Bezug auf vielfache Puncte untersuchten Curve, eben so wie die vorige; so findet man leicht, dafs unter der Voraussetzung von $a < c$ der doppelte Punct $x = a$, $y = b$ zugleich ein conjugirter ist.

Anmerk. Die in der Gleichung $y = b + c(x-a)^n$ begriffene Familie von Curven biethet fast alle die besondern Puncte dar, welche hier behandelt worden sind.

Zur Selbstübung nehme man die der Gleichung

$$ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0$$

entsprechende Curve und untersuche ihren Lauf, lasse aber dabei nach und nach noch $c = 0$, $b = 0$, und endlich gleichzeitig $b = 0$ und $c = 0$ werden.

Auch gewährt die Discussion der Gleichungen

$$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0,$$

$$\text{und } y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0,$$

in Bezug auf die Form und die besondern Puncte der entsprechenden Curven eine vorzügliche und sehr zu empfehlende Uebung.

Siebentes Capitel.

Uebertragung mehrerer im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke auf *Polarcurven*.

§. 67.

Erklärung.

So wie bei einer Curve BMC (Fig. 37) auf rechtwinkelige Axen AX, AY bezogen, das Stück PT der auf der Ordinate perpendikulär stehenden Geraden AX zwischen dem Fuſspunct der Ordinate und dem Durchschnitt der Tangente: Subtangente, und das auf derselben Geraden liegende Stück PN zwischen dem genannten Fuſspunct und dem Durchschnitt der Normale: Subnormale heiſst, eben so wird damit analog, wenn man die Coordinaten aus einem Punct A zieht, nämlich die Curve auf Polarcoordinaten bezieht und dabei A als Pol, AM als Radiusvector oder Leitstrahl, der sofort die Stelle der Ordinate bei Parallelcoordinaten vertritt, annimmt, jenes Stück AT' der durch A auf AM perpendikulär gezogenen Geraden, zwischen dem Pol und Durchschnitt der Tangente: Subtangente, und das zwischen Pol und Normale liegende Stück AN': Subnormale genannt. Aus dieser Erklärung folgt, daſs die Subtangente und Subnormale auf Polarcoordinaten bezogen, nicht mehr, wie es bei Parallelcoordinaten der Fall ist, eine bestimmte unveränderliche Lage haben; sondern diese sofort für jeden Punct der Curve eine andere ist. Fig. 37.

§. 68.

Um nun zuerst die Ausdrücke oder Formeln für die Subtangente und Subnormale für irgend einen Punct M der Polarcurve BMC zu finden, sey der Radiusvector $AM = u$, der Drehungswinkel, welcher hier die Stelle der Abscisse

bei Parallelcoordinaten vertritt und sonach **absolut** oder **unabhängig** variabel ist, von der festen Geraden AQ, die mit der Axe AX den Winkel $XAQ = \alpha$ bildet, gezählt, d. i. $MAQ = \varphi$, also W. $MAX = \varphi - \alpha$; so ist

$$l)\quad y = u\, sin. (\varphi - \alpha) \text{ und } x = u\, cos. (\varphi - \alpha),$$

mithin, wenn man differentiirt und dabei φ als die unabhängige Variable ansieht, von welcher x, y und u gewisse Functionen sind:

$$dy = u\, cos. (\varphi - \alpha)\, d\varphi + sin. (\varphi - \alpha)\, du \;\ldots\; (m,$$

$$dx = - u\, sin. (\varphi - \alpha)\, d\varphi + cos. (\varphi - \alpha)\, du \;\ldots\; (n.$$

So wie nun die auf rechtwinkelige Coordinaten sich beziehende Gleichung einer Curve für Polarcoordinaten umgewandelt wird, indem man in dieser für x und y die vorigen Ausdrücke $l)$ substituirt; eben so werden die auf rechtwinkelige Coordinaten sich beziehenden Formeln (§. 44.) $y\frac{dx}{dy}$ und $y\frac{dy}{dx}$ der Subtangente PT und Subnormale PN für Polarcoordinaten umgewandelt, wenn man zuerst die Differentialquotienten nach §. 25. so verändert, wie sie verändert werden müssen, wenn, wie hier, früher y bloſs eine Function von x war, nun aber sowohl x wie y von einer dritten Variablen (hier φ) abhängen, und dann erst für y, dy und dx die obigen Werthe aus $l)$, $(m$ und $(n$ substituirt. Da aber hier (§. 25.) der erste Differentialquotient durch die neue Beziehung nicht geändert wird, so hat man nach dieser genannten Substitution:

$$PT = u\, sin. (\varphi - \alpha) \frac{cos. (\varphi - \alpha)\, du - u\, sin. (\varphi - \alpha)\, d\varphi}{sin. (\varphi - \alpha)\, du + u\, cos. (\varphi - \alpha)\, d\varphi}$$

$$PN = u\, sin. (\varphi - \alpha) \frac{sin. (\varphi - \alpha)\, du + u\, cos. (\varphi - \alpha)\, d\varphi}{cos. (\varphi - \alpha)\, du - u\, sin. (\varphi - \alpha)\, d\varphi}.$$

Nimmt man nun, da die Axe AX beliebig gewählt werden kann, α so, daſs W. $\varphi - \alpha = 90^0$ wird, wodurch AX die Lage AX' erhält, also MP mit MA, PT mit AT', und PN mit AN' zusammenfällt; so hat man, da unter dieser Voraussetzung $cos. (\varphi - \alpha) = 0$ und $sin. (\varphi - \alpha) = 1$ wird, Alles auf **Polarcoordinaten** bezogen:

$$\text{Subtangente } AT' = -\frac{u^2\, d\varphi}{du} \ldots (1$$

$$\text{Subnormale } AN' = -\frac{du}{d\varphi} \ldots (2.$$

Ohne die ähnlichen Transformationen [in §. 44., (1, (3] findet man jetzt einfacher aus den rechtwinkeligen Dreiecken AMT' und AMN':

$$\text{Tangente } MT' = \sqrt{\left(u^2 + \frac{u^4\, d\varphi^2}{du^2}\right)}$$

$$= u\sqrt{\left(1 + u^2 \frac{d\varphi^2}{du^2}\right)} \ldots (3$$

$$\text{Normale } MN' = \sqrt{\left(u^2 + \frac{du^2}{d\varphi^2}\right)} \ldots (4.$$

Aus der Formel $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ [§. 46., (1] erhält man, wenn man für dx und dy die vorigen Werthe $(n$, $(m$ setzt und reducirt:

$$\text{Elem. des Bogens } ds = \sqrt{(u^2\, d\varphi^2 + du^2)}$$

$$= d\varphi\sqrt{\left(u^2 + \frac{du^2}{d\varphi^2}\right)} \ldots (5.$$

Das Flächenelement ist hier, wenn W. $MAm = d\varphi$, der Sector MAm. Nun ist [§. 46., (3]

$$d.BAM = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

folglich auch, wenn man für x, y, dx, dy die obigen Werthe substituirt und gehörig reducirt:

$$\text{Flächenelem. } d.BAM = \text{Sector } MAm = \tfrac{1}{2}u^2\, d\varphi \ldots (6\ *).$$

*) Nach der Methode des unendlich Kleinen erhält man die hier entwickelten Ausdrücke direct auf folgende Art. Denkt man sich aus A als Mittelpunct mit dem Halbmesser $AM = u$ den unendlich kleinen Kreisbogen $Mn = u\,d\varphi$ beschrieben, so kann dieser mit seiner, so wie der Bogen der Curve $Mm = ds$ mit der Sehne Mm verwechselt werden, und da $mn = du$ ist; so hat man aus den ähnlichen Dreiecken Mnm, MAT' und MAN' (ohne Rücksicht auf die Lage):

$$du : u\,d\varphi = u : AT' = u^2\frac{d\varphi}{du};\quad u\,d\varphi : du = u : AN' = \frac{du}{d\varphi}.$$

Aus dem rechtwinkeligen Dreieck Mnm selbst ist:

$$ds = \sqrt{(u^2\, d\varphi^2 + du^2)};$$

und endlich hat man Sector MAm = Dreieck MAm = $\frac{1}{2}(u + du)u\,d\varphi = \frac{1}{2}u^2\,d\varphi$; Alles so wie oben.

Um endlich den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser zu erhalten, hat man zuerst aus

$$\gamma = \frac{-\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (§. 52., II.)$$

Da man der obigen Bemerkung gemäfs, nach §. 25. statt $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$ setzen mufs:

$$\gamma = \frac{-\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{(dx\,d^2y - dy\,d^2x) : dx^3} = \frac{-(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

wobei alle Differentiale in Beziehung auf φ zu nehmen sind.

Nun ist, wenn man die obigen Gleichungen (m und (n noch einmal differentiirt und $d\varphi$ als constant ansieht:

$$d^2y = sin.(\varphi - \alpha)\,d^2u$$
$$+ 2\,cos.(\varphi-\alpha)\,du\,d\varphi - u\,sin.(\varphi-\alpha)\,d\varphi^2$$

und

$$d^2x = cos.(\varphi-\alpha)\,d^2u$$
$$- 2\,sin.(\varphi-\alpha)\,du\,d\varphi - u\,cos.(\varphi-\alpha)\,d\varphi^2,$$

also nach einer leichten Entwicklung und Reduction:

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = -u\,d^2u\,d\varphi + u^2\,d\varphi^3 + 2\,du^2\,d\varphi;$$

daher (wie wir bereits oben in ds fanden) wegen

$$dx^2 + dy^2 = u^2\,d\varphi^2 + du^2$$

endlich:

$$\text{Krüm. Halbm. } \gamma = \frac{(u^2\,d\varphi^2 + du^2)^{\frac{3}{2}}}{u\,d^2u\,d\varphi - 2\,du^2\,d\varphi - u^2\,d\varphi^3}$$

$$= \frac{\left(u^2 + \frac{du^2}{d\varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{u\frac{d^2u}{d\varphi^2} - 2\frac{du^2}{d\varphi^2} - u^2} \quad \ldots (7.$$

§. 69.

Will man umgekehrt die Gleichung $u = F(\varphi)$ einer Curve, auf Polarcoordinaten bezogen, wobei A der

Pol und AQ die Axe ist, für rechtwinkelige Coordinatenaxen AX, AY umwandeln; so hat man aus den Gleichungen l) des vorigen Paragraphes:

$$p)\quad sin.(\varphi - \alpha) = \frac{y}{u} \quad \text{und} \quad cos.(\varphi - \alpha) = \frac{x}{u};$$

woraus man sofort die Werthe für $sin.\varphi$ und $cos.\varphi$ durch x, y, u, $sin.\alpha$ und $cos.\alpha$ ausgedrückt finden kann. Setzt man dann in der gegebenen Polargleichung für $sin.\varphi$, $cos.\varphi$ diese, und auch noch für u den Werth $\sqrt{(x^2 + y^2)}$; so erhält man für die Curve eine Gleichung $f(x, y) = 0$ in x, y, welche sich sofort auf die rechtwinkeligen Axen AX, AY (Fig. 37) bezieht.

Es ist ferner wegen

$$tang.(\varphi - \alpha) = \frac{sin.(\varphi - \alpha)}{cos.(\varphi - \alpha)} = \frac{y}{x}$$

[wenn man nämlich die vorigen Werthe p) substituirt] ist

$$q)\quad \varphi = \alpha + arc.tang.\left(\frac{y}{x}\right).$$

Fällt die Abscissenaxe AX mit der festen Geraden AQ zusammen, so wird $\alpha = 0$, und die vorigen Ausdrücke gehen in folgende einfachere über:

$$sin.\varphi = \frac{y}{u}, \quad cos.\varphi = \frac{x}{u} \quad \text{und} \quad \varphi = arc.tang.\left(\frac{y}{x}\right).$$

Eliminirt man endlich aus den beiden Gleichungen (m und (n des vorigen Paragraphes du, so erhält man ganz einfach:

$$cos.(\varphi - \alpha)\,dy - sin.(\varphi - \alpha)\,dx = u\,d\varphi,$$

und daraus, wenn man noch für $sin.(\varphi - \alpha)$ und $cos.(\varphi - \alpha)$ die Werthe aus p) setzt:

$$r)\quad d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{u^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Anmerk. Mittelst dieser Formeln lassen sich nun alle die im vorigen Paragraphe entwickelten, für Polarcoordinaten geltenden Ausdrücke und Formeln in die correspondirenden, für rechtwinkelige Coordinaten umwandeln.

So verwandelt sich z. B. die Formel des Bogenelements [§. 68., (5] $ds = \sqrt{(u^2 d\varphi^2 + du^2)}$, wenn man für $d\varphi$ den

Werth aus r), dann $u^2 = x^2 + y^2$, und endlich

$$du = d.\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{x\,dy + y\,dx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

substituirt, in die bekannte correspondirende für rechtwinkelige Coordinaten: $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Ferner erhält man durch diese genannten Substitutionen aus der Formel für das Flächenelement [§. 68, (6]:

$$d.BAM = \tfrac{1}{2} u^2 d\varphi,$$

ganz einfach die auf rechtw. Coordinaten sich beziehende:

$$d.BAM = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx). \quad \text{[Vergl. §. 46., (3]}$$

Und eben so erhält man durch Umwandlung der übrigen Formeln des vorigen Paragraphes, die bekannten correspondirenden Formeln auf rechtw. Axen bezogen des §. 44.

Achtes Capitel.

Anwendung der bisher entwickelten Sätze auf einige *transcendente* Curven.

§. 70.

Sowohl die im zweiten Bande behandelten, als auch die in dem gegenwärtigen gelegentlich und beispielsweise angeführten Curven gehören sämmtlich, da ihre Gleichungen algebraisch sind, zu den algebraischen Curven (Bd. II., §. 70., Anmerk.). Wir wollen nun in diesem Capitel auch einige der wichtigsten transcendenten Curven, für welche sich nämlich keine algebraischen Gleichungen aufstellen lassen, entwickeln; sowohl um diese Curven selbst in ihren Haupteigenschaften kennen zu lernen, als auch, um die in den vorhergehenden Capiteln abgeleiteten Formeln und Sätze noch zur weitern Erläuterung und Uebung darauf anwenden zu können.

Die *Cycloide* oder *Radlinie.*

§. 71.

Die Cycloide wird durch einen Punct der Peripherie eines auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie fortrollenden Kreises beschrieben. Dieser Kreis *MEN* (Fig. 38) heifst der Erzeugungskreis; der Punct *M*, Fig. 38. welcher die Curve oder Cycloide *ADB* beschreibt, der beschreibende Punct; die Gerade *AB*, über welche der Kreis von einer Berührung des beschreibenden Punctes bis zur nächstfolgenden wegrollt, wird die Grundlinie; so wie endlich der höchste Punct *D*, in welchem sich der beschreibende Punct *M* befindet, wenn der Kreis eine halbe Umwälzung vollendet hat, der Scheitel, und das durch denselben auf die Grundlinie gefällte Perpendikel *DC*, die Axe der Cycloide genannt.

Um eine Gleichung für diese Curve zu erhalten, nehmen wir die Gerade AB zur Abscissenaxe, den Punct A, in welchem der beschreibende Punct diese Gerade berührt, zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, und setzen sofort, wenn zu einem beliebigen Punct M der Curve die Ordinate MP gezogen wird, $AP = x$ und $PM = y$. Legt man ferner durch diesen Punct M den Erzeugungskreis O, bezeichnet seinen Halbmesser durch a, und zieht den Durchmesser EN perpendikulär auf AB, so wie endlich noch DC mit EN und MG mit AB parallel; so folgt unmittelbar aus der Erzeugungsart der Cycloide, dafs AB dem Umfange des Erzeugungskreises, und in einer beliebigen Lage O dieses Kreises, Bog. $MN = AN$ ist; weil nämlich alle Puncte des Kreisbogens MN nach und nach mit allen Puncten dieser Geraden AN in Berührung waren.

Es ist also $AP + PN = arc.MN$, oder wegen $AP = x$, $PN = Mp = \sqrt{(2ay - y^2)}$ [als Ordinate des Kreises für die Abscisse $Np = y$; Bd.II., §.16., (3] und $arc.MN = arc.sinv.Np = arc.cos.Op = arc.sin.Mp =$ etc., d. i.

$$\alpha)\quad arc.MN = a\; arc.sinv.\left(\frac{y}{a}\right) = a\; arc.cos.\left(\frac{a-y}{a}\right) =$$
$$a\; arc.sin.\left(\frac{\sqrt{(2ay-y^2)}}{a}\right) \text{ u. s. w.}$$

auch:

$$x + \sqrt{(2ay - y^2)} = a\; arc.sinv.\left(\frac{y}{a}\right)$$

und daraus:

$$x = a\; arc.sinv.\left(\frac{y}{a}\right) - \sqrt{(2ay - y_2)}\; \ldots\; (1$$

oder auch:

$$x = a\; arc.cos.\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{(2ay - y^2)}\; \ldots\; (2$$

als gesuchte Gleichung der Cycloide, in welcher man, zufolge der vorigen Ausdrücke α), den transcendenten Theil auch durch Sinus, Tangente u. s. w. ausdrücken könnte. Differentiirt man eine dieser Gleichungen, z. B. die letztere (2; so erhält man:

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{[a^2 - (a-y)^2]}} - \frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$$

d. i. $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$. . . (3

als **Differentialgleichung der Cycloide.**

Anmerk. Um eine Gleichung der Cycloide zu erhalten, in welcher der Scheitel D zum Ursprung und die Gerade DC zur Abscissenaxe genommen, also $DG = x$ und $GM = y$ ist; wird man in der obigen Gleichung (1, um zuerst den Anfangspunct nach C zu verlegen, statt x, $AC - x = a\pi - x$ setzen (wodurch $CP = x$ und $CG = y$ wird), hierauf x und y mit einander verwechseln (dadurch wird $CG = x$, $CP = y$) und endlich noch statt x, $2a - x$ schreiben (wodurch sofort $DG = x$ und $MG = y$ wird). Auf diese Weise erhält man für die gesuchte Gleichung der Cycloide auch:

$$y = a\pi - a\ arc.sinv.\left(\frac{2a - x}{a}\right) + \sqrt{(2ax - x^2)},$$

oder wenn man auf die Figur zurückgeht:

$$MG = \text{Bog.}\, Dm + mG;$$

daraus folgt, daſs $Mm = \text{Bog.}\, Dm$ ist.

Setzt man, um die Cycloide mittelst Puncte zu construiren, den Halbmesser $a = 1$; so wird

$$GM = arc.\, Dm + sin.\, Dm;$$

welche Stücke, wenn Dm in Gradmaſs gegeben ist, leicht aus den Tafeln genommen, und von G gegen M (oder bequemer von C bis P) aufgetragen werden können *).

§. 72.

Setzt man, um die Durchschnitte dieser Curve mit der Abscissenaxe zu erhalten, in der Gleichung der Cycloide $y = 0$; so entsteht aus (2: $x = a\, arc.cos.\, 1$, und da für den Halbmesser $= 1$

$$arc.cos.\, 1 = 0 = \pm 1 . 360^\circ = \pm 2 . 360^\circ = \pm 3 . 360^\circ \text{ u. s. w.},$$

ferner hier $a\, arc.(\pm 360^\circ) = \pm$ Peripherie $MENM = \pm AB$ ist; so folgt, daſs für diese gesuchten Durchschnittspuncte $x = 0 = \pm 1 . AB = \pm 2 . AB = \pm 3 . AB$ etc., mithin die Cycloide von der Abscissenaxe in unendlich vielen Puncten geschnitten wird. Diese Curve besteht also, streng genom-

*) Nähere Anleitung zur Construction dieser Curve, findet man auſser mehreren anderen gröſseren Werken, besonders auch in den weiter unten (S. 227) citirten Schriften von *Burg* und *Schaffnit*.

men, aus unzähligen solchen cycloidischen Bögen ADB, in deren Reihe der hier betrachtete nur ein Glied bildet; und in der That, man darf bei der Entstehung der Cycloide den erzeugenden Kreis nach einer Umwälzung nicht stille stehen lassen, sondern man mufs sich vorstellen, dafs er diese ohne Ende wiederholt; dabei kann er von A aus gegen B, oder auch nach der entgegengesetzten Seite hin auf der Geraden AB und ihrer Verlängerung fortrollen.

Wird die Gleichung der Cycloide weiter discutirt, so findet man sehr leicht noch ihre übrigen Eigenschaften: z. B. dafs für die Abscisse $x = AC$ die gröfste Ordinate CD Statt findet; dafs durch letztere der Bogen ADB (den man gemeinhin die Cycloide nennt) in zwei symmetrische Theile getheilt wird; dafs diese Curve gänzlich oberhalb der Abscissenaxe liegt, u. s. w.

§. 73.

Nach den im §. 44. entwickelten allgemeinen Formeln erhält man mit Hilfe der obigen Gleichung (3, aus welcher

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$$

folgt, sehr leicht:

$$\text{Subtangente } PT = \frac{y^2}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$$

$$\text{Subnormale } PN = \sqrt{(2ay - y^2)}$$

$$\text{Tangente } MT = \frac{y\sqrt{(2ay)}}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$$

$$\text{Normale } MN = \sqrt{(2ay)};$$

Ausdrücke, welche sich sämmtlich sehr einfach construiren lassen.

Es ist nämlich $PN = \sqrt{(2ay - y^2)} = Mp$, also die Normale nichts anderes, als die Sehne MN; wie auch der Ausdruck $\sqrt{(2ay)}$ für die Normale selbst zeigt, da im rechtwinkeligen Dreiecke MpN, $Mp = \sqrt{(2ay - y^2)}$ und $Np = y$, folglich in der That: Sehne $MN = \sqrt{(2ay)}$ ist. Die Tangente ist sonach nichts anderes, als die Verlängerung der Sehne EM; weil der W. EMN ein Rechter ist. Beschreibt man also über der Geraden DC als Durchmes-

ser den feststehenden Kreis $DmCD$, so werden am einfachsten zu irgend einem Punct M der Cycloide die Tangente und Normale gezogen, indem man durch diesen Punct M mit AB die Parallele MG zieht, den Durchschnittspunct m mit D und C verbindet, und endlich aus M zu mD und mC die Parallelen MT und MN führt; denn es ist leicht zu sehen, daſs wenn DC zu EN parallel ist, und MG perpendikulär auf DC steht, die Sehnen mD und mC beziehungsweise zu jenen ME und MN parallel sind. Aus dieser Construction folgt auch unmittelbar, daſs im Scheitel D die Tangente mit der Abscissenaxe AB parallel lauft (was damit übereinstimmt, daſs in D die Ordinate am gröſsten ist; vergl. §. 57.) und die Normale mit DC zusammenfällt.

Wird die Gleichung (3 des §. 71. noch einmal differentiirt und dabei wieder dx als constant angenommen; so erhält man daraus nach einer ganz einfachen Reduction:

$$d^2y = \frac{-a\,dy^2}{2ay-y^2}, \text{ also } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{2ay-y^2}\cdot\left[\frac{dy}{dx}\right]^2,$$

oder wenn man für $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth [aus (3] setzt und die einfache Reduction vornimmt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}.$$

Dieser Ausdruck gibt zu erkennen, daſs (§. 48.) die Cycloide der Abscissenaxe ihre hohle Seite zukehrt.

Da ferner für $y = 0$ dieser zweite Differentialquotient Unendlich wird, so kann man in A und B Rückkehrpuncte oder Spitzen der ersten Art vermuthen (§. 61.); was auch in der That bestätiget wird, wenn man die Untersuchung in dieser Beziehung (nach §. 61., wobei die Coordinatenaxen zu verwechseln sind) vornimmt.

Setzt man ferner die für die beiden ersten Differentialquotienten gefundenen Werthe in die letzte der Formel II., §. 52.; so erhält man

$$\text{Krümmungshalbmesser } \gamma = 2\sqrt{(2ay)}.$$

Der Krümmungshalbmesser der Cycloide ist daher in jedem Puncte der entsprechenden doppelten Normale gleich,

folglich im Anfangspuncte A (oder in B) $= 0$, und im Scheitel D, wo er seinen gröſsten Werth erreicht, $= 4a$.

Man findet ferner noch ohne Mühe aus II., §. 52.:

$$x - \alpha = -2\sqrt{(2ay - y^2)} \text{ und } y - \beta = 2y;$$

folglich sind die Coordinaten des Mittelpunctes des Krümmungskreises für irgend einen Punct x, y der Cycloide:

$$\alpha = x + 2\sqrt{(2ay - y^2)} \text{ und } \beta = -y.$$

Setzt man in der ersten dieser beiden Gleichungen für x den Werth aus der Gleichung (1 (§. 71.) und eliminirt dann aus dieser und aus der letztern $\beta = -y$ die Gröſse y; so erhält man (§. 54, 3.) die Gleichung der Evolute, und zwar:

$$\alpha = a\, arc.\, sinv. \left(-\frac{\beta}{a}\right) + \sqrt{(-2a\beta - \beta^2)};$$

welche sofort zeigt, daſs die Evolute der Cycloide, bei dem angenommenen Coordinatensystem, nur für negative Ordinaten besteht. Nimmt man statt der negativen Ordinate $-\beta = QM'$ die positive $\beta' = P'M'$, und zählt diese letztern von der Geraden $A'B'$, welche in dem Abstand von $A'C = 2a$ mit AB parallel gezogen ist, setzt also in der vorigen Gleichung $\beta = -(2a - \beta')$; so erhält man

$$\alpha = a\, arc.\, sinv. \left(\frac{2a - \beta'}{a}\right) + \sqrt{(2a\beta' - \beta'^2)}.$$

Will man endlich die Abscissen nicht von C' aus, als dem Fuſspunct des aus A auf $A'B'$ gefällten Perpendikels, sondern von A' aus, in welchem Puncte die letztere Gerade von der verlängerten DC geschnitten wird, zählen; so wird man in dieser letzten Gleichung statt α, $A'C' - \alpha = a\pi - \alpha$ setzen, und dadurch erhalten:

$$\alpha = a\left[\pi - arc.\, sinv \left(\frac{2a - \beta'}{a}\right)\right] - \sqrt{(2a\beta' - \beta'^2)},$$

oder wegen $\pi - arc.\, sinv. \left(\frac{2a - \beta'}{a}\right) = arc.\, sinv. \left(\frac{\beta'}{a}\right)$ (indem sich die Sinusversusse zweier Bogen, die zusammen 180° ausmachen, zum Durchmesser ergänzen) endlich:

$$\alpha = a\, arc.\, sinv. \left(\frac{\beta'}{a}\right) - \sqrt{(2a\beta' - \beta'^2)}.$$

Da nun diese Gleichung mit jener (1 (§. 71.) der Cycloide vollkommen übereinstimmt, so folgt, dafs die Evolute der Cycloide wieder eine Cycloide ist, die von dem nämlichen Erzeugungskreis beschrieben wird, während sich derselbe auf der Geraden $A'B'$ in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung wälzt.

Setzt man endlich noch den für $\frac{dy}{dx}$ gefundenen Werth [§. 71., (3] in die Formeln (1 und (2, §. 46.; so erhält man für das

Element des Bogens der Cycl.: $ds = \sqrt{(2a)}\,\frac{dy}{\sqrt{(2a-y)}}$... (4

» der Fläche » » $dz = \frac{y^2\,dx}{\sqrt{(2ay-y^2)}}$... (5.

Anmerk. Liegt der beschreibende Punct M' nicht in der Peripherie des wälzenden Kreises $CmDC$, sondern innerhalb oder aufserhalb derselben; so wird im ersten Falle die gedehnte oder geschweifte (Fig. 39) und im zweiten Falle die verkürzte oder verschlungene Cycloide (Fig. 40) beschrieben; in diesen beiden Fällen ist $C'm'D'C'$ der Erzeugungskreis und $A'B' = AB$ die Grundlinie der Curve. Bezeichnet man in allen drei Cycloiden den Halbmesser des Erzeugungskreises mit a, den dem Puncte M' entsprechenden Wälzungswinkel MON durch φ, setzt die Grundlinie $AB = 2ma\pi$ und nimmt an, dafs sich $A'N'$: Bog. $M'N'$ (d. i. Bog. MN : Bog. $M'N'$) $= m : 1$ verhalte; so wird offenbar, je nachdem $m = 1$, $m > 1$ oder $m < 1$ ist, die gemeine, gedehnte, oder verkürzte Cycloide beschrieben; die Grundlinie AB ist in diesen drei Fällen beziehungsweise $=$, $>$ oder $<$ als der Umfang $2a\pi$ des Erzeugungskreises. Die gemeinschaftliche Gleichung dieser drei Curven kann auf folgende Art abgeleitet werden: Aus $A'N' : a\varphi = m : 1$ folgt Fig. 39 u. 40.

$$A'N' = ma\varphi;$$

ferner ist:

$$P'N' = M'p = a\,sin.\varphi \text{ und } M'P' = pN' = a\,sinv.\varphi = a\,(1 - cos.\varphi);$$

folglich wegen $x = A'P' = A'N' - P'N'$ und $y = P'M'$ (für die gemeine Cycloide fallen die Accente weg):

$$x = a\,(m\varphi - sin.\varphi) \text{ und } y = a\,(1 - cos.\varphi).$$

Eliminirt man daher aus diesen beiden Gleichungen den Winkel φ, so erhält man die gesuchte Gleichung in x, y. Nun folgt aus der letztern:

$$\cos.\varphi = \frac{a-y}{a} \text{ oder } \varphi = arc.\cos.\left(\frac{a-y}{a}\right)$$

$$\text{und } \sin.\varphi = \sqrt{(1-\cos.^2\varphi)} = \frac{1}{a}\sqrt{(2ay-y^2)};$$

werden diese Werthe in der erstern Gleichung substituirt, so erhält man also für die gesuchte Gleichung:

$$x = ma\, arc.\cos.\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{(2ay-y^2)};$$

und diese gehört sofort der gemeinen, gedehnten oder verkürzten Cycloide, je nachdem $m = 1$ [vergl. §. 71., Gl. (2] $m > 1$, oder $m < 1$ ist.

Wird der Halbmesser des Wälzungskreises durch a' bezeichnet, so ist $AB = 2a'\pi$; folglich der obigen Annahme gemäfs: $2ma\pi = 2a'\pi$, und daher $m = \frac{a'}{a}$.

Diese drei Curven, deren übrige Eigenschaften (wie wir dieses für die gemeine Cycloide bereits gethan haben) der fleifsige Anfänger aus der vorigen Gleichung im Zusammenhange selbst untersuchen wird, kommen auch unter der gemeinschaftlichen Benennung von Trochoiden vor*).

*) Mehrere Geometer haben auch unter der Trochoide die sogenannte kleine Cycloide oder Begleiterin der Cycloide (*Socia cycloidis*) verstanden, welche durch einen Fig. 41. Punct der Peripherie des Kreises C (Fig. 41) beschrieben wird, indem der Mittelpunct C die Gerade $bb' = BB'$ gleichförmig durchläuft, während der Kreis ebenfalls gleichförmig Eine Umdrehung macht. (Ist BB' = Umfang des Kreises, so ist BDB' die gem. Cycloide.) Aus dieser Erzeugungsart folgt $PM : AB$ = Bog. Dm : Bog. DmA, so, dafs das Verhältnifs aus der Ordinate PM und dem entsprechenden Bogen Dm des Erzeugungskreises beständig ist.

Setzt man

$$BB' = 2b,\quad CD = CA = a,\quad DP = x \text{ und } PM = y;$$

so ist zufolge der vorigen Proportion

$$y : b = a\, arc.\, sinv\cdot\left(\frac{x}{a}\right) : a\pi,$$

also $y = \frac{b}{\pi} arc\, sinv.\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{b}{\pi} arc.\sin.\frac{[\sqrt{(2ax-x^2)}]}{a}$ die Gleichung dieser Curve.

Taylor hat zuerst gezeigt, dafs eine schwingende Saite, wenn diese nur wenig aus ihrer anfänglichen Lage BB' gebracht wird, eine solche, aber sehr verlängte Trochoide, bei welcher nämlich AD gegen BB' sehr klein ist, bilden müsse, wenn alle Puncte derselben gleichzeitig wieder in die Axe BB' oder ursprüngliche Lage zurückgehen sollen.

Die *Epicycloide.*

§. 74.

Wälzt sich der erzeugende Kreis statt auf einer geraden Linie, auf der convexen Seite eines zweiten Kreises, des Grundkreises; so beschreibt irgend ein Punct der Peripherie des erstern die Epicycloide.

Um eine Gleichung dieser Curve abzuleiten, sey AM (Fig. 42) ein Bogen derselben, welcher von dem Puncte A des Erzeugungskreises beschrieben wird, während der letztere aus der Lage c in jene c'; der beschreibende Punct A nach M, also ein Punct a, für welchen Bog. $Aa =$ Bog. Aa' ist, mit dem Grundkreis zur Berührung kommt. Diefs vorausgesetzt, ziehe man die Centrilinien Cc, Cc'; ferner aus M und c' auf Cc die Perpendikel MP, $c'd$; und endlich Mm parallel zu Cc; setze den Halbmesser des Grundkreises $CA = R$, jenen des erzeugenden Kreises $Ac = Mc' = r$, den Wälzungswinkel $ACa' = \varphi$, jenen $Aca = Mc'a' = \varphi'$ und nehme endlich $CP = x$ zur Abscisse und $PM = y$ zur rechtwinkeligen Ordinate des Punctes M; so ist offenbar Fig. 42.

$$x = CP = Cd + Mm \text{ und } y = MP = c'd - c'm.$$

Die beiden recktw. Dreiecke $Cc'd$ und Mmc' geben aber

Die Cycloide hat ihrer merkwürdigen geometrischen und mechanischen Eigenschaften wegen die Geometer des siebzehnten Jahrhunderts vielfältig beschäftiget: *Galilei* (*G. Galileo*, geb. zu Pisa 1564; gest. in der Nähe von Florenz 1642 — zugleich *Newton's* Geburtsjahr —) war der erste, welcher ihre geometrischen Eigenschaften untersuchte. *Huygens* (geb. im Haag 1629; gest. ebend. 1695) fand, dafs durch Abwicklung dieser Curve eine ihr gleiche entstehe, und dafs ein schwerer Punct in der umgekehrten Cycloide von lothrechter Axe, in welcher also der Scheitel den tiefsten Punct bildet, in einerlei Zeit bis zum Scheitelpunct herabfällt, er mag von was immer für einen Punct der Curve zu fallen anfangen; wegen dieser Eigenschaft heifst die Cycloide auch Tautochrone oder Isochrone. Später fand *Joh. Bernoulli*, dafs die Linie des schnellsten Falles, d. i. die Linie, auf welcher ein schwerer Punct von einem gegebenen zu einem nicht in derselben Verticallinie liegenden Punct in der kürzesten Zeit fällt, ein Bogen der gem. Cycloide sey, für welche der tiefere Punct den Scheitel bildet. Dieser Eigenschaft wegen wird die Cycloide auch Brachistochrone genannt.

$$c'd = (R+r)\,sin.\,\varphi,\quad Cd = (R+r)\,cos.\,\varphi;$$

ferner

$$Mm = r\,sin.\,Mc'm \text{ und } c'm = r\,cos.\,Mc'm,$$

oder wegen W. $Mc'm = \varphi' - (90 - \varphi) = \varphi + \varphi' - 90$

auch: $Mm = -r\,cos.\,(\varphi + \varphi')$ und $c'm = r\,sin.\,(\varphi + \varphi')$;

werden also diese Werthe in die vorigen Ausdrücke von x und y gesetzt, so erhält man

$$x = (R+r)\,cos.\,\varphi - r\,cos.\,(\varphi + \varphi')$$
$$\text{und } y = (R+r)\,sin.\,\varphi - r\,sin.\,(\varphi + \varphi').$$

Mit Rücksicht auf die aus der Natur der Wälzung hervorgehenden Relation $r\varphi' = R\varphi$, läſst sich einer der beiden Winkel φ oder φ' aus diesen Gleichungen eliminiren; denn es ist $\varphi' = \frac{R}{r}\varphi$ und $\varphi = \frac{r}{R}\varphi'$, folglich:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+r)\,cos.\,\varphi - r\,cos.\left(\frac{R+r}{r}\right)\varphi \\ y &= (R+r)\,sin.\,\varphi - r\,sin.\left(\frac{R+r}{r}\right)\varphi \end{aligned}\right\}\text{ I.}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+r)\,cos.\,\frac{r}{R}\varphi' - r\,cos.\left(\frac{R+r}{R}\right)\varphi' \\ y &= (R+r)\,sin.\,\frac{r}{R}\varphi' - r\,sin.\left(\frac{R+r}{R}\right)\varphi' \end{aligned}\right\}\text{ II.}$$

und dieſs sind die Gleichungen der Epicycloide, weil sie für jeden Winkel φ oder φ' den betreffenden Punct dieser Curve bestimmen. Die vollständige Curve besteht ebenfalls wieder aus unzählig vielen epicycloidischen Bögen wie AMA', in deren Reihefolge aber in gewissen Abständen immer wieder einer mit dem ersten, der nächste mit dem zweiten u. s. w. zusammenfällt, wenn das Verhältniſs $\frac{R}{r}$ rational ist *).

*) Man überzeugt sich leicht, daſs dieselbe Epicycloide auch entsteht, wenn sich der Erzeugungskreis vom Halbmesser $R+r$ mit seiner innern oder concaven Seite auf der convexen Seite des Grundkreises vom Halbmesser R wälzt. Denn man darf nur, um in diesem Falle die Gleichungen der entstehenden Epicycloide zu erhalten, in den obigen Gleichungen I. zuerst R negativ nehmen, dann statt r, $R+r$

In den besondern Fällen, in welchen der Quotient $\frac{R}{r}$ oder $\frac{r}{R}$ eine ganze Zahl wird, kann beziehungsweise aus I. oder II. der Winkel φ oder φ' eliminirt und sofort für diese Curve eine Gleichung in x, y erhalten werden. Für den sehr einfachen Fall z. B. von $R = r$ hat man aus jedem der beiden Systeme (wegen $\varphi' = \varphi$)

$$x = 2r\cos.\varphi - r\cos.2\varphi$$
$$y = 2r\sin.\varphi - r\sin.2\varphi$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen die Summe der Quadrate macht:

$$x^2 + y^2 = 5r^2 - 4r^2\cos.\varphi \quad . \ . \ (m.$$

Wegen $\cos.2\varphi = 2\cos.^2\varphi - 1$, wird ferner auch

$$x = 2r\cos.\varphi - 2r\cos.^2\varphi + r, \text{ also } \cos^2.\varphi - \cos.\varphi = \frac{r-x}{2r}$$

und daraus $\cos.\varphi = \frac{r \pm \sqrt{(3r^2 - 2rx)}}{2r}$; wird dieser Werth in ($m$ substituirt, so erhält man

$$x^2 + y^2 = 3r^2 \mp 2r\sqrt{(3r^2 - 2rx)},$$

oder $4r^2(3r^2 - 2rx) = (x^2 + y^2)^2 - 6r^2(x^2 + y^2) + 9r^4$, also endlich

$$y^4 + 2(x^2 - 3r^2)y^2 + x^4 - 6r^2x^2 + 8r^3x - 3r^4 = 0,$$

als Gleichung der Epicycloide in dem angeführten besondern Fall, in welchem diese Curve die Form $AMOM'A$ (Fig. 43) hat und Cardioide genannt wird. Fig. 43.

Will man die Abscissen anstatt von C, von A aus zählen und also statt CP, $AP = x$ setzen; so darf man nur in der letzten Gleichung statt CP, $AC - AP$, d. i statt x, $r - x$ setzen; man erhält dadurch, wenn man auch noch den Durchmesser des Erzeugungskreises $2r = A$ setzt, für die

und statt φ, $\frac{R+r}{r}\varphi$ setzen, um den vorigen Fall auf diesen zu bringen. Dadurch bleiben aber die genannten Gleichungen I. bis auf die Zeichen, die jetzt für x und y, der Natur der Sache angemessen, negativ ausfallen, ungeändert; zum Beweis, dafs durch diese Beschreibung wieder dieselbe Epicycloide erzeugt wird.

Gleichung der Cardioide:

$$y^4-(A^2+2Ax-2x^2)y^2-2Ax^3+x^4=0\ \ldots\ (\alpha$$

Daraus findet man leicht alle Haupteigenschaften dieser Curve: z. B. nach §. 61, daſs sie in A einen Rückkehrpunct besitzt; in diesem Puncte eine Spitze bildet, in welchem die Abscissenaxe AO die an beide Aeste gemeinschaftliche Tangente ist, u. s. w.

Betrachtet man in dieser letztern Curve den Erzeugungskreis in zwei solchen Lagen c' und c'', für welche die Centrilinie $c'c''$ zugleich durch den Mittelpunct C des Grundkreises geht, also W. Aca = W. ACa' = W. $a'c'M$ = W. $a''c''M'$ und W. $M'c''b''$ = W. ACb'' wird, und der beschreibende Punct A sich beziehungsweise in M und M' befindet; so liegen, wie man leicht sieht, die drei Puncte M', A, M in einer, mit der $c'c''$ parallel laufenden Geraden; und da noch, wenn man CB zieht, die Geraden $c''M'$, CB und $c'M$ unter einander parallel sind, so ist $BM=Cc'=2r$. Man kann also die Cardioide sehr leicht durch Puncte M, M' construiren, wenn man durch A beliebige Sehnen AB zieht, diese zu beiden Seiten verlängert, und darauf $BM=BM'=2r$ abschneidet*).

Anmerk. Setzt man $r=\infty$, so geht offenbar der erzeugende
Fig. 44. Kreis in eine gerade Linie Aa (Fig. 44) und die Epicy-

*) Aus dieser Entstehungsart der Cardioide, welches eigentlich die ursprüngliche ist, kann man auch sehr leicht ihre Gleichung ableiten. Zieht man nämlich noch (Fig. 43) die Sehne BD, setzt

Fig. 43.

$$AD=A,\ AP=x,\ PM=y \text{ und } AM=AB+A=z;$$

so folgt aus den beiden ähnlichen Dreiecken ABD und APM:

$$AD:AB=AM:AP \text{ oder } A:z-A=z:x$$

und daraus

$$Ax=z^2-Az, \text{ oder wegen } z=\sqrt{(x^2+y^2)} \text{ auch:}$$

$$A\sqrt{(x^2+y^2)}=x^2+y^2-Ax,$$

oder wenn man quadrirt und reducirt, endlich, wie oben in (α:

$$y^4-(A^2+2Ax-2x^2)y^2-2Ax^3+x^4=0.$$

Diese Curve ist zugleich, wie wir [Cap. 10., §. 217., a)] sehen werden, die Brennlinie durch Zurückstrahlung (*Catacaustica*) für einen Kreis $ORa''O$, vom Halbmesser $CO=3CA=3r$ oder Durchmesser $=3A$. Befindet sich

cloide in die Evolvente des Kreises $AMA'\ldots$ über, welche durch Abwicklung des Grundkreises C entsteht (§. 54.) und um diesen in unzähligen, sich immer weiter von ihm entfernenden Windungen fortgeht.

Um die Gleichungen für die Evolvente zu erhalten, hat man aus I,, wenn der Cosinus und Sinus von der Summe der Bogen aufgelöst wird:

$$x = R\cos.\varphi + r\cos.\varphi - r\cos.\left(\frac{R}{r}\varphi\right)\cos.\varphi + r\sin.\left(\frac{R}{r}\varphi\right)\sin.\varphi$$

$$y = R\sin.\varphi + r\sin.\varphi - r\sin.\left(\frac{R}{r}\varphi\right)\cos.\varphi - r\cos.\left(\frac{R}{r}\varphi\right)\sin.\varphi$$

oder wegen

$$r\cos.\left(\frac{R}{r}\varphi\right) = r\cos.\left(\frac{R}{\infty}\varphi\right) = r$$

und da aus $R\varphi = r\varphi'$, $r = R\frac{\varphi}{\varphi'}$ folgt, wegen

$$r\sin.\left(\frac{R}{r}\varphi\right) = \frac{R\varphi\sin.\left(\frac{R}{r}\varphi\right)}{\varphi'} = R\varphi\frac{\sin.\,o}{o} = R\varphi,$$

indem für $r = \infty$ offenbar der Mittelpunctswinkel $\varphi' = o$ und $\frac{\sin.\,o}{o} = 1$ wird (§. 32., Beisp. 3.), auch, wenn man reducirt:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos.\varphi + R\varphi\sin.\varphi \\ y = R\sin.\varphi - R\varphi\cos.\varphi \end{array}\right\}$$

Aus diesem Systeme der Gleichungen lassen sich nun leicht alle Eigenschaften der Kreisevolvente entwickeln; wir wollen blofs noch, des künftigen Gebrauches wegen, das Curvenelement aufsuchen. Es folgt ganz einfach aus diesen Gleichungen: $dx = R\varphi\cos.\varphi\,d\varphi$ und $dy = R\varphi\sin.\varphi\,d\varphi$, mithin nach der Formel $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ auch:

$$ds = R\varphi\,d\varphi\ \ldots\ (n\,*).$$

nämlich in dem Endpuncte O des durch A gehenden Durchmessers ein leuchtender oder strahlender Punct, so wird diese Curve von allen zurückgeworfenen Strahlen, wie RQ (wo W. QRC = W. ORC ist) tangirt; oder diese Curve entsteht auch durch die auf einander folgenden Durchschnittspuncte aller reflectirten Strahlen RQ.

*) Die Kreisevolvente findet in der Mechanik eine sehr gute und nützliche Anwendung; so müssen z. B. die Hebedaumen eines Stampfwerkes nach dieser Curve gekrümmt werden, wenn der verticale Stampfer gleichförmig gehoben und dabei die Entfernung des Angriffspunctes auf die Hebelatte vom Schwerpunct des Stampfers nicht geändert werden soll; die Kämme einer gezahnten Stange sollen ebenfalls nach

Die *Hypocycloide.*

§. 75.

Wälzt sich der erzeugende Kreis auf der **concaven** Seite des Grundkreises, so beschreibt irgend ein Punct A
Fig. 45. des erstern die Hypocycloide AMA' (Fig. 45). Hat der Punct A, während der Erzeugungskreis aus der Lage c in jene c' gekommen ist, den Bogen AM beschrieben, und setzt man, wenn Bog. Aa = Bog. Aa' ist, W. $ACa' = \varphi$, W. Aca = W. $Mc'a' = \varphi'$, $CA = R$, $cA = c'a' = r$, fällt auf den Halbmesser CA, welchen wir zur Abscissenaxe wählen wollen, die Perpendikel MP, $c'd$, und setzt endlich $CP = x$, $PM = y$; so kann man genau auf demselben Weg, den wir im vorigen Paragraphe eingeschlagen haben, die Gleichung der Hypocycloide ableiten. Da aber eine solche Wiederholung überflüssig ist, so wird man weit einfacher diese Gleichung unmittelbar aus jener der Epicycloide herleiten, wenn man dort nur den Halbmesser r des Erzeugungskreises **negativ** nimmt; dadurch erhält man

dieser Linie, und zwar immer für den gegebenen Grundkreis geformt werden.

Die Construction dieser Curve für einen gegebenen Grundkreis C mittelst Puncte ist sehr einfach. Nimmt man näm-
Fig. 44. lich einen so kleinen Bogen $A1$ (Fig. 44) dieses Kreises, daſs man ihn ohne merklichen Fehler mit seiner Sehne verwechseln darf, trägt diesen von A nach 1, 2, 3, . . ., errichtet in diesen Puncten an den Kreis die Tangenten, und schneidet darauf beziehungsweise $11' = A1$, $22' = 2.A1$, $33' = 3.A1$, u. s. w. ab; so sind 1′, 2′, 3′, . . . Puncte der Evolvente; oder man kann auch gleich aus den Theilungspuncten 1, 2, 3, . . . mit den Halbmessern $11' = A1$, $22' = 2A1$, $33' = 3.A1$, u. s. w. die kleinen Kreisbögen $A1'$, $1'2'$, $2'3'$, . . . beschreiben, und so die Curve zusammensetzen. (Genauer können die Puncte 1′, 2′, 3′, . . . erhalten werden, wenn man nach einer der bekannten Constructionen eine gerade Linie gleich der halben Kreisperipherie bis auf mehrere Decimalstellen genau abschneidet, diese Gerade sowohl wie den halben Grundkreis in eine beliebige aber gleiche Anzahl gleicher Theile theilt, in den Theilungspuncten 1, 2, 3, . . . des Kreises die Tangenten zieht, und auf diesen beziehungsweise 1, 2, 3, . . . Theile von der getheilten geraden Linie bis 1′, 2′, 3′, . . . von 1, 2, 3, . . . aufträgt.) In der Anwendung kann auch noch einfacher diese Curve mechanisch durch Abwicklung selbst beschrieben werden.

aus I. und II. (§. 74.) für die Gleichung der Hypocycloide [wegen $\cos.(-\alpha) = \cos.\alpha$ und $\sin.(-\alpha) = -\sin.\alpha$]:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R-r)\cos.\varphi + r\cos.\left(\frac{R-r}{r}\right)\varphi \\ y &= (R-r)\sin.\varphi - r\sin.\left(\frac{R-r}{r}\right)\varphi \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x &= +(R-r)\cos.\frac{r}{R}\varphi' + r\cos.\left(\frac{R-r}{R}\right)\varphi' \\ y &= -(R-r)\sin.\frac{r}{R}\varphi' + r\sin.\left(\frac{R-r}{R}\right)\varphi' \end{aligned}\right\} \text{IV.}$$

Man sieht sowohl aus diesen Gleichungen, wie aus der Natur der Erzeugung der Hypocycloide, dafs diese Curve ebenfalls wieder aus unendlich vielen Bogen, wie AMA', besteht.

Anmerk. Interessant und in der Mechanik wichtig ist der besondere Fall, in welchem der Durchmesser des Erzeugungskreises dem Halbmesser des Grundkreises, d. i. $2r = R$ ist. Man hat nämlich dafür aus III.:

$$x = 2r\cos.\varphi = R\cos.\varphi \quad \text{und} \quad y = 0;$$

von welchen beiden Gleichungen, wie man sieht, jede die Gleichung der Abscissenaxe ACB ist: es verwandelt sich also unter dieser Voraussetzung die Hypocycloide in eine durch den Mittelpunct des Grundkreises gehende gerade Linie *).

*) Die Epi- und Hypocycloide sind besonders in der Mechanik bei der Verzahnung der Räder wichtig; dort werden diese Curven am einfachsten mechanisch durch wirkliche Wälzung der betreffenden Kreise construirt. Auch können diese leicht mittelst Puncte verzeichnet werden, und man kann in dieser Beziehung mit Nutzen: »Das architektonische Zeichnen,« von *M. Burg*, erster oder theoret. Theil *(Géométrie descriptive)*, Berlin 1830; »Geometrische Constructionslehre,« von *G. Schaffnit*, Darmstadt 1828; *Eitelwein's* dritten Band der Statik fester Körper, u. n. m. A. nachlesen.

Man erhält, wie bei der Cycloide, auch gestreckte und verkürzte Epi- und Hypocycloiden, wenn man den beschreibenden Punct nicht in der Peripherie des Wälzungskreises, sondern inner- oder aufserhalb derselben annimmt.

Uebrigens bilden alle in den letzten Paragraphen behandelten Cycloiden blofs einzelne Glieder aus der Familie der Rolllinien, von welchen wir das Wichtigste in den diesem Capitel beigefügten Anmerkungen (S. 239) anführen werden.

Die *logarithmische Linie.*

§. 76.

Fig. 46. Eine krumme Linie RMS (Fig. 46) von der Beschaffenheit, daſs für jeden Punct derselben die Abscisse der Logarithme der zugehörigen rechtwinkeligen Ordinate ist, wird logarithmische (auch logistische) Linie genannt; ihre Gleichung ist also, wenn a die Basis des Systems bezeichnet:

$$x = log. y \quad \text{oder} \quad a^x = y \; . \; . \; . \; (1.$$

Aus dieser letztern Gleichung folgt unmittelbar: erstens, daſs die Curve nur aus einem einzigen, oberhalb der Abscissenaxe AX liegenden Ast oder Zweig besteht, der ins Unendliche fortläuft; zweitens, daſs im Anfangspuncte A die Ordinate $AB = 1$ ist; drittens, daſs für $x = AP = AB = 1$ die entsprechende Ordinate $PM = a$, gleich der Basis des Logarithmensystems ist; viertens, daſs für $a > 1$ die Curve nach der Seite der positiven Abscissen, d. i. gegen AX hin, sich immer mehr und mehr von der Abscissenaxe entfernt, dagegen sich derselben gegen AX' hin fortwährend nähert, ohne diese jedoch jemals zu erreichen, folglich die Abscissenaxe XX' zugleich eine Asymptote der Curve ist *); endlich fünftens, daſs für $a < 1$ sich umgekehrt die Curve der Abscissenaxe in der Richtung der positiven x ohne Ende nähert, und auf der entgegengesetzten Seite von ihr entfernt.

Die übrigen Ausdrücke für diese Curve, als Tangente, Normale, Krümmungshalbmesser, Evolute, u. s. w., die nun leicht aus ihrer Gleichung nach den an den betreffenden Orten entwickelten Formeln gefunden werden können, überlassen wir wieder dem eigenen Fleiſse des Studirenden, und machen hier nur noch auf die besondere und merkwürdige Eigenschaft der logarithmischen Linie aufmerksam, daſs in dieser Curve die Subtangente eine beständ-

*) Zur Uebung kann man sich von dieser Eigenschaft der Abscissenaxe auch nach der im §. 47. erörterten Methode überzeugen.

dige Gröfse ist. Denn es folgt aus der obigen Gleichung (1, wenn man differentiirt:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\, l\, a;$$

also ist [§. 44., (2] die Subtangente $= \frac{a^x}{a^x\, l\, a} = \frac{1}{l\, a}$ in der That für jeden Punct der Curve unveränderlich und (Bd. I., §. 130.) gleich dem Modul des durch diese Curve vorgestellten Systems. Für $a = e = 2{\cdot}718\ldots$ wird die Subtangente sofort $= 1$.

Anmerk. Mit Hilfe einer Logarithmen-Tafel ist die Construction dieser Curve mittelst Puncte für irgend eine gegebene Basis a sehr einfach und für sich klar. Ohne eine solche Tafel, oder wenn man die Puncte überhaupt durch geometrische Constructionen finden will, nehme man die Linie α (Fig. 46) zur Einheit, jene $\beta = a$ zur Basis des Logarithmensystems, und trage auf der Abscissenaxe XX' vom Puncte A aus, als Ursprung, gegen X und X' hin $AP = PP' = \ldots$ und $Ap = pp' = \ldots = \alpha$ auf, errichte in diesen Puncten die Ordinaten von unbestimmter Länge, und schneide die in A und P errichteten, den Abscissen $x = 0$ und $x = 1$ entsprechenden Ordinaten $AB = \alpha = 1$ und $PM = \beta = a$ ab; so sind sofort zwei Puncte B und M der Curve bestimmt. Sucht man weiters zu AB und PM die dritte Proportionallinie (Bd. II, §. 3., 3.) $P'M'$, so, dafs man hat Fig. 46.

$$AB : PM = PM : P'M';$$

so ist $P'M'$ die dem Puncte P' entsprechende Ordinate und M' ein weiterer Punct der Curve. Sucht man ferner wieder zu PM und $P'M'$ die dritte Proportionallinie, so hat man die folgende Ordinate $P''M''$, u. s. w. Um die den negativen Abscissen Ap, Ap' u. s. w. entsprechenden Ordinaten pm, $p'm'$, ... zu finden, bestimme man eben so pm aus der Proportion $PM : AB = AB : pm$; $p'm'$ aus jener $AB : pm = pm : p'm'$, u. s. f.

Um endlich zwischen zwei schon bestimmten Puncten, wie M und M', noch einen dritten Punct D einzuschalten, halbire man PP' in E, und schneide die in E errichtete Ordinate ED gleich der mittlern geometrischen Proportionallinie zwischen PM und $P'M'$ ab, bestimme nämlich ED aus der Proportion $PM : ED = ED : P'M'$. (Bd. II., §. 3., 4.)

Von den *Spirallinien.*

§. 77.

Unter den Spiralen oder Schneckenlinien versteht man alle jene Linien, welche um einen festen Punct in unendlich vielen und sich immer mehr erweiternden Windungen herumlaufen; dabei können sie von diesem festen Punct oder Pol wirklich auslaufen, oder sich demselben durch unendlich viele, immer enger werdende, Windungen unendlich nähern. Solche Spiralen können nicht blofs in einer Ebene (welche wir sofort hier zu betrachten haben), sondern auch auf einer Kegelfläche, wo der Scheitel den Pol bildet, und mit einiger Einschränkung der Definition selbst auf einer Cylinder- und Kugelfläche und den Sphäroiden beschrieben werden.

Wir wollen in Kürze nur von den wichtigsten ebenen Spirallinien handeln.

a) Die *Archimedische Spirale.*

§. 78.

Eine der einfachsten Spiralen entsteht, wenn, während Fig. 47. der Halbmesser AB eines Kreises BOO' (Fig. 47) um den Mittelpunct A in der Richtung BOO' herumgeführt wird, ein Punct auf diesem Halbmesser sich vom Mittelpunct A aus gegen den Umfang so bewegt, dafs die von dem beschreibenden Punct zurückgelegten Wege genau den vom Halbmesser beschriebenen Winkeln proportional sind; also dieser Punct in der Kreisperipherie anlangt, nachdem der Halbmesser einen Umlauf vollendet hat. Diese Spirale wird nach ihrem Erfinder (*Conon*, ein Zeitgenosse des *Archimedes*) die Conoidische, gewöhnlicher aber, weil *Archimedes* (geb. zu Syracusa ums J. 287 v. Chr.; er verlor bei der Einnahme von Syracus 212 v. Chr. das Leben) ihre vorzüglichsten Eigenschaften entdeckte, die Archimedische Spirallinie genannt.

Um eine Gleichung für diese Polarcurve zu finden, wird

man am einfachsten den festen Punct A oder Mittelpunct des Kreises, dessen Halbmesser wir für die Einheit nehmen wollen, zum Pol, und die erste Lage AB des Halbmessers zur Axe nehmen; setzt man daher, wenn der Halbmesser nach AN und darauf der beschreibende Punct nach M gekommen ist, W. $BAN = \varphi$ und $AM = u$; so wird zufolge der Definition

$$AM : AB = \text{Bog. } BON : \text{Peripher. } BOO'B$$

$$\text{oder} \quad u : 1 = \varphi : 2\pi,$$

$$\text{und daraus} \quad u = \frac{\varphi}{2\pi} \ldots (a.$$

Aus dieser Polargleichung der Curve lassen sich alle Eigenschaften der letztern mit Leichtigkeit erkennen: da φ ohne Ende wachsen kann, so nimmt auch der Radiusvector ohne Ende zu, also windet sich diese Curve ohne Ende um den Pol, und entfernt sich dabei von diesem immer mehr; was auch mit ihrer Erzeugungsart übereinstimmt, da der Halbmesser seinen Umlauf ohne Ende wiederholen, und darauf der beschreibende Punct dem vorgeschriebenen Gesetze gemäſs seine Bewegung beständig fortsetzen soll.

Für $\varphi = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ wird $u = 1, 2, 3, \ldots$, d. i. $u = AB = AQ =$ etc., oder, wenn man allgemein statt φ: $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$ etc. setzt, also eigentlich die Durchschnittspuncte M, M', M'', ... der Spirale mit irgend einem Leitstrahl AM' betrachtet; so erhält man aus der vorigen Gleichung mit Beziehung auf die Figur:

$$AM = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad AM' = \frac{\varphi + 2\pi}{2\pi} = 1 + \frac{\varphi}{2\pi},$$

$$AM'' = \frac{\varphi + 4\pi}{2\pi} = 2 + \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \text{u. s. w.},$$

so, daſs also

$$MM' = AM' - AM = 1 = AB,$$

$$M'M'' = AM'' - AM' = 1 = AB, \quad \text{u. s. w. folgt:}$$

das zwischen zwei aufeinander folgenden Windungen der Spirale liegende Stück des Radiusvector, ist daher immer dem Halbmesser des angenommenen Kreises gleich.

Wird die obige Gleichung (α differentiirt, so erhält man $\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi}$; folglich ist nach §. 68.

die Subtangente $u^2 \frac{d\varphi}{du} = \frac{\varphi^2}{4\pi^2} \cdot 2\pi = \frac{\varphi^2}{2\pi} = u\varphi$,

nämlich gleich der Länge des aus A mit dem Halbmesser $u = AM$ zwischen den Schenkeln des Winkels $BAM = \varphi$ beschriebenen Bogens; die Subnormale $\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi}$ ist in dieser Curve unveränderlich. Eben so findet man auch ganz einfach die übrigen Linien; ferner das Element des Bogens, der Fläche u. s. w, was dem fleifsigen Anfänger überlassen bleibt.

Nimmt man in der Gleichung (α die Winkel φ negativ, so erhält man noch einen zweiten, in der Zeichnung durch die punctirte Linie angedeuteten, Zweig dieser Curve *).

Anmerk. Die obige Eigenschaft, dafs der Leitstrahl von den auf einander folgenden Windungen immer in gleichen Abständen geschnitten wird, bietet ein sehr einfaches Mittel dar, diese Spirale nach Belieben fortsetzen zu können, sobald nur die erste Windung derselben gezeichnet ist. Um diese aber mittelst Puncte zu construiren, darf man nur den Umfang
Fig. 47. $BOO'B$ und Halbmesser AB des gegebenen oder beliebig angenommenen Kreises in die nämliche Anzahl gleicher Theile theilen, an die von B aus gezählten Theilungspuncte 1, 2, 3, . . . m des Kreises die Halbmesser $A1$, $A2$, $A3$, . . . Am ziehen, und diese, wenn die von A gegen B gezählten Theilungspuncte des Halbmessers mit $1'$, $2'$, $3'$, . . . m' bezeichnet werden, aus A mit den Zirkelöffnungen $A1'$, $A2'$, $A3'$, ...

*) Dadurch erhält man nämlich $u = \frac{-\varphi}{2\pi}$ oder $-u = \frac{\varphi}{2\pi}$. Nun werden aber die negativen Leitstrahlen nicht vom Pol gegen den Umfang des Kreises, sondern eben so wie die negativen Secanten, vom Umfang gegen den Mittelpunct gezählt; folglich wird man, um zugleich beide Zweige zu construiren, für jeden Winkel $BAN = \varphi$ das Stück $\frac{\varphi}{2\pi}$ sowohl von A bis M für den positiven oder ersten, als auch von N gegen A hin bis n für den negativen oder zweiten Zweig auftragen.

Am' durchschneiden, um die Puncte der ersten Windung der Spirale zu erhalten.

b) Die *hyperbolische Spirale.*

§. 79.

Die im vorigen Paragraphe behandelte Spirale ist nur ein besonderer Fall der in der Gleichung $u = a\varphi^n$ begriffenen Spirallinien. Für positive Werthe von n läuft die entsprechende Spirale, da für $\varphi = 0$ auch $u = 0$ wird, von dem Puncte oder Pole A, als ihrem Ursprung, aus; dagegen nähert sich, für negative Werthe von n, die Spirale diesem Puncte ohne Ende, und kann denselben (da erst für $\varphi = \infty$, $u = 0$ wird) niemals erreichen.

Es sey nun $n = -1$, so erhält man für die betreffende Spirale die Gleichung

$$u = \frac{a}{\varphi} \quad \text{oder} \quad u\varphi = a \ldots (\beta.$$

Von dieser Spirale, welche wegen der Aehnlichkeit ihrer Gleichung mit jener $xy = e^2$ der Hyperbel (Bd. II., §. 124.) die hyperbolische Spirale genannt wird, gilt also nicht bloſs die eben in Betreff des Punctes A gemachte Bemerkung, wodurch er gleichsam zu einem Asymptotenpunct wird; sondern auch noch der Umstand, daſs eine mit der Axe BAB' (Fig. 48) in den Abstand $AC = a$ parallele Gerade DD' ebenfalls eine Asymptote ist. Fig. 48.

Denn setzt man nach und nach $\varphi = 0, \ldots \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots 10, 100$ etc., so wird beziehungsweise $u = \infty, \ldots 3a, 2a, a, \frac{a}{2}, \ldots \frac{a}{10}, \frac{a}{100}$ etc.; folglich nähert sich die Spirale in immer enger werdenden unzähligen Windungen fortwährend dem Pole A.

Zieht man ferner zu irgend einem Punct M der Curve den Leitstrahl AM und das Perpendikel mMP auf die Axe BB', so ist $MP = u \sin.\varphi = \frac{a \sin.\varphi}{\varphi}$ [wenn man nämlich für u den Werth aus (β setzt], $mP = CA = a$; mithin $Mm = a - \frac{a \sin.\varphi}{\varphi} = a\left(1 - \frac{\sin.\varphi}{\varphi}\right)$.

Da nun bei der unendlichen Abnahme von φ, der Quotient $\frac{sin.\,\varphi}{\varphi}$ (§. 32., Beisp. 3.) sich der Einheit unendlich nähert; so nimmt dabei die eben gefundene Gröfse Mm unendlich ab und convergirt gegen Null, so, dafs also in der That die Gerade CD zu diesem Curvenast eine Asymptote ist.

Nimmt man φ negativ, so erhält man wieder einen zweiten, in der Zeichnung durch die punctirte Linie angedeuteten Zweig dieser Curve, welcher CD', d. i. die Verlängerung von DC zur Asymptote hat.

Da aus der Gleichung dieser Curve (β, wenn man differentiirt, $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2}$ folgt; so hat man, um wenigstens noch auf eine bemerkenswerthe Eigenschaft aufmerksam zu machen, für die Subtangente der hyperbol. Spirale: $-u^2\frac{d\varphi}{du} = -\frac{a^2}{\varphi^2} \times \frac{-\varphi^2}{a} = a$; diese ist also eine beständige Gröfse.

Anmerk. Beschreibt man aus A, als Mittelpunct, mit einem beliebigen Halbmesser AN den unbestimmten Kreisbogen NN', und schneidet darauf Bog. $NM = a$ ab; so ist $MN = AM\varphi$, also $AM = \frac{MN}{\varphi} = \frac{a}{\varphi} = u$, folglich M ein Punct der Spirale. Diefs gibt ein Mittel an die Hand, diese Curve mittelst Puncte zu construiren.

c) Die *parabolische Spirale.*

§. 80.

Die Gleichung der Archimedischen Spirale ist, wenn man $\frac{1}{2\pi} = A$ setzt [§. 78., (α]: $u = A\varphi$, also von der Form der Gleichung einer durch den Ursprung gehenden Geraden; der Unterschied liegt nur darin, dafs hier die Abscissenlinie keine Gerade, sondern ein Kreisbogen ist, auf welchem die Ordinaten u ebenfalls perpendikulär sind. Diese Betrachtung hat zu der Idee geführt, mehrere Gleichungen, denen Parallelcoordinaten zum Grunde liegen, auf eine

kreisförmige Abscissenlinie zu übertragen, und dadurch neue Spirallinien zu bilden.

Nimmt man nun die Gleichung der Parabel $y^2 = px$, zählt die Abscissen x auf dem Umfange eines Kreises und die Ordinaten in der Richtung der Radien, die also ebenfalls mit dieser krummlinigen Abscissenaxe rechte Winkel bilden; oder was dasselbe ist, legt man die Axe einer gewöhnlichen Parabel $y^2 = px$ um die Peripherie eines Kreises; so bildet die Parabel die parabolische Spirale.

Um aber wieder eine Polargleichung für diese Curve zu entwickeln, sey der Halbmesser des genannten Kreises $CA = r$ (Fig. 49), der Winkel, welchen der Leitstrahl CM Fig. 49. irgend eines Punctes M der Curve mit der unveränderlichen Geraden oder Axe AC bildet, $ACP = \varphi$, und der Leitstrahl $CM = u$; so ist

$$AP = x = r\varphi, \quad CM = r + y \quad \text{und} \quad CM' = r - y,$$

$$\text{also} \quad u = r \pm y,$$

und wenn man für y den Werth $\pm \sqrt{(px)} = \pm \sqrt{(pr\varphi)}$ setzt, auch

$$u = r \pm \sqrt{(pr\varphi)} \quad \ldots \; (\gamma;$$

welches sofort die gesuchte Polargleichung der parabolischen Spirale ist.

Diese Gleichung gibt zu erkennen, daſs die Spirale aus zwei Aesten besteht, deren äuſserer sich in unzähligen, immer weiter werdenden Windungen um den Pol C herumwindet, und daſs der innere Ast sich anfangs dem Pole nähert, durch diesen, wenn $u = 0$, also $\varphi = \frac{r}{p}$ geworden ist, durchgeht, und sich von da aus von demselben immer mehr entfernt, dann endlich den Kreis im Puncte B, für welchen $u = r$, also $\varphi = \frac{4r}{p}$ ist, durchschneidet, und aus demselben heraustritt.

Anmerk. Um die parabolische Spirale, mit welcher sich vorzüglich *Jacob Bernoulli (Act. Erud.* 1691) beschäftiget hat, zu construiren, trage man auf den Umfang des Kreises C (Fig. 49) von A aus die gleichen Theile $A1$, 12, 23, ..., die man so klein nimmt, daſs Sehne und Bogen verwechselt werden dür-

fen, in beliebiger Anzahl auf. Eben so trage man dieselben Theile auf der Axe AX der gegebenen oder beliebig angenommenen Parabel (Fig. 49′) von A nach 1, 2, 3, ..., errichte hier die senkrechten Ordinaten $1a$, $2b$, $3c$, ... und in der vorigen Figur die Halbmesser $C1$, $C2$, $C3$, ..., welche zugleich unbestimmt verlängert werden; endlich schneide man $1a = 1a'$, $2b = 2b'$, $3c = 3c'$ u. s. w. gleich den correspondirenden Ordinaten $1a$, $2b$, $3c$. . . . der Parabel (Fig. 49′) ab; so sind diese Puncte a, b, c, ..., a', b', c', ... beziehungsweise Puncte des äufsern und innern Astes der Spirale.

Fig. 49′

d) Die *logarithmische Spirale.*

§. 81.

Die Polarcurve, deren Gleichung $u = a^\varphi$, also der Gleichung der logarithmischen Linie $y = a^x$ (§. 76.) analog ist, heifst logarithmische Spirale *).

Da für $\varphi = 0, 1, 2, \ldots$: $u = 1, a, a^2, \ldots$, und für $\varphi = -1, -2, -3, \ldots$: $u = \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$, u. s. w. wird; so folgt, dafs sich (in der Voraussetzung von $a > 1$) diese Spirale (Fig. 50) in der Richtung der positiven Winkel φ vom Pole A durch unzählige Windungen ohne Ende entfernt, hingegen in der Richtung der negativen Winkel φ diesem Puncte A durch unzählige, immer enger werdende, Windungen unendlich nähert, ohne diesen jemals zu erreichen, da erst für $\varphi = -\infty$, $u = 0$ wird.

Fig. 50.

Aus der obigen Gleichung dieser Curve folgt ferner $\frac{du}{d\varphi} = a^\varphi la$, folglich ist (§. 68.)

die Subtangente $u^2 \frac{d\varphi}{du} = a^{2\varphi} \cdot \frac{1}{a^\varphi la} = \frac{a^\varphi}{la} = \frac{u}{la}$;

*) Da diese Curve zugleich die stereographische Projection der loxodromischen Linie der Seefahrer (m. s. die am Ende des folgenden Capitels beigefügte Anmerk.) auf die Ebene des Aequators, die Erde als Kugel angesehen, ist; so wird sie auch bisweilen *Loxodromica plana* genannt. Dabei ist der loxodromische Winkel zugleich jener, unter welchem die Radii oder Leitstrahlen die Spirale schneiden.

die Subnormale $\frac{du}{d\varphi} = ula$, u. s. w.;

für das natürliche System oder für $a = e$ wird also, wegen $la = 1$, die Subtangente gleich der Subnormale, gleich dem Leitstrahl u.

Eine der merkwürdigsten und charakteristischsten Eigenschaften der logarithmischen Spirale ist die, daſs in jedem Puncte M die Tangente MT mit dem Leitstrahl MA einen unveränderlichen oder beständigen Winkel bildet, daſs also die Spirale alle Radii oder Leitstrahlen unter gleichen Winkel schneidet. Denn es ist

$$tang.\, TMA = \frac{AT}{AM} = \frac{\text{Subtang.}}{u} = \frac{u}{ula} = \frac{1}{la},$$

nämlich gleich dem Modul des Systems, so, daſs für $a = e$ die Tangente $= \frac{1}{le} = 1$, demnach dieser beständige Winkel $= 45^{\circ}$ ist *). Auch wollen wir noch den Umstand anführen, daſs durch die Abwicklung dieser Curve eine ihr gleiche Spirale um denselben Mittelpunct oder Pol beschrieben wird **).

Anmerk. Da für die positiven Werthe von $\varphi = 0, 1, 2, 3, \ldots$ die Leitstrahlen u die geometrische Progression $1, a, a^2, a^3, \ldots$, und für die negativen Werthe von $\varphi = 0, -1, -2, -3, \ldots$ jene $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \ldots$ bilden; so läſst sich die logarithmische Spirale durch Puncte auf folgende Art construiren: Aus dem Pole A beschreibe man als Mittel-

*) Sollte also z. B. die reibende Fläche des Läufers oder Bodensteins einer Kornmühle so behauen werden, daſs die eingehauenen Streifen oder Hauschläge sämmtliche Radien unter dem Winkel von 60° schneiden; so müſsten diese eine logarithmische Spirale bilden, für welche die Basis a aus der Gleichung $\frac{1}{la} = tang.\, 60^{\circ}$, d. i. $la = \frac{1}{\sqrt{3}}$ zu bestimmen wäre.

**) *Jacob Bernoulli*, welcher sich mit einer gewissen Vorliebe mit dieser Spirale beschäftigte, bemerkte nicht nur, daſs die Evolute und Caustica dieser Spirale wieder eine solche Spirale sey, sondern, daſs sie sich noch auf vielerlei Arten selbst erzeugt, und nennt sie deſshalb *Spira mirabilis*.

Fig. 50. punct mit dem Halbmesser $Ao = 1$ (Fig. 50) einen Kreis, und trage auf dessen Umfang von o aus sowohl in positiver als negativer Richtung oD und oD' die beliebigen aber gleichen Theile 01, 12, 23, ... und 01′, 1′2′, 2′3′, ... auf, ziehe an diese Puncte die Radien, welche zugleich unbestimmt verlängert werden, und schneide die erstern, den positiven Bögen entsprechenden, von A aus so ab, dafs man hat

$$Ao : Am : Am' : Am'' : \ldots = 1 : a : a^2 : a^3 : \ldots,$$

und die letztern ebenfalls in n, n', ... dergestalt, dafs

$$Ao : An : An' : \ldots = 1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} : \ldots$$

wird; so liegen die auf diese Weise bestimmten Puncte .. m'', m', m, o, n, n', ... auf der gesuchten Spirale.

Die Construction selbst kann auf demselben, bei der logarithmischen Linie (§. 76., Anmerk.) angegebenen, Weg bewerkstelliget werden. Ist nämlich die Linie α die Einheit der Radienvectoren, $\beta = a$ die Basis des Systems, und bereits $Ao = \alpha$, $Am = \beta$ abgeschnitten; so findet man den folgenden Leitstrahl Am' aus der Proportion $Ao : Am = Am : Am'$; die hierauf folgende Am'' aus jener $Am : Am' = Am' : Am''$ u. s. w., so, dafs man immer nur dritte Proportionallinien zu suchen hat. Eben so findet man die den Puncten 1′, 2′, ... entsprechenden Vectoren aus den Proportionen

$Am : Ao = Ao : An$, $Ao : An = An : An'$, u. s. w.

Auch kann man endlich wieder zwischen zwei schon bestimmten Puncten der Curve, wie m', m'', einen Punct μ einschalten, wenn man den Bogen 23 in b halbirt, und den entsprechenden Leitstrahl $A\mu$ aus der Proportion bestimmt

$$Am' : A\mu = A\mu : Am'',$$

d. i. zu Am' und Am'' eine mittlere geometrische Proportionallinie sucht.

Anmerkungen.

Wir fügen diesem Capitel in den gegenwärtigen Anmerkungen noch in Kürze die Entwicklung und Beschreibung mehrerer anderer Curven bei, welche entweder noch in der Anwendung wichtig, oder durch ihre allgemeine Behandlungsweise lehrreich, oder endlich wenigstens geschichtlich interessant sind.

I. *Rolllinien.*

Wälzt sich eine Curve DmC (Fig. 51), mit welcher der beschreibende Punct M fest verbunden ist, auf irgend einer andern festen Curve AmB; so beschreibt der Punct M eine **Rolllinie**, deren Natur und Beschaffenheit von jener der beiden erstern Curven abhängt. Verbindet man den beschreibenden Punct M mit dem Berührungspunct m beider Curven, und beschreibt aus m als Mittelpunct mit dem Halbmesser mM einen Kreisbogen rMs; so bilden die auf einander folgenden Durchschnittspuncte aller auf diese Weise beschriebenen Kreisbogen (deren Mittelpuncte also die auf einander folgenden Berührungspuncte m sind) ebenfalls diese Rolllinie. Fig. 51.

Um die allgemeine Gleichung dieser Linien zu entwickeln, seyen $Ap = x'$, $pm = y'$ die rechtwinkeligen Coordinaten irgend eines Punctes m der festen oder Grundcurve, und der Radius $mM = z$; so ist die Gleichung des Kreisbogens rMs:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = z^2,$$

wo x, y die allgemeinen oder laufenden Coordinaten des Kreisbogens sind. Um die Gleichung des unmittelbar darauf folgenden Kreisbogens (wenn die Wälzung um unendlich wenig fortgesetzt wird) zu erhalten, wird man diese Gleichung in Bezug auf x', y', z differentiiren; dadurch erhält man mit Berücksichtigung, dafs y' und z Functionen von der unabhängigen Variablen x' sind:

$$(x - x') + (y - y')\frac{dy'}{dx'} = -z\frac{dz}{dx'}.$$

Diese beiden Gleichungen mit einander verbunden (um den entsprechenden, auf der gesuchten Rolllinie liegenden, Durchschnittspunct der beiden Kreise zu erhalten), geben:

$$x = x' - z\left\{\frac{\frac{dz}{dx'} + \frac{dy'}{dx'}\sqrt{\left(1 + \left[\frac{dy'}{dx'}\right]^2 - \left[\frac{dz}{dx'}\right]^2\right)}}{1 + \left[\frac{dy'}{dx'}\right]^2}\right\}$$

$$= x' - z\left\{\frac{dx'dz + dy'\sqrt{(dx'^2 + dy'^2 - dz^2)}}{dx'^2 + dy'^2}\right\},$$

$$y = y' - z\left\{\frac{\frac{dz}{dx'}\cdot\frac{dy'}{dx'} - \sqrt{\left(1 + \left[\frac{dy'}{dx'}\right]^2 - \left[\frac{dz}{dx'}\right]^2\right)}}{1 + \left[\frac{dy'}{dx'}\right]^2}\right\}$$

$$= y' - z\left\{\frac{dy'dz - dx'\sqrt{(dx'^2 + dy'^2 - dz^2)}}{dx'^2 + dy'^2}\right\}.$$

Läſst sich endlich aus diesen beiden Gleichungen, nachdem man in diese $y' = f(x')$ und $z = \varphi(x')$, welches gegebene Functionen von x' sind, substituirt hat, die Gröſse x', welche den Berührungspunct m partikularisirt, eliminiren; so erhält man dadurch die gesuchte Gleichung in x, y für die erzeugte Rolllinie.

Beispiel. Es sey z. B. die feste Curve eine gerade Linie, welche man zugleich zur Abscissenaxe nimmt; so ist ihre Gleichung $y' = 0$. Ferner sey die bewegliche Curve ein Kreis vom Halbmesser a und der Abstand des beschreibenden Punctes M vom Mittelpunct desselben $CM = b$; so ist, wenn in der anfänglichen Lage des Wälzungskreises die Gerade CM durch den Ursprung A geht und der Kreis um den Bogen $a\varphi$ fortrollt, für den Berührungspunct m, $x' = a\varphi$, und, wie leicht zu sehen (wenn man sich die Figur entwirft), $z^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos.\varphi$; also, wegen $\varphi = \frac{x'}{a}$, wenn man differentiirt:

$$\frac{dz}{dx'} = \frac{b \sin. \frac{x'}{a}}{z},$$

$$1 - \left[\frac{dz}{dx'}\right]^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos.\frac{x'}{a} - b^2 \sin.^2 \frac{x'}{a}}{z^2}$$

$$= \left(\frac{a - b\cos.\frac{x'}{a}}{z}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{dy'}{dx'} = 0;$$

mithin nach den vorigen allgemeinen Gleichungen:

$$x = x' - b \sin.\frac{x'}{a} \quad \text{und} \quad y = a - b\cos.\frac{x'}{a};$$

welches sofort die Gleichungen der gemeinen, gestreckten oder verkürzten Cycloide sind, je nachdem (§. 73., Anmerk.) $b = a$, $b < a$ oder $b > a$ ist.

Um aber aus diesen beiden Gleichungen x' zu eliminiren, hat man aus der letztern:

$$\cos.\frac{x'}{a} = \frac{a-y}{b}, \quad \text{also auch} \quad x' = a \operatorname{arc.cos.}\left(\frac{a-y}{b}\right);$$

daher aus der erstern, wenn man zugleich $\sin.$ durch $\cos.$ ausdrückt:

$$x = a \operatorname{arc.cos.}\left(\frac{a-y}{b}\right) - \sqrt{(b^2 - a^2 + 2ay - y^2)}$$

als Gleichung dieser drei genannten Curven, für welche die Gerade, auf der sich der Kreis vom Halbmesser a wälzt, die gemeinschaftliche Abscissenaxe ist. Setzt man $b = a$, so erhält

man daraus als Gleichung der gemeinen Cycloide:

$$x = a\, arc.cos.\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{(2ay-y^2)}\ ^{*}).\ [\text{Vergl. §. 71., Gl. (2]}$$

II. Die *Neoide* oder *Spinnlinie*.

Beschreibt man aus C (Fig. 52) mit dem Halbmesser r einen Kreis $ApBA$, verlängert den Durchmesser AB um ein bestimmtes Stück $BD = a$, theilt sowohl den Halbkreis ApB, wie auch die Gerade BD in den Puncten 1, 2, 3, ... in n gleiche Theile (wo n beliebig ist), zieht die Radien $C1$, $C2$, $C3$, ... Cp, ... und macht ihre Verlängerungen $1m$, $2m'$, $3m''$, ... pM, ... beziehungsweise gleich $B1$, $B2$, $B3$, ... Bn, ...; so sind A, m, m', m'', ... M Puncte der Neoide. Fig. 52.

Nimmt man AD zur Abscissenaxe und C zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, setzt für irgend einen Punct M der Curve $CP = x$, $PM = y$ und den W. $ACM = \varphi$; so ist zufolge der Construction:

$$\text{Bog.}\, ApB : \text{Bog.}\, Ap = BD : pM,$$

$$\text{d. i.}\quad r\pi : r\varphi = a : pM = \frac{a\varphi}{\pi}.$$

Da nun $CM = Cp + pM$ ist, so hat man als Polargleichung der Neoide:

$$1)\quad CM = r + \frac{a\varphi}{\pi}.$$

Ferner folgt, wenn man die Abscissen x von C gegen A positiv und gegen D negativ nimmt:

$$x = \left(r + \frac{a\varphi}{\pi}\right) cos\ \varphi \quad \text{und} \quad y = \left(r + \frac{a\varphi}{\pi}\right) sin.\, \varphi.$$

Durch Discussion der Gleichung 1) findet man leicht, wenn man noch zur gröſsern Einfachheit $a = 2r$ und φ sowohl positiv als negativ nimmt, daſs auf der unbegrenzten Geraden AD unzählig viele Knoten, wie D, entstehen; der erste findet in A Statt, wo zugleich auch eine eiförmige Schleife gebildet wird.

Der herzförmige Theil $AMDRA$ dieser Curve wird unter Andern bei Spinnmaschinen zur gleichförmigen Erhebung und Senkung der Spulen, um dadurch ein cylinderförmiges Aufwickeln

*) Zur Uebung kann man eben so die Gleichungen der Epicycloide aufsuchen, und dazu etwa den Halbmesser des Grundkreises durch R, jenen des wälzenden Kreises durch r, und endlich den Abstand des beschreibenden Punctes vom Mittelpunct dieses letztern Kreises durch ρ bezeichnen.

des Fadens zu erzielen, benützt; daher die Benennung dieser Curve.

III. Die *Cissoide* (des *Diokles*).

Fig. 53. Beschreibt man über der Geraden AB (Fig. 53) als Durchmesser einen Kreis, construirt zu diesem im Puncte B die Tangente TT', zieht aus A beliebig die Secanten AN, AN', AN''... und schneidet darauf beziehungsweise $Am = Na$, $Am' = N'a'$, $Am'' = N''a''$ u. s. w. ab; so erhält man, wenn diese Puncte m, m', m'', ... durch eine stetige Curve verbunden werden, einen Zweig AS der vom griechischen Geometer *Diokles* zum Behufe der Auflösung des bei den Alten so wichtigen Problems: zwischen zwei gegebene Geraden zwei mittlere geometrische Proportionallinien einzuschalten, erfundenen Cissoide (oder Epheu ähnlichen Linie) *).

Werden die Secanten AN unterhalb AB gezogen, so erhält man auf die nämliche Art den zweiten Zweig AS' dieser Curve, welcher in Bezug auf AB mit dem erstern symmetrisch ist, so, daſs also AB die Axe bildet.

Um eine Gleichung der Cissoide zu entwickeln, nehme man AB zur Abscissenaxe und A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, setze also für irgend einen Punct M der Curve, $AP = x$ und $PM = y$; zieht man ferner durch M die Secante AMQ und setzt den Durchmesser $AB = a$, so hat man nach einem bekannten Satze: $QR \times QA = QB^2$, oder auch, wegen $QR = AM$ (zufolge der Construction der Curve)

$$AM \times QA = QB^2.$$

Es folgt aber aus den ähnlichen Dreiecken APM und ABQ:

$$x : y = a : BQ = \frac{ay}{x};$$

ferner $AM^2 = x^2 + y^2$ und $AQ^2 = a^2 + \frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}(x^2 + y^2)$;

diese Werthe in die obige Gleichung substituirt, geben

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} \times \frac{a}{x} \sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{a^2 y^2}{x^2};$$

*) *Newton* hat in seiner *Arithmetica Universalis* (*de aequationum constructione lineari*) ein sehr sinnreiches Verfahren angegeben, die Cissoide (mit Hilfe eines rechtwinkeligen ungleichschenkeligen Winkelhakens) durch eine stetige Bewegung zu beschreiben.

also ist die gesuchte **Gleichung der Cissoide:**

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x} \text{ oder } y = \pm x \sqrt{\left(\frac{x}{a - x}\right)}.$$

Diese Gleichung zeigt ebenfalls die beiden gegen die Axe AB symmetrischen Curvenäste AS, AS' an; auch gibt sie (da für $x = a$, $y = \infty$ wird) zu erkennen, dafs die Gerade TT' eine Asymptote dieser Curve ist *), und dafs (weil y für $x > a$ imaginär wird) kein Punct jenseits dieser Asymptote liegen kann. Für $x = \frac{a}{2}$ wird $y = \pm \frac{a}{2}$; folglich geht die Cissoide durch die Endpuncte D, D' des auf AB perpendikulären Durchmessers.

Nach §. 61. findet man ferner, dafs die beiden Aeste AS, AS' im Puncte A eine **Spitze erster Art** bilden, in welchem zugleich AB die gemeinschaftliche Tangente ist.

Die Subtangente der Cissoide ist [§. 44., (2)] $\frac{2x(a - x)}{3a - 2x}$, welcher Ausdruck (als vierte Proportionale) sofort leicht für jeden Punct der Curve, an welchen man eine Tangente ziehen will, construirt werden kann **).

*) Diese Eigenschaft der Geraden TT', die übrigens schon aus der Construction der Cissoide selbst erhellet, kann man, zur Uebung, auch nach der im §. 47, erörterten Methode finden; ferner wird man sich (nach §. 61.) überzeugen, dafs in A ein **Rückkehrpunct der ersten Art** Statt findet, in welchem die Axe AB zugleich Tangente ist.

**) Um mit Hilfe dieser Curve zwischen zwei gegebenen Linien a, b zwei mittlere geometrische oder stetige Proportionallinien zu finden, verfahre man auf folgende Weise: Fig. 53.

Mit einer, z. B. der gröfsern gegebenen Linie $a = AC$, construire man als Halbmesser einen Kreis und dazu die Cissoide AS, AS'; trage auf den, auf AB perpendikulär stehenden Halbmesser CD die kleinere oder zweite Linie $b = C\alpha$ auf und ziehe die Gerade $B\alpha M$; so wird auf der Curve der Punct M bestimmt. Ferner ziehe man die Secante AMQ, so schneidet sich auf CD der Punct β ab. Sucht man endlich noch zu $C\alpha$ und $C\beta$ die mittlere geometrische Proportionallinie Cs, so sind $C\alpha$, Cs, $C\beta$, CD die vier stetigen Proportionallinien, von denen die beiden äufsern $C\alpha = b$ und $CD = a$ die gegebenen, also Cs und $C\beta$ die gesuchten Linien sind; man hat nämlich, behaupten wir (vergl. Bd. II., §. 157.), $C\alpha : Cs : C\beta : CD$, oder auch die beiden Proportionen $C\alpha : Cs = Cs : C\beta$ und $Cs : C\beta = C\beta : CD$; von denen die erstere schon unmittelbar aus der Construction des Punctes s folgt. Um aber die Richtigkeit der letzteren nachzuweisen, hat man aus den ähnlichen Dreiecken $BC\alpha$ und BPM, dann APM und $AC\beta$:

IV. Die *Conchoide* oder *Muschellinie* (des *Nicomedes*).

Fig. 54. Es sey die Gerade $X'X$ (Fig. 54) und aufserhalb derselben der Punct C gegeben; aus C ziehe man die Gerade CB rechtwinkelig gegen $X'X$ und schneide darauf $AB' = AB$ willkürlich oder gleich einer gegebenen Linie ab; zieht man ferner ganz beliebig durch C die Gerade CM und schneidet vom entstehenden Durchschnittspunct Q aus, $QM = QM' = AB$ ab; so sind M und M' Puncte der vom griechischen Geometer *Nicomedes* erdachten Conchoide, um das schon vorhin erwähnte, damals berühmte Problem: zwischen zwei gegebene Linien zwei stetige Proportionallinien zu finden, aufzulösen. Indem man nun immer andere Geraden CM zieht (oder diese um C sich drehen läfst, so lange man noch auf AX und AX' Durchschnittspuncte Q erhält) und darauf die Puncte M, M' auf die angegebene Art abschneidet, kann man beliebig viele Puncte dieser Curve finden und sie dann durch einen Zug mit einander verbinden. (Auch läfst sich diese Curve mit Hilfe zweier Lineale, durch die stetige Bewegung eines Stifts beschreiben.) Von den beiden entstehenden Zweigen RBS und $R'B'S'$ heifst der erstere die obere, und der letztere die untere Conchoide (die Alten betrachteten blofs die obere). Aus der Natur der Erzeugung dieser Curve folgt unmittelbar, dafs jeder der beiden Zweige durch die Gerade BB' in zwei symmetrische Theile getheilt wird, und dafs die Gerade $X'X$ eine Asymptote der Curve ist.

Um eine Gleichung dieser Curve zu finden, sey $X'X$ die Abscissen- und BB' die Ordinatenaxe, also A der Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, und daher für irgend einen Punct

$$a - x : y = \frac{a}{2} : C\alpha = \frac{ay}{2(a-x)}$$

$$\text{und} \quad x : y = \frac{a}{2} : C\beta = \frac{ay}{2x};$$

folglich ist (nach der erstern der beiden obigen Proportionen)

$$Cs^2 = C\alpha . C\beta = \frac{a^2 y^2}{4x(a-x)} = \frac{a^2 x^2}{4(a-x)^2},$$

(wenn man nämlich für y^2 seinen Werth aus der oben gefundenen Gleichung der Cissoide setzt), also $Cs = \frac{ax}{2(a-x)}$.

Es ist demnach

$$Cs . CD = \frac{a^2 x}{4(a-x)} \text{ und } C\beta^2 = \frac{a^2 y^2}{4x^2} = \frac{a^2 x^2}{4(a-x)},$$

folglich $Cs . CD = C\beta^2$; also in der That $Cs : C\beta = C\beta : CD$.

M der obern Conchoide: $AP = x$ und $PM = y$. Zieht man CM und setzt $AB = AB' = a$ und $AC = b$; so erhält man aus den ähnlichen Dreiecken AQC und QMP:

$$AC : PM = AQ : QP \text{ oder } AC + PM : PM = AQ + QP : QP,$$

$$\text{d. i. } b + y : y = x : QP = \frac{xy}{b+y};$$

es ist demnach zufolge der Relation $QM^2 = PM^2 + QP^2$, und wegen $QM = a$:

$$a^2 = y^2 + \frac{x^2 y^2}{(b+y)^2} \ldots (1$$

die **Gleichung** der obern Conchoide; oder wenn man entwickelt und ordnet, auch

$$y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0 \ldots (2;$$

folglich gehört diese Curve zu den Linien vierter Ordnung.

Setzt man für einen Punct M' der untern Conchoide $AP' = x'$, $P'M' = y'$; so hat man genau eben so

$$AC : P'M' = AQ : P'Q, \text{ oder } AC - P'M' : P'M' = AQ - P'Q : P'Q,$$

$$\text{d. i. } b - y' : y' = x' : P'Q = \frac{x'y'}{b-y'},$$

also aus $QM'^2 = P'M'^2 + QP'^2$, und da ferner noch $QM' = a$ (der Construction der Curve zufolge) ist:

$$a^2 = y'^2 + \frac{x'^2 y'^2}{(b-y')^2};$$

diese Gleichung mit der vorigen (1 verglichen, zeigt, dafs man in der erstern nur y negativ zu nehmen braucht, um die Puncte der untern Conchoide zu erhalten.

Die Gleichung (2 gilt also allgemein, sowohl für die obere als untere Conchoide; dabei gehören die positiven Werthe von y der erstern, und die negativen Werthe der letztern an. Da aber das letzte Glied dieser Gleichung des vierten Grades wesentlich negativ ist, so besitzt diese in Bezug auf y für jeden Werth von x (Bd. I., §. 24., Satz 2.) entweder zwei oder vier reelle Wurzeln, von denen im ersten Falle eine positiv, die andere negativ, im zweiten Falle aber, da in dieser Gleichung, es mag das Glied in y^2 positiv oder negativ ausfallen, ein Zeichenwechsel und drei Folgen vorhanden sind, die eine positiv und die drei übrigen negativ sind (§. 32., Zusatz 2.). Der erste durch die Figur 54, a) dargestellte Fall tritt ein, wenn $b > a$ ist; dabei entsprechen jedem Werthe von $x = AP$ zwei (ungleiche) entgegengesetzte Werthe von $y = PM$ und Pm. Der zweite Fall hingegen findet für gewisse Werthe von x Statt, wenn Fig. 54, a)

Fig. 54, b) $b < a$ ist; denn construirt man unter dieser Voraussetzung die Figur 54, b), bei welcher nämlich der Pol C zwischen B und B' zu liegen kommt; so ist leicht zu sehen, dafs hier die um C sich drehende Gerade CM solche Lagen erhalten kann, für welche, wenn nach der Vorschrift $QM' = QM = a$ abgeschnitten wird, der Punct M' unterhalb C fällt, oder CM und CM' entgegengesetzt sind; und dafs also, wie eine weitere Betrachtung zeigt, beide Zweige der untern Conchoide, indem sie durch den Punct C gehen, welcher sofort (§. 63.) ein doppelter ist, die Ovale $CGB'G'C$ bilden, und so bei C einen Knoten schürzen. Ist daher Gp die letzte Ordinate oder die mit BB' parallele Tangente der Ovale, so entsprechen offenbar jedem Werthe von $x < Ap$, z. B. jenem $x = AP$, vier Werthe von y oder vier Ordinaten: PM, Pm, Pm', Pm'', von denen in Uebereinstimmung mit dem Vorigen, eine positiv, die drei andern aber negativ sind; für $x = Ap$ fallen zwei Werthe von y in einen zusammen, oder die obige Gleichung (2 hat dann zwei gleiche Wurzeln; für $x > Ap$ gibt es nun wieder zwei reelle Wurzeln, davon eine positiv, die andere negativ ist.

Da in der Gleichung (2 der Conchoide x nur in der zweiten Potenz vorkömmt, so erhält man auch zu gleichen positiven und negativen Abscissen, gleiche Ordinaten; folglich zeigt sich auch hieraus wieder, dafs die Curve durch die Ordinatenaxe in zwei symmetrische Zweige getheilt wird [noch ersichtlicher wird dieses, wenn man die Coordinatenaxen, also auch in (1, x und y mit einander vertauscht, wodurch man für die Gleichung der Curve erhält: $y = \pm \frac{(b+x)}{x} \sqrt{(a^2 - x^2)}$].

Da sich ferner bei der unendlichen Zunahme von x die Gleichung (2 ohne Ende jener $x^2 y^2 = a^2 b^2$ oder $xy = ab$ nähert, welches sofort die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel von den Halbaxen $\sqrt{(2ab)}$ auf ihre Asymptoten bezogen ist [Bd. II., §. 124., Gl. (3]; so nähern sich die Zweige der Conchoide bei ihrem Fortschreiten immer mehr der Gestalt der gleichseitigen Hyperbel, und es ist zugleich wieder, in Uebereinstimmung mit dem oben Bemerkten, da auch in der That für $x = \infty$ aus (2, $y = 0$ wird, die Abscissenaxe $X'X$ eine Asymptote der obern und untern Conchoide.

Ueberhaupt biethet die Gleichung dieser Curve noch zu mancher interessanten Discussion und zur Anwendung der in den früheren Paragraphen aufgestellten Sätzen Gelegenheit dar; so findet man z. B. (§. 57.) in B und B' gröfste Werthe von y; in der obern und untern Conchoide, in jedem Zweig (§. 59.) einen Wen-

dungspunct; für $b < a$ [Fig. 54, b)] in C (§. 63.) einen doppelten Punct; für $b = a$, in welchem Falle sich die Ovale in einen Punct C zusammenzieht (§. 61.), in C eine Spitze erster Art, welcher Punct C zugleich (§. 63.) ein dreifacher ist; endlich für $b > a$ [Fig. 54, a)], in welchem Falle die Ovale mit dem Knoten wegfällt (§. 65.) den conjugirten Punct C *).

V. Die *Lemniscata*.

Von der in mehreren Lehrbüchern noch aufgenommenen algebraischen Curve, deren Gleichnng

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

vom vierten Grade ist, und ihrer schleifenförmigen Form ∞ wegen Lemniscata genannt wird (im Griechischen heifst eine Band-Schleife: *Lemniscus*), wollen wir nur so viel bemerken, dafs sich mit dieser besonders der Conte *Fagnano* (geb. zu Sinigaglia 1690; gest. gegen d. J. 1760) beschäftigt und gefunden hat, dafs (was, wie er zuerst bemerkte, gleichfalls auch für die Ellipse und Hyperbel gilt), obschon diese Curve nicht rectificabel ist, sich doch darauf Bögen angeben lassen, die zu einander ein rationales Verhältnifs besitzen. Er fand anfangs, dafs sich in dieser Curve unzählig viele Paare von Bogen angeben lassen, die entweder einander gleich sind, oder von denen der eine doppelt so grofs als der andere ist.

Die obige Gleichung bezieht sich auf jene Gerade, welche die Curve der Länge nach mitten durchschneidet und in zwei (ober- und unterhalb dieser Geraden liegende) symmetrische Theile theilet, als Abscissenaxe, und den Mittelpunct als Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten. Es entsprechen also jeder Abscisse x zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten y, und man erhält für gleiche entgegengesetzte x auch gleiche y; für $y = 0$ wird $x = 0$ oder $x = a$, so, dafs $2a$ der gröfste Durchmesser dieser Curve ist.

*) Wie sich mit Hilfe der Conchoide das mehrerwähnte Problem, zwischen zwei gegebene Linien zwei mittlere geometrische Proportionallinien zu finden, auflösen läfst, kann man unter Andern in *Schaffer's* »Vollständigen Lehrbegriff der höhern Analysis etc.« (Oldenburg 1824) nachsehen.

Newton gebrauchte die Conchoide zur geometrischen Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades (*Arithm. univ.*).

Vignola benützte diese Curve zur Verjüngung der Säulenschäfte.

Endlich hat man diese Curve auch in der Visirkunst angewendet, und angenommen, dafs die Krümmung der Fafsdauben nahe mit der obern Conchoide zusammenfalle (z. B. *Müller*, ein Ingenieur und Visirer zu Gröningen).

Jacob Bernoulli gerieth zuerst auf die Lemniscata, als er eine algebraische Curve suchte, mittelst welcher er die *Isochrona paracentrica* (d. i. jene Curve, auf welcher ein fallender Körper sich einem gegebenen Punct in gleichen Zeiten um gleich viel nähert, oder von demselben entfernt) beschreiben könnte.

VI. Die *Quadratrix*.

Die Quadratrix endlich, deren manchmal noch Erwähnung geschieht, ist eine von *Dinostratus* (eines Zeitgenossen des *Plato*) erfundene transcendente Curve, für welche man, wenn a eine constante Gröfse (den Kreisdurchmesser, über welchen diese Curve beschrieben wird), φ den Drehungswinkel (von der durch den Mittelpunct, als Pol, gehenden Axe) und u den Radiusvector bezeichnet, die Polargleichung $u = \frac{a\varphi}{\pi \sin.\varphi}$ findet.

Die Benennung dieser Curve gründet sich darauf, dafs ihre Ordinaten die Quadratur des (der Construction zum Grunde liegenden) Kreises geben würde, wenn man diese Curve genau construiren könnte.

Eben so würde diese Curve auch das Problem der Rectification des Kreises und der Theilung eines Winkels nach jedem Verhältnisse auflösen, wenn ihre Beschreibung diese Theilung, also das Gesuchte, nicht schon voraussetzte.

Neuntes Capitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der krummen Flächen und Curven von *doppelter* Krümmung.

§. 82.

Die allgemeine Gleichung irgend einer krummen Fläche auf ein rechtwinkeliges Axensystem bezogen ist (Bd. II., §. 176.)

$$z = f(x, y) \ . \ . \ . \ (1$$

wo die beiden Coordinaten x, y willkürlich und von einander unabhängig sind.

Wir wollen nun untersuchen, auf welche Weise man überhaupt von irgend einem Punct M der Fläche (Fig. 55) Fig. 55. zu einem andern M' über- oder fortgehen könne. Dazu ziehen wir für diesen Punct M die rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$, $AQ = Pm = y$, $mM = z$ und lassen zuerst, während y ungeändert bleiben soll, x in $x + h$ übergehen oder um h zunehmen; durch dieses Verfahren geht man aber offenbar von dem Puncte M zu einem andern N dieser Fläche über, welcher in dem, durch M mit der coordinirten Ebene der xz parellel geführten Schnitt $GMNHQ$ liegt und für welchen $mn = PP' = h$ ist; dabei geht die Ordinate $mM = z$ in jene $nN = z'$ über, für welche man hat (§. 8., I.):

$$2) \quad z' = z + \left(\frac{dz}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2} + \ . \ . \ .$$

Läſst man hingegen von den Coordinaten des Punctes M, während x ungeändert bleibt, y in $y + k$ übergehen; so heiſst dieses auf unsere Fläche bezogen, von dem Puncte M zu einem andern Punct N' dieser Fläche fortgehen, welcher mit dem erstern in einem der coordinirten Ebene der yz parallelen Schnitt $EMN'FP$ liegt, und für welchen

$mn' = QQ' = k$ ist; dabei ist die Ordinate $mM = z$ in jene $n'N' = z''$ übergegangen, welche sofort durch die Reihe gegeben ist:

$$3)\quad z'' = z + \left(\frac{dz}{dy}\right)k + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{k^2}{2} + \ldots$$

Nimmt man endlich beide Aenderungen zu gleicher Zeit vor und läſst x in $x + h$, y in $y + k$ übergehen; so geht man dadurch auf der Fläche vom Puncte M zu jenem M' über, welcher im Durchschnitt der beiden durch N und N', respective mit jenen yz und xz parallel geführten Ebenen liegt. Dieses Resultat kann man aber auf eine doppelte Art herbeiführen: indem man in der Entwicklung 2) y in $y + k$, oder in jener 3) x in $x + h$ übergehen läſst; im ersten Falle geht man von der Ordinate $nN = z'$ zu jener $m'M' = {}'z$, im Schnitte $E'M'F'P'$, im letztern Falle aber von jener $n'N' = z''$ zu dieser Ordinate $m'M' = {}'z$ im Schnitte $G'M'H'Q'$ über. Daſs sich aber diese beiden genannten Schnitte im Puncte M' der Fläche schneiden, oder daſs man in beiden Fällen zu derselben Ordinate $m'M' = {}'z$ gelangt, ist eine Folge der Continuität der krummen Fläche; und da die beiden durch das angedeutete Verfahren für $'z$ entstehenden Entwicklungen sofort identisch werden, woraus nebst andern (§. 20.) die Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right)$$

entspringt; so kann man diese Bedingungsgleichung als den Ausdruck für das Gesetz der Continuität der krummen Fläche ansehen.

Für die Ordinate $'z$ selbst folgt auf die erste oder zweite Art, wenn man Kürze halber (nach *Euler*)

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p,\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = q,\ \left(\frac{dp}{dx}\right) = r,\ \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right) = s,$$

$$\left(\frac{dq}{dy}\right) = t \text{ u. s. w. setzt:}$$

$$4)\quad {}'z = z + (ph + qk) + \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \ldots$$

Aus diesem Ausdrucke folgt für das Totaldifferential von z:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

dabei ist [wie die Ausdrücke 2) und 3) zeigen] das partielle Differential $p\,dx$, das Differential der Ordinate z im mit der Ebene der xz durch M parallelen Schnitt, und das partielle Differential $q\,dy$, das Differential dieser Ordinate z im mit der coordinirten Ebene der yz parallel geführten Schnitt (vergl. §. 16.).

Anmerk. Es kann noch bemerkt werden, dafs der Quotient $\frac{k}{h} = \frac{nm'}{nm}$, welcher die trigon. Tangente des Winkels $m'mn$ bezeichnet, zugleich die Richtung der auf der coordinirten Ebene der xy normalen Ebene $Mmm'M'$ ausdrückt, nach welcher diese Ebene den Curvenschnitt MM' hervorbringt.

§. 83.

Soll das Differential der Ordinate z des Punctes M für einen beliebigen Curvenschnitt MM', welcher durch eine durch M perpendikulär auf die coordinirte Ebene der xy geführte Ebene $Mmm'M'$ entsteht, gefunden werden; so mufs man dabei die Gleichung dieser Ebene, welche (Bd. II. §. 163., 2.) mit jener ihrer Projection, d. i. des Durchschnittes mm' identisch, und sofort

$$y = ax + b \;\ldots\; (1$$

ist, berücksichtigen. Diese Gleichung zeigt, dafs hier die Abscissen x und y des Punctes M keineswegs mehr von einander unabhängig sind, sondern nach dem hierin ausgesprochenen Gesetze von einander abhängen. Da auf diese Weise z nur auf eine Art verändert werden kann, so mufs man das Totaldifferential nehmen, und dieses ist (§. 82.): $dz = p\,dx + q\,dy$, oder wegen $dy = a\,dx$ [aus (1] auch

$$dz = (p + aq)\,dx \;\ldots\; (2.$$

Durch die in (1 ausgesprochene gegenseitige Abhängigkeit der beiden Gröfsen x und y wird sonach die Richtung bestimmt, in welcher man auf der krummen Fläche von irgend einem Punct M zu einem folgenden M' fortgeht. Entsteht der Curvenschnitt MM' durch keine auf die Ebene der xy perpendikuläre Ebene, so ist die Projection desselben auf diese Ebene der xy selbst eine Curve, mm'

eine Tangente an dieselbe im Puncte m, und zugleich die Projection der Tangente des Curvenschnitts MM' in M; ihre Richtung ist dann durch den Quotienten $\frac{dy}{dx}$, welcher aus der Gleichung der Projection des Curvenschnittes MM' zu entwickeln ist, gegeben. Offenbar ist auch im ersten Falle die Richtung der auf xy perpendikulären Ebene durch $\frac{dy}{dx} = a$ [welcher Werth aus der Gl. (1 folgt] bestimmt.

Die Linie des *stärksten Falles.*

§. 84.

Die an den Curvenschnitt MM' im Puncte M errichtete Tangente bildet mit der Projection mm' dieser Curve auf die coord. Ebene der xy einen Winkel φ, für welchen sofort

$$tang.\, \varphi = \frac{d.Mm}{d.mm'} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

oder wegen $dz = (p + aq)\,dx$ [vorig. Paragr., (2] und $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1 + a^2)}$ [nach (1] auch

$$tang.\, \varphi = \frac{p + aq}{\sqrt{(1 + a^2)}} \; . \; . \; . \; (\alpha$$

ist. Da nun dieser Winkel φ zugleich die Neigung der Curve MM' im Puncte M gegen die coordinirte Ebene der xy, also auch die Gröſse des Falles der krummen Fläche nach dieser Richtung MM' gegen die Ebene xy ausdrückt; so kann man offenbar fragen, welche von den unzähligen Lagen, die rings um den Punct M möglich sind, diese auf der Ebene der xy perpendikulär stehende Ebene $Mmm'M'$, d. i. welchen Werth der Winkel $m'mn$, dessen trigonom. Tangente wir [vor. Paragr., Gl. (1] durch a bezeichnet, haben müsse, damit der genannte Winkel φ ein Maximum werde. Um aber diese Frage zu beantworten, darf man nur in der vorigen Gleichung (α jenen Werth von a aufsuchen, für welchen $tang.\, \varphi$ ein Gröſstes wird. Man hat also nach der bekannten Regel:

$$\frac{d \cdot tang. \varphi}{d a} = \frac{q(1+a^2) - (p+aq)a}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

und daraus:

$$a = \frac{q}{p} \ldots (\beta$$

für welchen Werth, wie man sich leicht überzeugt, der zweite Differentialquotient wesentlich negativ ausfällt.

Man hat also, wenn man für a seinen (aus $dy = a\,dx$ folgenden) Werth $\frac{dy}{dx}$ setzt, zur Bestimmung der Richtung der Linie des stärksten Falles MM' die Gleichung

$$p\,dy - q\,dx = 0$$

mit welcher noch die folgende, aus der Gleichung der krummen Fläche resultirenden:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

zu verbinden ist. Diese Linie, welche im Allgemeinen eine Curve seyn wird, ist bei manchen Constructionen von Wichtigkeit.

Beispiele.

1. Ist die gegebene Fläche eine Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ldots (m$$

ist; so wird $p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{A}{C}$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{B}{C}$; folglich nach ($\beta$ $a = \frac{B}{A}$.

Da aber (Bd. II., §. 164.) $-\frac{A}{B}$ die trigonom. Tangente des Neigungswinkels der Knotenlinie der gegebenen Ebene (m in der coord. Ebene der xy mit der Axe der x ist; so folgt (Bd. II., §. 14., Aufg. 6.), dafs die Projection mm' der Linie des stärksten Falles dieses Beispiels, in der Ebene der xy auf dieser Knotenlinie perpendikulär steht.

2. Für die Kugelfläche, deren Gleichung den Mittelpunct zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten genommen (Bd. II., §. 181.) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist, erhält man eben so $a = \frac{y}{x}$; die durch den betreffenden Punct M

und die Ordinatenaxe z geführte Ebene, schneidet also auf der Kugel für den Punct M die Linie des schnellsten Falles, welche sonach der durch M gehende gröſste Kreisbogen ist, ab. Liegt der betreffende Punct M im Scheitel, d. i. im Durchschnitt der Sphäre und der Axe der z; so wird, wegen $x = 0$ und $y = 0$, nun $a = \frac{0}{0}$, zum Beweis, daſs jede der unzähligen, durch die Axe der z gehenden Ebenen (die also sämmtlich auf der Ebene der xy perpendikulär stehen) welche um den Punct M herum möglich sind, die Richtung des stärksten Falles gibt, oder daſs die sämmtlich entstehenden gröſsten Kreisbogen, für den Punct M einerlei und zugleich den stärksten Fall besitzen.

Berührungen der krummen Flächen.

§. 85.

Es seyen sofort

$$z = f(x, y) \ldots (1 \quad \text{und} \quad z' = \varphi(x', y') \ldots (2$$

die auf dasselbe Axensystem bezogenen Gleichungen zweier Flächen, welche einen Punct x, y, z mit einander gemein haben sollen. Geht man von diesem Puncte in der ersten Fläche zu einem andern über, und setzt statt x und y, $x + h$ und $y + k$; so geht die betreffende Ordinate z über in [§. 82., 4)]:

$$'z = z + ph + qk + \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \ldots (3$$

und wenn man in der zweiten Fläche zu einem andern Punct fortgeht, also $x' = x$ um h und $y' = y$ um k zunehmen läſst; so geht $z' = z$ über in

$$z_1 = z' + p'h + q'k + \tfrac{1}{2}(r'h^2 + 2s'hk + t'k^2) + \ldots (4;$$

der Abstand der beiden neuen Puncte in der Richtung der Axe der z, oder der Unterschied der neuen Ordinaten (3 und (4 ist sonach, wegen $z' = z$:

$$(p - p')h + (q - q')k + \tfrac{1}{2}(r - r')h^2 + (s - s')hk$$
$$+ \tfrac{1}{2}(t - t')k^2 + \ldots (5$$

nämlich durch eine Reihe ausgedrückt, welche um so convergenter ist, je kleiner h und k genommen werden, und

deren absoluter Werth in dem Maſse abnimmt, als von vorne herein Glieder wegfallen oder verschwinden.

Ist nun $p - p' = 0$ und $q - q' = 0$, d. i.

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

wodurch die beiden ersten Glieder der vorigen Differenz (5 wegfallen; so sagt man (analog mit §. 49.), es finde zwischen den beiden Flächen (1 und (2 im Puncte x, y, z eine Berührung der ersten Ordnung Statt; und es läſst sich genau durch dasselbe Raisonnement, welches wir im §. 49. bei der Berührung der Curven angewendet haben, zeigen, daſs im Berührungspuncte zwischen diesen beiden Flächen keine dritte durchgehen kann, wenn sie nicht auch zugleich den beiden vorigen Bedingungsgleichungen $p'' = p$ und $q'' = q$ Genüge leistet.

Finden auſser den vorigen Bedingungsgleichungen auch noch die folgenden Statt:

$$r' = r, \quad s' = s \text{ und } t' = t,$$

wodurch in dem obigen Unterschiede (5 auch noch die drei folgenden Glieder, d. i. die der zweiten Ordnung wegfallen; so sagt man, daſs die beiden Flächen (1 und (2 im Puncte x, y, z eine Berührung der zweiten Ordnung besitzen u. s. w.

§. 86.

Dieſs vorausgeschickt, wollen wir wieder annehmen, daſs die Fläche (1 vollkommen, dagegen die Fläche (2 nur der Gattung nach bestimmt sey und ihre Gleichung sofort eine gewisse Anzahl noch unbestimmter Constanten (wie z. B. die Gleichung der Ebene deren drei besitzt) enthalte. Diese unbestimmten Gröſsen kann man nun so zu bestimmen suchen, daſs in der obigen Reihe (5 mehrere ihrer ersten Glieder (als 2, 5, 9, . . .) verschwinden, und sonach die Fläche (2, je nach der Anzahl der in ihrer Gleichung vorhandenen unbestimmten Constanten, mit der gegebenen Fläche (1 eine Berührung irgend einer Ordnung eingehet.

Die erste Bedingung, welche erfüllt werden mufs, ist, dafs die Fläche (2 durch den bestimmten Punct x, y, z gehe; dazu wird erfordert, dafs, wenn man in der Gleichung (2 $x' = x$ und $y' = y$ setzt, auch $z' = z$ werde.

Sollen sich beide Flächen in diesem Puncte x, y, z in der ersten Ordnung berühren; so müssen die Bedingungsgleichungen Statt finden:

(nämlich nebst den vorigen $x' = x, y' = y, z' = z$)

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) \ldots (a.$$

Soll eine Berührung der zweiten Ordnung Statt haben, so müssen aufserdem noch die folgenden bestehen:

$$\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2z'}{dx'\,dy'}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)$$

$$\text{und } \left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \ldots (b.$$

Und nach diesem Gesetze weiter.

§. 87.

Berührungsebene.

Wenden wir das Vorhergehende gleich auf die Ebene an und nehmen also für die Gleichung (2 (§. 85.) die der Ebene [Bd. II., §. 162., Gl. (4]:

$$z' = Ax' + By' + D \ldots (m,$$

so ist der ersten Bedingung zufolge, nach welcher die Ebene durch den Punct x, y, z gehen soll, auch

$$z = Ax + By + D \ldots (n.$$

Da ferner aus (m

$$\left(\frac{dz'}{dx}\right) = A \text{ und } \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = B$$

folgt, so hat man den Bedingungsgleichungen (a gemäfs, damit diese Ebene mit der krummen Fläche (1 im Puncte x, y, z eine Berührung der ersten Ordnung eingehe:

$$A = \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und } B = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

wobei diese partiellen Differentialquotienten aus der gegebe-

nen Gleichung $z = f(x, y)$ der Fläche (1 zu nehmen sind.

Die Gleichung (*n* von jener (*m* abgezogen gibt

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y)$$

und wenn man für A und B die gefundenen Werthe setzt, so erhält man für die Ebene, welche die Fläche $z = f(x, y)$ im Puncte x, y, z in der ersten Ordnung berührt, d. i. für die Tangentialebene, die Gleichung:

$$z' - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(x' - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(y' - y)$$

oder $z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$. . . I.;

dabei sind x', y', z' die allgemeinen oder laufenden Coordinaten (*coordonnées courantes*) und x, y, z jene des Berührungspunctes; die Differentialquotienten p und q endlich sind, wie wir schon vorhin bemerkt haben, aus der gegebenen Gleichung der krummen Fläche zu entwickeln*).

*) Wir können auch die Gleichung der Tangentialebene für den Berührungspunct M entwickeln, indem wir diese (Bd. II., §. 208.) als jene Ebene ansehen, welche die Tangenten der sämmtlichen Curvenschnitte enthält, die entstehen, wenn man durch M beliebig viele Ebenen perpendikulär auf die coordinirte Ebene der xy legt. Nun ist für irgend einen solchen durch M (x, y, z) geführten Schnitt [§. 83., Gl. (2] $dz = (p + aq)\,dx$, wobei a für jeden Schnitt einen andern Werth hat. Da ferner (im näml. Paragr.) $dy = a\,dx$ ist, so folgt, wenn man diesen Werth in die Differentialgleichung der Ebene (*n*, welche eben im Puncte x, y, z der krummen Fläche Berührungsebene werden soll, d. i. in $dz = A\,dx + B\,dy$ substituirt: $dz = (A + aB)\,dx$. Da nun der vorigen Bemerkung zufolge, dieser Werth von dz $\left(\text{oder von } \frac{dz}{dx}\right)$ dem vorigen, für jeden Werth von a identisch gleich seyn soll; so muſs $A = p$ und $B = q$ seyn, welche Werthe in die Gleichungen [(*m* und (*n*]

$$z' = Ax' + By' + D \text{ und } z = Ax + By + D$$

substituirt, durch ihre Verbindung sofort

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

für die gesuchte Gleichung, wie oben, geben.

Geht man von der Ansicht aus, daſs die Tangentialebene an irgend einen Punct einer krummen Fläche diejenige Ebene sey, welche durch alle rings um diesen Punct unendlich nahe liegenden Puncte geht; so kann man, da die Ebene schon durch drei dieser Puncte bestimmt wird, dazu am

Setzt man in dieser Gleichung I. eine der Coordinaten x', y', z' Null; so erhält man (Bd. II., §, 164.) die Gleichung der Knotenlinie in der coordinirten Ebene der beiden andern, also z. B. für $z' = 0$ die Gleichung der Knotenlinie der Berührungsebene I. in der Ebene der xy, und zwar

$$z + p(x' - x) + q(y' - y) = 0,$$

$$\text{oder } y' - y = -\frac{p}{q}(x' - x) - \frac{z}{q};$$

diese Durchschnittslinie kann zur Construction der tangirenden Ebene eben so dienen, wie der Endpunct der Subtangente bei der Construction der Tangente an eine Curve.

Beispiel.

Es sey die gegebene krumme Fläche eine Fläche der zweiten Ordnung mit einem Mittelpunct; so ist ihre Gleichung (Bd. II. §. 197. und 198.)

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + P = 0 \ldots (1 \quad [z = f(x, y)]$$

und daraus

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{M''}{M}\frac{x}{z}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{M'}{M}\frac{y}{z}.$$

Diese Werthe in I. substituirt, geben sofort für die Gleichung der Berührungsebene im Puncte x, y, z:

$$Mz(z' - z) + M'y(y' - y) + M''x(x' - x) = 0$$

einfachsten die Puncte M (welches der Berührungspunct seyn soll) N und N' (Fig. 55) nehmen, deren Coordinaten sofort, wenn man nämlich in §. 82., 2) und 3) $h = dx$ und $k = dy$ setzt, respective sind:

Fig. 55.

$$x, y, z, \quad x + dx, y, z + p\,dx \quad \text{und} \quad x, y + dy, z + q\,dy$$

Setzt man daher diese neun Coordinaten der Reihe nach statt jenen x', y', z', x'', y'', z'' und x''', y''', z''' in der Gleichung der durch diese drei Puncte gehenden Ebene (§. 169., Aufg. 6., Bd. II.); so erhält man

$$A = p\,dx\,dy, \quad B = q\,dx\,dy \quad \text{und} \quad C = -dx\,dy,$$

folglich für die Gleichung dieser Ebene (wenn man noch dort, wie es nun erforderlich ist, x, y, z mit x', y', z' und umgekehrt verwechselt):

$$p\,dx\,dy(x' - x) + q\,dx\,dy(y' - y) - dx\,dy(z' - z) = 0,$$

oder wieder wie vorhin:

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y).$$

oder auch mit Berücksichtigung der Gleichung (1 der Fläche:

$$Mzz' + M'yy' + M''xx' + P = 0 \ldots (2.$$

[Vergl. Bd. II., §. 208., Gl. a) u. b).]

So ist für das Ellipsoid [§. 201., Gl. l)]

$$M = \frac{P}{c^2},\ M' = \frac{P}{b^2} \text{ und } M'' = \frac{P}{a^2},$$

mithin die Gleichung der Berührungsebene für das Ellipsoid im Puncte x, y, z:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1.$$

Da ferner für die Kugel $c = b = a$ ist, so ist die Gleichung ihrer Berührungsebene:

$$xx' + yy' + zz' = a^2,$$

wo a den Kugelhalbmesser bezeichnet [vergl. §. 182., Gl. p)].

Wäre ein außerhalb der Fläche (1 liegender Punct x_1, y_1, z_1 gegeben, durch welchen die Berührungsebene gehen soll; so müßte man in der Gleichung (2 die allgemeinen Coordinaten x', y', z' mit diesen x_1, y_1, z_1 vertauschen und die entstehende Gleichung $Mzz_1 + M'yy_1 + M''xx_1 + P = 0$ zum Behufe der Bestimmung des Berührungspunctes x, y, z, mit der Gleichung (1 der Fläche verbinden.

Die Normale.

§. 88.

Das im Berührungspunct einer krummen Fläche auf die Tangentialebene errichtete Perpendikel heißt Normale und jede durch diese gelegte Ebene Normalebene der Fläche.

Die Gleichungen der durch den Berührungspunct x, y, z gehenden Normale sind (Bd. II., §. 168.) von der Form

$$x' - x = a(z' - z),\ y' - y = b(z' - z),$$

und da diese Gerade auf der Ebene I. (im vorig. Paragr.) perpendikulär stehen soll; so muß (§. 170., Aufg. 11, 2.) $a = -\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $b = -\left(\frac{dz}{dy}\right)$ seyn; folglich hat man

für die Gleichungen der Normale:

$$\left.\begin{aligned}(x'-x)+\left(\frac{dz}{dx}\right)(z'-z)=0\\(y'-y)+\left(\frac{dz}{dy}\right)(z'-z)=0\end{aligned}\right\}\ (g,$$

wobei wieder x', y', z' die allgemeinen oder veränderlichen Coordinaten sind.

Die Entfernung irgend eines Punctes x'', y'', z'' der Normale vom Berührungspunct x, y, z ist (§. 161.):

$$\sqrt{[(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2]}=$$
$$(z-z'')\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}\ \ldots\ (h,$$

wenn man nämlich die vorigen Gleichungen (g berücksichtiget; slso ist auch die Länge der Normale zwischen dem Berührungspunct und dem Durchschnitt derselben mit der coordinirten Ebene der xy, wofür $z''=0$ wird:

$$z\sqrt{(1+p^2+q^2)}\ \ldots\ (i.$$

Von den *Berührungskugeln*.

§. 89.

Da die Berührung der ersten Ordnung an die Erfüllung von drei, und die Berührung der zweiten Ordnung an die von sechs Bedingungsgleichungen gebunden ist; so lassen sich die vier unbestimmten constanten Gröſsen, welche in der Gleichung der Kugel enthalten sind, weder im ersten Falle vollkommen bestimmen, noch reichen sie im zweiten Falle hin, den sechs Bedingungsgleichungen immer Genüge zu leisten: Es gibt also unzählige Kugeln, welche mit einer gegebenen Fläche eine Berührung der ersten Ordnung eingehen; dagegen gibt es im Allgemeinen genommen keine, welche diese Fläche in der zweiten Ordnung berührt und für diese eben so eine wahre Berührungs- oder Osculationskugel wäre, wie der Krümmungskreis für eine ebene Curve.

Um die erstern zu finden, sey [Bd. II., §. 181., Gl. (1]

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=r^2\ldots(1\quad[z'=\varphi(x',y')]$$

die Gleichung der Kugel; so ist zufolge der ersten Bedingungsgleichungen (§. 86.), wenn wieder x, y, z die Coordinaten des Berührungspunctes sind:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2 \ldots (2.$$

Die beiden folgenden Bedingungsgleichungen (*a* des §. 86. geben ganz einfach:

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x-\alpha}{z-\gamma} \ldots (3,$$

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y-\beta}{z-\gamma} \ldots (4;$$

und man erhält aus diesen drei letzten Gleichungen für die Coordinaten des Mittelpunctes der Kugel, welche die gegebene Fläche (aus der p und q zu entwickeln sind) in der ersten Ordnung berührt, die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= x + \frac{pr}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\\ \beta &= y + \frac{qr}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\\ \gamma &= z - \frac{r}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\end{aligned}\right\} (5;$$

dabei ist jedoch der Halbmesser r noch unbestimmt und ganz willkürlich, wodurch die obige Behauptung: dafs es unzählig viele Kugeln gibt, welche die Fläche in der ersten Ordnung berühren können, gerechtfertigt ist.

Da zugleich die Relationen (3 und (4 [§. 88., Gl. (*g*] die Gleichungen der durch den Berührungspunct x, y, z gehenden Normale sind, wobei α, β, γ die allgemeinen Coordinaten bezeichnen; so folgt, dafs die sämmtlichen Mittelpuncte dieser die Fläche in der ersten Ordnung berührenden Kugeln, in der im Berührungspunct auf die krumme Fläche errichteten Normale liegen. Von den doppelten Zeichen endlich, welche in den Relationen (5 von der Wurzelgröfse herrühren, gilt genau dasselbe, was wir im §. 52. von jenen des Krümmungshalbmessers bemerkt haben.

Von der *Krümmung* der Flächen.

§. 90.

Da es nicht möglich ist, die Krümmung einer Fläche eben so durch eine Kugel — welche dann eine Krümmungs- oder Osculations-Kugel seyn würde — zu messen, wie die Krümmung einer ebenen Curve in jedem Puncte durch den Osculations- oder Krümmungskreis (§. 52.), indem diese mit der krummen Fläche keine vollständige Berührung der zweiten Ordnung eingeht, also im Allgemeinen nicht alle Krümmungskreise der durch die Normale des Berührungspunctes rings herum geführten Schnitte enthalten kann *); so wendet man zur Bestimmung der Krümmung in jedem Puncte der krummen Fläche zwei verschiedene Krümmungskreise an, zu deren Entwicklung wir sofort übergehen.

Wir wollen gleich im Voraus bemerken, dafs man auf der krummen Fläche von dem bestimmten oder gegebenen Punct x, y, z aus in unzähligen Richtungen zu einem nächst folgenden oder dem ersten unendlich nahe liegenden Punct derselben übergehen kann, ohne dafs sich die in diesen beiden Puncten errichteten Normalen, wie wir bald sehen werden, schneiden, d. h. ohne dafs sie in der nämlichen Ebene liegen. Da aber (§. 54.) der Mittelpunct des Krümmungskreises immer im Durchschnittspunct zweier nächsten Normalen liegt, so müssen wir fürs erste jene Richtung aufsuchen, in welcher man von einem bestimmten Punct der Fläche aus zu einem zweiten, diesem unendlich nahe liegenden, fortgehen mufs, damit sich die Normalen dieser beiden Puncte durchschneiden.

Nun sind die Gleichungen der im Puncte x, y, z der

*) Da nämlich alle durch einen Punct der Kugel geführten normalen Schnitte einerlei, dagegen auf einer andern krummen Fläche (höchstens einige Schnitte ausgenommen) verschiedene Krümmungen besitzen; so kann der Halbmesser der Kugel blofs so gewählt werden, dafs einer ihrer gröfsten Kreise Osculationskreis für einen bestimmten (durch die Normale geführten) Schnitt der krummen Fläche wird. — Blofs im Pole der durch Umdrehung erzeugten Flächen läfst sich die Krümmung durch eine Kugel genau messen.

Fläche errichteten Normale (§. 88.):

$$x' - x + p(z' - z) = 0 \ldots (1,$$

$$y' - y + q(z' - z) = 0 \ldots (2;$$

dabei sind die Gröfsen x, y, z, p, q für die nämliche Normale constant, dagegen von einer Normale zur andern genommen variabel. Da übrigens der Durchschnittspunct zwischen zwei auf einander folgenden Normalen gesucht wird, so sind für diesen die Coordinaten x', y', z' (welches die allgemeinen sind) ebenfalls beständig.

Differentiirt man diese beiden Gleichungen in Bezug auf x, y, z, p, q, und setzt [§. 27., Anmerk., Gl. δ)], da p und q Functionen der beiden von einander unabhängigen Abscissen x und y sind:

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad \text{und} \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

wo r, s, t die in §. 27. angeführte und bekannte Bedeutung haben; so erhält man, da auch noch $dz = p\,dx + q\,dy$ ist:

$$-dx - p^2\,dx - pq\,dy + (z' - z)(r\,dx + s\,dy) = 0 \ldots (3,$$

$$-dy - q^2\,dy - pq\,dx + (z' - z)(s\,dx + t\,dy) = 0 \ldots (4.$$

Da aber diese beiden Gleichungen einer Normale angehören, die der vorigen [(1, (2] unendlich nahe liegt (weil das x, y, z, p, q der ersten Normale in $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $p + dp$, $q + dq$ übergegangen ist); so müssen für den Durchschnittspunct dieser beiden Normalen die letztern vier Gleichungen (1, (2, (3, (4 gleichzeitig bestehen; und da es demnach gleichgiltig ist, ob man zur Bestimmung von $x' - x$ und $y' - y$ den Werth von $z' - z$ aus der Gleichung (3 oder aus jener (4 in die Gleichungen (1 und (2 substituirt; so mufs offenbar $z' - z$ in (3 und (4 einerlei Werth besitzen. Durch diese Bemerkung gewinnen wir die Gleichung:

$$\frac{dx + p^2\,dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{dy + q^2\,dy + pq\,dx}{s\,dx + t\,dy},$$

aus welcher sofort der Quotient $\frac{dy}{dx}$ bestimmt werden kann, durch welchen die Richtung angegeben wird, in der man vom gegebenen oder ursprünglichen Punct der Fläche aus

zu einem folgenden übergehen mufs, damit sich die in diesen beiden Puncten errichteten Normalen schneiden; denn es wird überhaupt die Richtung einer durch den ursprünglichen und einem zweiten, diesem unendlich nahe liegenden Punct, auf die coordinirte Ebene der xy perpendikulär geführten Ebene, als Projection der Tangente im ursprünglichen Punct an den Curvenschnitt auf die Ebene der xy (§. 83.), durch diese trigonometrische Tangente $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt.

Setzt man Kürze halber $\frac{dy}{dx} = m$, also $dy = m\,dx$ in die vorige Gleichung, bringt die Nenner weg und ordnet nach m; so erhält man:

$$[(1+q^2)s - pqt]m^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]m - [(1+p^2)s - pqr] = 0 \ldots (5,$$

eine Gleichung, welche für m nur zwei Werthe gibt, zum Beweis, dafs man im Allgemeinen von jedem Puncte der krummen Fläche nur nach zwei Richtungen fortgehen darf, wenn man haben will, dafs zwei nächste oder auf einander folgende Normalen in einer Ebene liegen oder sich schneiden sollen.

Um diese beiden Richtungen aber zu bestimmen, wollen wir zuerst der vorigen Gleichung (5 eine einfachere Form zu verschaffen suchen. Da die Lage des rechtwinkeligen Coordinatensystems willkürlich ist, so können wir, ohne die Allgemeinheit im Geringsten zu beschränken, die coordinirte Ebene der xy mit der im ersten oder ursprünglichen Punct x, y, z der Fläche gelegten Berührungsebene parallel annehmen; dadurch wird offenbar [was auch aus §. 82., 4) folgt] $p = 0$ und $q = 0$, und die Gleichung (5 geht in folgende über:

$$m^2 + \left(\frac{r-t}{s}\right)m - 1 = 0 \ldots (6.$$

Bezeichnet man nun die beiden Wurzeln dieser Gleichung durch m' und m'', so ist (Bd. I., §. 29.)

$$m'm'' = -1 \quad \text{oder} \quad m'm'' + 1 = 0;$$

und diese letzte Gleichung, in welcher m', m'' die trigonometrischen Tangenten der Winkel bezeichnen, welche die Projectionen der beiden genannten Richtungen oder Schnitte (Hauptschnitte genannt) im ursprünglichen Puncte auf die Ebene der xy mit der Axe der x bilden, zeigt [Bd. II, §. 14., Aufg. 5., Gl (r], dafs diese beiden gesuchten Richtungen auf einander perpendikulär stehen.

Anmerk. Ist $r = t = s = 0$, wie diefs bei der Sphäre in allen Puncten und bei den Rotationsflächen im Pole der Fall ist; so zeigt die in der Gleichung (6 in diesem Falle entstehende Unbestimmtheit, dafs man von dem ursprünglichen Punct der Fläche nach allen möglichen Richtungen derselben zu einem nächstfolgenden fortgehen kann, um eine Normale zu erhalten, welche mit jener des ersten Punctes einen Durchschnitt gibt. (In der That vereinigen sich in diesem Falle alle rings um den ursprünglichen Punct unendlich nahe liegenden Normalen im Mittelpunct der Kugel, welche für die Rotationsfläche im Pole sofort eine vollkommene Berührung zu bilden fähig ist.)

Die beiden Gleichungen $dy = m' dx$, $dy = m'' dx$, in welchen m' und m'' als Functionen der Coordinaten x, y, z für verschiedene Puncte der Fläche auch immer neue Werthe erhalten, sind zugleich die Differentialgleichungen der Projectionen der beiden dem Puncte x, y, z entsprechenden Krümmungslinien der Fläche auf die coord. Ebene der xy.

Eliminirt man endlich aus der Gleichung der gegebenen Fläche und jenen (2, (3, (4, (5 die Gröfsen x, y, z, m; so gelangt man zu einer Gleichung in x', y', z', welches die Gleichung der Fläche ist, die alle Krümmungsmittelpuncte der gegebenen Fläche enthält; sie besteht im Allgemeinen aus zwei Flächenästen, deren einer die sämmtlichen Mittelpuncte der gröfsten, der andere aber jene der kleinsten Krümmungen enthält.

§. 91.

Beispiel.

Um den vorigen Paragraph durch ein Beispiel zu erläutern, nehmen wir den gewöhnlichen geraden Kegel von kreisförmiger Basis. Die Gleichung dieser Kegelfläche ist (Bd. II., §. 189., Beisp. 2.)

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{z'^2}(z - z')^2,$$

und daraus folgt, wenn man differentiirt:

$$(z - z')\left(\frac{dz}{dx}\right) = x \cdot \frac{z'^2}{r^2}, \quad (z - z')\left(\frac{dz}{dy}\right) = y \cdot \frac{z'^2}{r^2};$$

man hat also

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x}{z - z'} \frac{z'^2}{r^2},$$

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y}{z - z'} \frac{z'^2}{r^2},$$

$$r = \left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{z'^2}{r^2} \left\{ \frac{z - z' - x\left(\frac{dz}{dx}\right)}{(z - z')^2} \right\}$$

$$= \frac{z'^2}{r^2} \left\{ \frac{(z - z')^2 - x^2 \frac{z'^2}{r^2}}{(z - z')^3} \right\} = \frac{z'^4}{r^4} \frac{y^2}{(z - z')^3},$$

$$s = \left(\frac{dp}{dy}\right) = - \frac{z'^2}{r^2} \frac{x\left(\frac{dz}{dy}\right)}{(z - z')^2} = - \frac{z'^4}{r^4} \frac{xy}{(z - z')^3},$$

$$t = \left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{z'^2}{r^2} \left\{ \frac{z - z' - y\left(\frac{dz}{dy}\right)}{(z - z')^2} \right\} = \frac{z'^4}{r^4} \frac{x^2}{(z - z')^3}.$$

Aus der Gleichung (6 (des vorigen Paragraphes) hat man für $\frac{dy}{dx}$ oder m die beiden Werthe:

$$m = \frac{t - r \pm \sqrt{[(t - r)^2 + 4s^2]}}{2s};$$

da nun, wenn man die vorhin gefundenen Werthe setzt,

$$t - r = \frac{z'^4}{r^4} \frac{(x^2 - y^2)}{(z - z')^3} \quad \text{und} \quad 4s^2 = \frac{4z'^8}{r^8} \frac{x^2 y^2}{(z - z')^6},$$

daher

$$m = \frac{z'^4}{r^4} \left\{ \frac{x^2 - y^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2)^2}}{- \frac{2z'^4}{r^4} xy} \right\} = \frac{y^2 - x^2 \mp (x^2 + y^2)}{2xy}$$

wird; so hat man für m oder den ersten Differentialquotienten die beiden Werthe:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{y}, \quad \text{und auch} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x};$$

diese beiden Werthe geben beziehungsweise:

$$ydy + xdx = 0 \text{ und } xdy - ydx = 0,$$

oder auch, wie man leicht sieht (und sich durch Differentiation überzeugen kann):

$$x^2 + y^2 = C^2 \text{ und } \frac{x}{y} = C', \text{ d. i. } x = C'y,$$

wo C und C' constante oder von x und y unabhängige Grössen bezeichnen:

die beiden Richtungen also, in welchen man von einem gegebenen Punct der Kegelfläche aus fortgehen muſs, damit zwei nächste Normalen dieser Fläche in einer Ebene liegen oder sich schneiden, sind: die durch diesen Punct gezogene *Seitenlinie* (Kante) des Kegels, und der durch diesen Punct mit der Basis parallel geführte *Kreis*.

Anmerk. Ueberhaupt liegen bei allen durch Rotation erzeugten Flächen von den beiden Systemen der Krümmungslinien (von denen wir sogleich reden werden) die einen in den Meridianen, d. h. in den Schnitten, welche durch Ebenen entstehen, die durch die Rotationsaxe gehen, und die anderen in den Parallelen, d. i. in jenen Schnitten, welche von auf die genannte Axe perpendikulären Ebenen hervorgebracht werden.

§. 92.

Geht man auf der krummen Fläche von irgend einem Punct zu jenem unendlich nahe liegenden Punct über, welcher eine die Normale des ersten Punctes schneidende Normallinie besitzt; von diesem zweiten Punct wieder zu einem dritten benachbarten Punct, dessen Normale die vorige oder zweite schneidet, u. s. w.; so erhält man die Puncte einer auf der Fläche liegenden Curve, welche die erste Krümmungslinie der Fläche bildet. Geht man dagegen von dem ursprünglichen Punct in einer auf die vorige perpendikuläre Richtung, zu einem zweiten Punct im selben Sinne, von diesem zu einem dritten Punct u. s. w. über; so verfolgt man auf diese Weise die Puncte der zweiten Krümmungslinie der Fläche. Man kann

also nach dem, was im §. 90. gezeigt wurde, in jedem Punct einer krummen Fläche zwei solche Krümmungslinien ziehen, deren Richtungen zugleich in diesem Puncte auf einander perpendikulär stehen; und nur nach diesen beiden Richtungen kann man der Fläche in diesem Puncte eine bestimmte Krümmung beilegen, weil jede andere Linie, die man von diesem Puncte aus auf der Fläche ziehen mag, eine Krümmung besitzt, die nicht auch die Krümmung der Fläche ist, indem ihre in der Richtung der Normalen liegenden Krümmungshalbmesser nicht auch zugleich die Normallinien der Fläche sind *).

*) *Euler* war der erste, welcher (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1760) bemerkte, dafs jede Fläche in jedem ihrer Puncte nur zwei Krümmungen besitzt, und die Richtungen dieser beiden Krümmungen auf einander perpendikulär stehen. Auch hat er zuerst gezeigt, dafs wenn man durch einen gegebenen Punct der Fläche nach allen Richtungen Normalebenen legt, von allen auf diese Weise auf der Fläche entstehenden Durchschnittscurven, diejenigen in dem gegebenen Punct ein Maximum oder Minimum der Krümmung besitzen, welche sich in den beiden, die Krümmungsrichtungen der Fläche enthaltenden, Normalebenen befinden; und dafs, wenn die Krümmungen nach diesen beiden Richtungen (d. i. die der beiden Hauptschnitte) bekannt sind, sofort auch die Krümmung jedes andern durch den nämlichen Punct der Fläche geführten Normalschnittes gefunden werden könne.

Denn drückt man die Krümmung einer Curve durch einen Bruch aus, dessen Zähler die Einheit und Nenner der Krümmungshalbmesser (im betreffenden Puncte) dieser Curve ist; so ist die Krümmung irgend eines Normalschnittes gleich der Summe aus den Krümmungen der beiden Hauptschnitte, jede noch in das Quadrat des Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen beziehungsweise diese Schnitte mit dem betreffenden Normalschnitt einschliefsen. (Woraus auch unmittelbar folgt, dafs für jeden Punct der Fläche, die Summe der Krümmungen je zweier durch diesen Punct gehenden auf einander perpendikulären Normalschnitte constant, nämlich gleich der Summe der Krümmungen beider durch den nämlichen Punct gehenden Hauptschnitte ist.)

Meunier, welcher leider den mathematischen Wissenschaften so früh entrissen wurde (er starb noch als Zögling der polytechnischen Schule in Paris), bemerkte endlich, um die Theorie der Krümmung der Flächen zu vollenden, die schöne Beziehung, welche zwischen dem Krümmungshalbmesser eines schiefen, und jenem des durch die nämliche Tangente des betreffenden Punctes der Fläche gehenden Normalschnittes Statt findet: nämlich, dafs der Krümmungshalb-

§. 93.

Denkt man sich nun durch die Normale des ursprünglichen oder gegebenen Punctes der Fläche nach allen Richtungen Ebenen gelegt, so haben von allen dadurch auf der Fläche bestimmten Curvenschnitten nur jene zwei auf einander senkrecht stehenden, welche den Werthen m', m'' (§. 90.) entsprechen, im Puncte x, y, z mit der Fläche einerlei Krümmung; weil nur von diesen beiden jede mit der Fläche zwei gemeinschaftliche Normalen besitzt, während alle andern Schnitte mit dieser nur eine Normale gemein haben. Die Krümmungshalbmesser dieser beiden Schnitte im Puncte x, y, z sind sonach auch die Krümmungshalbmesser für die beiden Krümmungen der Fläche in diesem Puncte.

Diese Krümmungshalbmesser werden aber offenbar durch

$$R = \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]},$$

d. i. durch den Abstand des Punctes x, y, z der Fläche von dem Durchschnittspunct x', y', z' der beiden nächsten Normalen gegeben. Setzt man für $x-x'$ und $y-y'$ die Werthe aus den Gleichungen (1 und (2 (§. 90.), so erhält man auch

$$R = (z-z')\sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

und man darf in diesem Ausdruck nur noch für $z-z'$ den Werth aus einer der Gleichungen (3 oder (4 substituiren. Da aber auf diese Weise, wie man sieht, R von m abhängig wird, so kann man gleich im Voraus aus den beiden Gleichungen (3 und (4 $m = \frac{dy}{dx}$ eliminiren; dadurch erhält man die Gleichung:

messer des schiefen Schnittes die Projection des Krümmungshalbmessers des genannten Normalschnittes auf die Ebene des erstern ist, so, dafs also der erstere Halbmesser gleich ist dem letztern, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der beiden genannten Ebenen, und sofort die sämmtlichen Krümmungskreise aller durch die nämliche Tangente der Fläche gehenden Schnitte auf einer Kugel liegen, deren Halbmesser jenem des Krümmungskreises des betreffenden Normalschnittes gleich ist.

$$[pq+(z-z')s]^2=[1+p^2+(z-z')r][1+q^2+(z-z')t],$$

oder, wenn man für $z-z'$ den aus der vorigen Gleichung folgenden Werth $\frac{R}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ substituirt, gehörig entwickelt und nach R ordnet:

$$(rt-s^2)R^2+[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{(1+p^2+q^2)}.R$$
$$+(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Die aus dieser Gleichung für R folgenden Wurzeln sind sofort die beiden Krümmungshalbmesser der Fläche im Puncte x, y, z; und zwar gehört der gröſsere dieser beiden Halbmesser für die kleinste, und der kleinere für die gröſste Krümmung der Fläche in diesem Puncte *).

*) Legt man nämlich durch die Normale irgend eines Punctes x, y, z der krummen Fläche nach allen möglichen Richtungen Ebenen, und sucht zu jedem der dadurch entstehenden Curvenschnitte den Krümmungshalbmesser für den genannten Punct; so wird dieser für jenen Schnitt, welcher in seinen nächsten Puncten mit der einen im Puncte x, y, z der Fläche gezogenen Krümmungslinie zusammenfällt, ein Maximum oder Minimum; dagegen für jenen darauf perpendikulären Schnitt, der sofort zunächst mit der zweiten Krümmungslinie dieses Punctes zusammenfällt, ein Minimum oder Maximum.

Um diesen Satz auf eine einfache Art zu erweisen, nehmen wir wieder die coordinirte Ebene der xy mit der im genannten Punct x, y, z an die Fläche gezogene Tangentialebene parallel, wodurch auch die Normale dieses Punctes mit der Axe der z parallel wird. Legt man nun durch die im Puncte x, y, z errichteten Normale (die sofort auf der Ebene der xy perpendikulär steht) eine von den unzähligen Ebenen, die hier möglich sind; so wird ihre Richtung (§. 83.) durch den Quotienten $\frac{dy}{dx}=m$ oder $dy=m\,dx$, d. i. durch die Lage der Projection dieser schneidenden Ebene in der Ebene der xy ausgedrückt, und man hat, wenn die auf dieser Projection oder Knotenlinie gezählten Abscissen des durch diese Ebene bestimmten Curvenschnittes durch u bezeichnet werden: $du=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ und dz als das Differential der von u abhängigen Ordinate z dieser Curve; es ist daher der Krümmungshalbmesser dieses Curvenschnitts (§. 52.):

$$R=\frac{\left(1+\frac{dz^2}{du^2}\right)^{\frac{3}{2}}du^2}{d^2z}.$$

Da aber in diesem Punct x, y, z die Tangente mit der

Je nachdem die beiden Werthe von R einerlei oder verschiedene Zeichen erhalten, kehren diese beiden Curvenschnitte oder Krümmungslinien ihre convexen (also auch concaven) Seiten nach derselben, oder nach entgegengesetzten Gegenden hin.

Anmerk. Nimmt man dagegen wieder die coordinirte Ebene der xy parallel mit der im Puncte x, y, z errichteten Tangentialebene; so geht die vorige Gleichung, da $p = 0$ und $q = 0$ wird, in folgende einfachere über:

$$(rt - s^2)R^2 + (r + t)R + 1 = 0;$$

Ebene der xy, also mit der Abscissenlinie u parallel ist; so hat man $\frac{dz}{du} = 0$; und da ferner [§. 27., (γ)] $d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$, oder, wenn man für dy seinen Werth $m\,dx$ setzt, wodurch $du^2 = dx^2(1 + m^2)$ und $d^2z = dx^2(r + 2sm + tm^2)$ wird; so erhält man auch:

$$R = \frac{1 + m^2}{r + 2sm + tm^2}.$$

Geht man aber von diesem Schnitt zu einer der übrigen der oben erwähnten Ebenen (die noch immer durch dieselbe Normale geht) über, so ändert sich offenbar nichts als die Gröfse m. Um daher das Maximum oder Minimum von R zu finden, wird man den Ausdruck $\frac{dR}{dm} = 0$ entwickeln. Man erhält sofort

$$\frac{dR}{dm} = \frac{2m(r + 2sm + tm^2) - 2(1 + m^2)(s + tm)}{(r + 2sm + tm^2)^2} = 0,$$

und daraus

$$m^2 + \left(\frac{r - t}{s}\right)m - 1 = 0;$$

man erhält also, wie man sieht [vergl. §. 90., Gl. (6)], zur Bestimmung von m, für welches R ein Maximum oder Minimum wird, genau die Gleichung für die Richtung der beiden Krümmungslinien des Punctes x, y, z. Geht man auf den zweiten Differentialquotienten über, so findet man, dafs für den einen der beiden obigen Werthe von m der Krümmungshalbmesser ein Maximum, und für den andern Werth ein Minimum wird.

Mehreres hieher Gehörige findet man unter Andern auch in *Crelles* Journal der reinen und angewandten Mathematik; als z. B. im dritten Bande, S. 324: »Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Puncte,« von Herrn Dr. *Plücker* zu Bonn; im siebenten Bande, S. 1: »*Mémoire sur la courbure des surfaces*,« *par Melle Sophie Germain*, *à Paris*; im achten Bande, S. 280: *Mém. sur la courb. des surf. par Mr. Poisson*; *etc.*

woraus sofort folgt:

$$R = \frac{-(r+t) \pm \sqrt{[(r-t)^2 + 4s^2]}}{2(rt - s^2)}.$$

Von den *größsten* und *kleinsten* Ordinaten der Flächen.

§. 94.

Die krummen Flächen bieten oft in ihrem Laufe analoge Erscheinungen mit jenen der Curven dar, und es finden sich nicht nur einzelne besondere Puncte, sondern auch ganze Folgen derselben, d. i. besondere Linien vor. Da wir hier in die dieſsfälligen, sehr weitläufigen, Untersuchungen nicht eingehen können *); so begnügen wir uns mit der Bestimmung jener Puncte, in welchen eine gröſste oder kleinste Ordinate Statt findet.

Soll in irgend einem Punct x, y, z der Fläche die Ordinate z ein Maximum oder Minimum seyn; so muſs ihr offenbar diese nämliche Eigenschaft in allen Curvenschnitten zukommen, die dadurch entstehen, daſs man durch diese Ordinate beliebig Ebenen legt; weil sie gröſser oder kleiner als alle rings herum liegenden benachbarten Ordinaten seyn muſs.

Wird daher für einen dieser Schnitte $dy = a\,dx$ gesetzt, so ist, wenn φ den Neigungswinkel der an diesen Curvenschnitt im Puncte x, y, z errichteten Tangente mit der coordinirten Ebene der xy (oder mit der betreffenden Knotenlinie) bezeichnet [§. 84., Gl. (α)]:

$$tang.\,\varphi = \frac{p + aq}{\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

Da aber (§. 57.) im Puncte der gröſsten oder kleinsten Ordinate die Tangente mit der Abscissenaxe parallel seyn muſs, so muſs hier für jeden der genannten (durch x, y, z

*) Wir verweisen auch in dieser Beziehung auf das inhaltsreiche Werk: »Lehrbuch der höhern Geometrie in analytischer Darstellung,« von *H. W. Brandes*, Professor an der Universität in Breslau. (Zwei Theile in 4.) Leipzig 1822.

auf die Ebene der xy perpendikulär geführten) Schnitte, mithin unabhängig von a (welche Gröſse die Schnitte partikularisirt), $tang. \varphi = 0$, d. i.

$$\frac{p + aq}{\sqrt{(1 + a^2)}} = 0$$

seyn, und daraus folgen sofort die Bedingungsgleichungen:

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0;$$

diese zeigen aber bloſs, daſs im Falle eines Maximums oder Minimums der Ordinate z, die im betreffenden Puncte an die Fläche gelegte Berührungsebene mit der coordinirten Ebene der xy parallel seyn muſs; welche von diesen beiden Eigenschaften aber dann wirklich Statt findet, muſs aus andern Umständen entschieden werden. (Vergl. auch §. 42.)

Beispiel.

Die Gleichung der Kugelfläche ist [Bd. II., §. 181., (2], den Ursprung im Mittelpunct genommen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

und daraus folgt

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z} \quad \text{und} \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z}.$$

Man hat also für ein Maximum oder Minimum der Ordinate z: $x = 0$ und $y = 0$, folglich aus der ursprünglichen Gleichung: $z = \pm r$; woraus zugleich folgt, daſs hier nur ein Maximum Statt finden kann.

Anmerk. Es kann auch analog mit §. 57. (s. die Note auf S. 183), eine gröſste oder kleinste Ordinate in einem Puncte der Fläche Statt finden, für welchen p und q nicht Null, wohl aber Unendlich werden. Ein solcher Fall tritt z. B. bei der Fläche ein, deren Gleichung $z = a + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$ ist; in dieser wird, wie man leicht sieht, z ein Minimum und $= a$ für $x = 0$, $y = 0$. Für diese Werthe erscheinen aber die Partialquotienten $p = \frac{2x}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$ und $q = \frac{2y}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$ unter der Form $\frac{0}{0}$, welche sich, wenn man, um die wahren Werthe dafür zu finden, $y = nx$ setzt, in

$$p = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}(1+n^2)^{\frac{2}{3}}} \text{ und } q = \frac{2n}{3x^{\frac{1}{3}}(1+n^2)^{\frac{2}{3}}}$$

verwandeln, und woraus sofort folgt, dafs für $x = 0$ und $y = 0$, bei jedem endlichen Werth von n, p und q Unendlich werden.

Man findet auch in der That leicht, dafs die Fläche in diesem Puncte $x = 0$, $y = 0$, $z = a$ eine Art Schnabel *(reproussement)* bildet, ähnlich dem Puncte, welcher entsteht, wenn

Fig. 29. sich die Curve bm, Fig. 29, um die Ordinate pm dreht. Die Werthe von p und q erscheinen endlich für diesen Punct der Fläche defshalb unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, weil jede durch die Axe der z geführte Ebene die Fläche in diesem Puncte berührt (und auch schneidet).

Die Curven von *doppelter* Krümmung.

§. 95.

Nach §. 178. der analytischen Geometrie (Bd. II.) wird eine Curve von doppelter Krümmung durch ein System zweier Gleichungen zwischen den drei Variablen x, y, z analytisch dargestellt. Bei Anwendung der Differentialrechnung auf diesen Gegenstand ist es am einfachsten und bequemsten, die Curven von doppelter Krümmung als die Grenzen von Polygonen anzusehen, von welchen je drei auf einander folgende unendlich kleine Seiten nicht in einer Ebene liegen, und die Verlängerung einer dieser Seiten zugleich die Tangente in diesem Puncte bildet.

Da auf diese Weise die Tangente der Curve im Puncte x, y, z als eine Gerade zu betrachten ist, welche durch die beiden Puncte x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ geht; so erhält man für die Gleichungen derselben, wenn x', y', z' die veränderlichen oder laufenden, und x, y, z die Coordinaten des Berührungspunctes sind (Bd. II., §. 168., Aufg. 1.):

$$1) \quad x - x' = \frac{dx}{dz}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy}{dz}(z - z').$$

Dabei bezeichnet die erstere offenbar die Projection dieser Tangente in der Ebene der xz, oder, was dasselbe ist, die

in der coordinirten Ebene der xz liegende Tangente der Projection der Curve auf diese Ebene der xz; und die zweite die Tangente der Projection der Curve auf die Ebene der yz.

Will man y und z als Functionen von x ansehen *), also die Gleichungen der Curve von der Form annehmen: $y = f(x)$, $z = f'(x)$; so kann man die vorigen Gleichungen der Tangente auch so schreiben:

$$y - y' = \frac{dy}{dx}(x - x'), \quad z - z' = \frac{dz}{dx}(x - x'),$$

wobei die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ aus den eben angeführten Gleichungen der Curve zu entwickeln sind.

§. 96.

Die Aufgabe, in irgend einem Punct x, y, z einer Linie im Raume oder krummen Linie doppelter Krümmuug eine Normale zu ziehen, ist eine unbestimmte; weil sich in diesem Puncte auf die durch diesen gezogene Tangente rings herum unzählig viele Perpendikel errichten lassen. Diese Perpendikel oder Normalen liegen aber sämmtlich in einer durch diesen Punct x, y, z auf der Tangente perpendikulär stehenden Ebene, welche Normalebene heifst.

Mit Berücksichtigung der obigen Gleichungen 1) der Tangente ist sonach die Gleichung der Normalebene (Bd. II., §. 170., Aufg. 11.):

$$(x' - x)\frac{dx}{dz} + (y' - y)\frac{dy}{dz} + (z' - z) = 0$$

oder

$$(x' - x)\,dx + (y' - y)\,dy + (z' - z)\,dz = 0 \; . \; . \; . \; (2.$$

§. 97.

Die Ebene zweier unmittelbar auf einander folgender Tangenten, welches also auch die Ebene dreier consecuti-

*) Wir haben schon in der analytischen Geometrie bemerkt, dafs bei den Curven im Raume, von den Coordinaten x, y, z nicht mehr, wie bei den Flächen, zwei willkürlich und die dritte davon eine Function, sondern nur eine willkürlich ist, und die beiden andern von dieser abhängen.

ver Puncte des gedachten Polygons oder der Curve ist, heifst Krümmungsebene; ihre Gleichung läfst sich sofort leicht auf folgende Art finden:

Sind wieder x', y', z' die allgemeinen und x, y, z die Coordinaten eines bestimmten Punctes der Curve; so ist erstlich die gesuchte Gleichung der genannten Ebene von der Form [Bd. II., §. 162., Gl. (4]:

$$z' = Ax' + By' + D \; . \; . \; . \; (m';$$

und da die Ebene durch den bestimmten Punct x, y, z geht, auch

$$z = Ax + By + D \; . \; . \; . \; (m.$$

Damit aber diese Ebene zugleich durch die beiden nächstfolgenden Puncte der Curve gehen kann, müssen nebst dieser Gleichung auch noch die erste und zweite Differentialgleichung dieser letztern mit bestehen. Man hat nun aus (m, wenn man der gröfsern Symmetrie wegen kein erstes Differential als constant ansieht:

$$dz = A\,dx + B\,dy, \quad d^2z = A\,d^2x + B\,d^2y,$$

und aus diesen beiden Gleichungen:

$$A = \frac{dz\,d^2y - dy\,d^2z}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \quad B = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Die beiden Gleichungen (m und (m' geben

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y),$$

und wenn man in diese Gleichung für A und B die eben gefundenen Werthe und Kürze halber

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = X,$$

$$dz\,d^2x - dx\,d^2z = Y \text{ und } dx\,d^2y - dy\,d^2x = Z \; . \; . \; . \; (n$$

setzt; so erhält man für die Gleichung der Krümmungsebene:

$$X(x' - x) + Y(y' - y) + Z(z' - z) = 0 \; . \; . \; . \; (3.$$

Aus dieser Gleichung läfst sich zugleich auch immer erkennen, ob die Curve einer gegebenen Gleichung einfach oder doppelt gekrümmt ist; weil im erstern Falle die Krümmungsebene für alle Puncte der Curve gelten oder die nämliche bleiben mufs.

§. 98.

Für das Element der Curve oder das **Differential des Bogens** hat man

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)},$$

weil dieses nichts anders als der Abstand der beiden Puncte x, y, z und $x+dx, y+dy, z+dz$ ist.

§. 99.

Die Reihe der Tangenten einer Curve von doppelter Krümmung in nahe auf einander folgenden Puncten, oder was auf dasselbe führt, die Aufeinanderfolge ihrer Krümmungsebenen, bildet ein Polyeder, welches aus Winkel oder Dreieckebenen zusammengesetzt ist, von denen je zwei nicht in einer Ebene liegen, aber durch eine gemeinschaftliche Seite oder Durchschnittslinie mit einander verbunden sind.

Verlängert man nämlich (Fig. 56) die Seiten MM', Fig. 56. $M'M''$, . . . des Polygons in einerlei Richtung nach MT, $M'T'$, $M''T''$, . . .; so bilden diese Verlängerungen die Winkel $TM'T'$, $T'M''T''$, $T''M'''T'''$, ... welche sämmtlich in verschiedenen Ebenen liegen.

Man kann aber offenbar die erste Ebene $TM'T'$ um die Durchschnittslinie $T'M'$ dieser ersten und zweiten Winkelebene so herumlegen, daſs sie in die Ebene der zweiten oder $T'M''T''$ kommt; das System dieser beiden Ebenen läſst sich ferner um die Durchschnittslinie $T''M''$ der zweiten und dritten Ebene so herumlegen, daſs dieses in die Ebene der dritten Winkelebene oder $T''M'''T'''$ zu liegen kommt; dieses neue System der drei bereits in **einer** Ebene liegenden Winkelebenen kann ferner wieder um die Durchschnittslinie $T'''M'''$ der dritten und vierten Winkelebene so herumgelegt werden, daſs selbes mit der vierten Winkelebene $T'''M^{IV}T^{IV}$ nur **eine** Ebene ausmacht, u. s. w., kurz, es lassen sich diese sämmtlichen Winkelebenen in eine **einzige** Ebene ausbreiten.

Betrachtet man eben so die Verlängerungen der Tan-

genten nach den entgegengesetzten Seiten, nämlich Mt, $M't'$, $M''t''$, ...; so bilden die Winkelebenen derselben einen zweiten Flächenzweig des Polyeders und schneiden den erstern in der Linie des Polygons $MM'M''$... die man in dieser Beziehung eine Rückkehrlinie der Fläche nennen kann.

Denkt man sich nun die auf einander folgenden Puncte der Curve, in welchen eben diese Tangenten gezogen, immer näher und näher und zuletzt unendlich nahe gerückt, so, dafs endlich das Polygon mit der Curve vollkommen zusammenfällt; so geht auch das vorige Polyeder in einen stetigen Körper über, welcher eben so die Grenze aller der auf die vorige Weise entstehenden Polyeder bildet, wie der Cylinder und Kegel die Grenze der Prismen und Pyramiden darstellt. Die continuirliche Fläche dieses Körpers, welches also die Fläche der Tangenten der gegebenen Curve ist, besitzt immer noch die Eigenschaft, dafs sie ohne Trennung oder Faltung in eine Ebene ausgebreitet oder abgewickelt werden kann, wie dieses z. B. bekanntlich auch bei der Cylinder- und Kegelfläche der Fall ist; und diese Eigenschaft bildet das Charakteristische der sogenannten abwickelbaren oder developpablen Flächen. Man sieht, dafs für diese developpable Fläche die gegebene Curve die vorhin genannte Rückkehrlinie bildet, die wir hier Wendungscurve nennen wollen.

Um die Gleichung dieser (developpablen) Fläche der Tangenten zu erhalten, darf man nur aus den beiden Gleichungen der Curve

$$x = f(z), \quad y = f'(z)$$

und den beiden Gleichungen 1) der Tangente (§. 95.), die Coordinaten x, y, z, welche die Tangente particularisiren, eliminiren; die in x', y', z' entstehende Gleichung ist sodann die gesuchte Gleichung der Fläche.

Zugleich wird man aus der entstehenden Gleichung der Fläche der Tangente wieder erkennen, ob die gegebene Curve eine ebene oder doppelt gekrümmte krumme Linie

ist; weil diese Fläche im ersten Falle eben, im zweiten aber krumm seyn wird *).

§. 100.

Wir haben im §. 96. [Gl. (2] die Gleichung der dem Puncte x, y, z der krummen Linie entsprechende Normalebene aufgestellt. Um daraus die Gleichung für die dem nächstfolgenden Puncte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ zukommende Normalebene zu erhalten, wird man diese Gleichung in Bezug auf die Coordinaten x, y, z und ihre Differentiale differentiiren; man erhält dadurch, wenn kein erstes

*) Wir können hier in die allgemeine Entwicklung der developpablen Flächen nicht weiter eingehen und verweisen in dieser Beziehung wieder auf das oben angezogene Werk von Prof. *Brandes*, und insbesondere aber auf das zehnte Capitel der vom Director *Littrow* herausgegebenen analytischen Geometrie (Wien 1823).

Wir bemerken nur noch so viel, daſs die Kenntniſs der Wendungscurve, die also eine Curve doppelter Krümmung ist, zur Bestimmung einer developpablen Fläche hinreicht; weil diese letztere nichts anderes als der Ort der sämmtlichen Tangenten dieser Curve ist. Zugleich ist diese Wendungscurve die Grenze der developpablen Fläche, weil keine der genannten Tangenten gegen die hohle Seite der Curve kommen kann. So bilden z. B. die Tangenten der Schraubenlinie (§. 187., Bd. II.) eine developpable Fläche, die sich auf der äuſsern, convexen Seite dieser Linie in unzähligen Windungen bis ins Unendliche erstrecket, aber offenbar nicht in das Innere des Cylinders, auf welcher die Schraubenlinie verzeichnet ist, eindringen kann; man muſs also in der That diese Linie, welche hier die Wendungscurve (nach *Monge: arète de rebroussement*) bildet, als die Grenze der entstehenden developpablen Fläche ansehen.

Es ist jetzt auch leicht zu sehen, daſs die Aufeinanderfolge der Normalen der Puncte einer der beiden Krümmungslinien (§. 92.) eine developpable Fläche bildet, die auf der gegebenen krummen Fläche senkrecht steht und deren gemeinschaftlicher Durchschnitt eben diese Krümmungslinie ist. Auf die nämliche Art entspricht auch der zweiten Krümmungslinie eine zweite auf der krummen Fläche senkrecht stehende developpable Fläche. Die Krümmungsmittelpuncte von jeder der beiden Krümmungslinien liegen in der Wendungscurve der correspondirenden developpablen Fläche, welche Curve sofort von den Normallinien tangirt wird, und denen sie durchaus die convexe Seite zuwendet; zugleich bildet diese Curve die Evolute der betreffenden Krümmungslinien.

Differential als beständig angenommen und der Kürze wegen $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ (§. 98.) gesetzt wird:

$$(x'-x)\,d^2x + (y'-y)\,d^2y + (z'-z)\,d^2z - ds^2 = 0 \ldots (2'$$

als Gleichung der auf jene (2 unmittelbar folgende Normalebene.

Das System der beiden Gleichungen (2 und (2' gehört also für die Durchschnittslinie zweier unmittelbar auf einander folgenden Normalebenen der Curve. Verbindet man mit diesem Systeme noch jenes der beiden Gleichungen der Curve selbst, und eliminirt aus diesen vier Gleichungen die Coordinaten x, y, z, welche diese Durchschnittslinie specialisiren; so erhält man offenbar eine Gleichung für die Fläche dieser Durchschnittslinien, welche eben so die Grenze oder der Ort aller dieser Durchschnittslinien der Normalebenen ist, wie die Evolute einer ebenen Curve die Grenze oder der geometrische Ort der Durchschnittspuncte der Normallinien. Zugleich ist diese Fläche wieder eine developpable, weil sie eben so, wie die Fläche der Tangenten des vorigen Paragraphes, aus geraden Linien zusammengesetzt ist, von denen je zwei sich schneiden; wie man diefs sogleich sieht, wenn man zuerst wieder für die Curve ein Polygon substituirt und dieses nach und nach in die krumme Linie übergehen läfst. Wir haben diefs durch die Figur 57 zu versinnlichen gesucht, wo
Fig. 57. mo, oo', $o'o''$, . . . die auf einander folgenden Seiten des Polygons, oder die Tangenten der Curve, und I., II., III., . . . die respective auf diese in ihren Halbirungspuncten a, b, c, . . perpendikulär stehenden Normalebenen bezeichnen, die sich sofort, die erste und zweite in AB, die zweite und dritte in $A'B'$, die dritte und vierte in $A''B''$ u. s. w. schneiden, und wobei die Winkel- oder Dreiecksebenen BAB', $B'A'B''$, . . . die erwähnte developpable Fläche bilden.

§. 101.

Um endlich noch die beiden Krümmungen einer Curve von doppelter Krümmung zu bestimmen, bemerken wir, dafs die erste Krümmung durch die Winkel der auf ein-

ander folgenden Tangenten gebildet und bestimmt, also auch nicht geändert wird, wenn man die developpable Fläche der Tangenten (§. 99.) in eine Ebene ausbreitet. Die zweite Krümmung dagegen ist die Krümmung dieser Fläche der Tangenten selbst, welche sofort durch die Winkel der auf einander folgenden Krümmungsebenen (§. 97.) gebildet und bestimmt wird. Da aber die Durchschnittslinie zweier nächsten Normalebenen immer auf der correspondirenden Krümmungsebene perpendikulär steht, so bilden diese auf einander folgenden Durchschnittslinien offenbar dieselben Winkel, welche die auf einander folgenden Krümmungsebenen mit einander einschliefsen; und da ferner die Folge der Durchschnittspuncte dieser Geraden die Wendungscurve der (developpablen) Fläche der (Durchschnittslinien der) Normalebenen bildet; so sind diese Durchschnittslinien zugleich Tangenten an diese Wendungscurve, die demnach die nämlichen Winkel, wie die vorhin genannten Krümmungsebenen, einschliefsen, und sonach die erste Krümmung dieser Wendungscurve bilden: die *zweite* Krümmung der gegebenen Curve ist demnach mit der *ersten* Krümmung der Wendungscurve der (developpablen) Fläche der Normalebenen identisch.

Es handelt sich daher nur um die Bestimmung der ersten Krümmung einer Curve von doppelter Krümmung, jener Krümmung nämlich, welche durch die Winkel der Tangenten gegeben oder gebildet ist. Diese erste Krümmung wird aber durch die Grenze aller Kreise bestimmt, deren jeder durch drei auf einander folgende Puncte der Curve geht und sofort in der Krümmungsebene dieser drei Puncte liegt; der Mittelpunct eines jeden dieser Kreise ist der Durchschnitt der Krümmungsebene mit den beiden betreffenden nächsten Normalebenen. Ist nämlich aO und bO perpendikulär auf die Durchschnittslinie AB der beiden Normalebenen I., II., also aOb die Krümmungsebene der drei Puncte a, o, b; so ist O der Mittelpunct des Krümmungskreises, welcher die beiden Seiten om und oo' be-

rührt. Dieser Mittelpunct wird also gefunden, indem man die Gleichung (3 (§. 97.) mit dem Systeme der beiden Gleichungen (2 und (2′ (§ 96. und 100.) mit einander verbindet. Sucht man nämlich aus diesen genannten Gleichungen die Werthe von $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ und substituirt dieselben in den Ausdruck $\rho=\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}$ (Bd. II., §. 161.); so hat man sofort den Krümmungshalbmesser der Curve für den Punct x, y, z.

Nun folgt aus den Gleichungen (3 und (2

$$x'-x=\frac{Y\,dz-Z\,dy}{X\,dy-Y\,dx}(z'-z)$$

$$\text{und}\quad y'-y=\frac{Z\,dx-X\,dz}{X\,dy-Y\,dx}(z'-z).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (2′ und bestimmt daraus $z'-z$, so erhält man, wenn Kürze halber

$$(Ydz-Zdy)\,d^2x+(Zdx-Xdz)\,d^2y+(Xdy-Ydx)\,d^2z=U$$

gesetzt wird:

$$z'-z=\left(\frac{X\,dy-Y\,dx}{U}\right)ds^2.$$

Es ist daher auch

$$x'-x=\left(\frac{Ydz-Zdy}{U}\right)ds^2,\ \text{und}\ y'-y=\left(\frac{Zdx-Xdz}{U}\right)ds^2$$

und wenn man diese drei letzten Werthe in dem obigen Ausdruck von ρ substituirt:

$$\rho^2=\frac{[(Y\,dz-Z\,dy)^2+(Z\,dx-X\,dz)^2+(X\,dy-Y\,dx)^2]\,ds^4}{U^2}.$$

Da ferner, wie man aus den obigen Relationen n) (§. 97.) leicht findet,

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0$$

ist; so kann man ohne Aenderung das Quadrat dieses Trinoms zu der in den Parenthesen eingeschlossenen Summe der Quadrate des vorigen Ausdruckes von ρ^2 addiren. Dadurch reducirt sich dieser eingeklammerte Theil ganz einfach auf den Ausdruck $(X^2+Y^2+Z^2)(dx^2+dy^2+dz^2)$ und es ist daher (mit Rücksicht auf die Relation im §. 98.)

$$\rho^2=\frac{(X^2+Y^2+Z^2)\,ds^6}{U^2}$$

und da endlich noch, wie man ebenfalls leicht findet, $U = X^2 + Y^2 + Z^2$ ist, so hat man für den gesuchten Krümmungshalbmesser des Punctes x, y, z der Curve von doppelter Krümmung, wenn man zugleich auch wieder die Werthe von X, Y, Z aus (n, §. 97., herstellt:

$$\rho = \frac{\pm (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dxd^2z - dzd^2x)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2]}} \quad (A$$

In diesem Ausdrucke ist kein erstes Differential für constant genommen worden; nimmt man daher z. B. dx als beständig an, so erhält man:

$$\rho = \frac{\pm (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[dx^2 d^2y^2 + dx^2 d^2z^2 + (dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2]}} \ldots (B.$$

Anmerk. Ist die Curve eine ebene Curve und nimmt man an, daſs sie in der coordinirten Ebene der xz liegt; so wird y, dy und d^2y Null, und es geht für diese Curve der Krümmungshalbmesser A über in

$$\rho = \frac{\pm (dx^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2z - dz\, d^2x};$$

welcher Ausdruck in der That mit jenem im §. 52. (in der Note angegebenen) übereinstimmt. Wird dabei noch dx als constant angenommen, so erhält man, in Uebereinstimmung mit dem in II., §. 52., gefundenen Werthe:

$$\rho = \frac{\pm (dx^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2z}.$$

§. 102.

Beispiel.

Um den Vortrag des vorhergehenden Paragraphes wenigstens durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir den Krümmungshalbmesser für die Schraubenlinie aufsuchen.

Die Gleichungen dieser Curve sind (Bd. II., §. 187,), wenn man x als die absolut Variable ansehen will:

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)} \text{ und } z = ab\, arc. sin. \left(\frac{x}{a}\right);$$

daraus folgt, wenn man dx als constant nimmt:

$$dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},\quad d^2y = \frac{-a^2\,dx^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dz = \frac{a\,b\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \text{ und } d^2z = -\frac{a\,b\,x\,dx^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

folglich

$$dz\,d^2y - dy\,d^2z = \frac{-a\,b\,(a^2 - x^2)\,dx^3}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{-a\,b\,dx^3}{a^2 - x^2}$$

und daher nach der Formel (B:

$$\rho = \frac{(a^2 + a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}{(a^4 + a^4b^2)^{\frac{1}{2}}} = a(1 + b^2);$$

es ist also der Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie eine beständige Gröfse, wie es offenbar auch die Natur dieser Linie erfordert.

§. 103.

Fig. 57. Da der Punct b des anfänglich für die Curve gesetzten Polygons $o\,o'\,o''$. . . (Fig. 57) mit den beiden oben (§. 101.) genannten Durchschnittslinien AB und $A'B'$ in derselben Ebene II. liegt; so wird, wenn man diesen Punct b mit irgend einem Punct O der erstern Durchschnittslinie AB verbindet, diese Verbindungslinie $b\,O$ die zweite Durchschnittslinie $A'B'$ in irgend einem Punct O' treffen. Verbindet man diesen letztern Punct O' mit c, welcher Punct sammt den beiden Durchschnittslinien $A'B'$ und $A''B''$ in der Ebene III. liegt; so wird wieder dadurch die dritte Durchschnittslinie $A''B''$ in einem Punct O'' geschnitten u. s. w. Denkt man sich nun um das solchergestalt gebildete Polygon $O\,O'\,O''$. . . einen Faden gelegt und diesen von O weg so ausgespannt, dafs sein Endpunct (als beschreibender Punct) mit a zusammenfällt; ferner diesen Faden von dem Polygone so abgewickelt, dafs das Ende des Fadens oder der beschreibende Punct immer der Richtung der Polygonseiten folgt; so mufs der Endpunct des Fadens nach und nach nothwendig in den Puncten a, b, c, d, . . . eintreffen und sofort ein System von Kreisbögen beschreiben, von welchem jeder Bogen zwei Seiten des ursprünglichen Polygons

$o o' o''$... berührt, indem offenbar $Oa = Ob$, $O'b = O'c$ u. s w. ist.

Läfst man nun die Seiten des ursprünglichen Polygons unendlich klein werden, wodurch dieses, so wie auch das genannte System der Kreisbogen in die gegebene Curve von doppelter Krümmung selbst übergeht; so geht der Inbegriff der Dreiecke BAB', $B'A'B''$,... in die developpable Fläche der Normalebenen (§. 100.) und das Polygon $OO'O''$... offenbar in eine (auf dieser Fläche liegenden) Curve über, durch deren Evolution die gegebene Curve entsteht.

Da der erste Punct O, welcher die Lage der letztgenannten, auf der developpablen Fläche der Normalebenen befindlichen Curve $OO'O''$... bedingt, ganz willkürlich auf der Durchschnittslinie AB angenommen werden kann; so folgt, dafs es unzählige Evoluten für die gegebene Curve geben müsse. Es kann also jeder Punct, wie O, der Durchschnittslinie AB als Mittelpunct des Krümmungskreises für den Punct oder die Stelle o der Curve genommen werden, wobei dann der Abstand dieses Punctes O von a oder b der entsprechenden Krümmungshalbmesser wäre. Allein da dadurch eine gewisse Willkür und Unbestimmtheit eintritt, so ist man (und zwar analog mit andern ähnlichen Bestimmungen) übereingekommen, unter dem eigentlichen oder absoluten Krümmungsmittelpuncte den Durchschnittspunct O der aus den genannten Puncten a und b auf die Durchschnittslinie AB gefällten Perpendikel aO, bO zu verstehen; dadurch wird sodann der absolute (und eigentliche) Krümmungshalbmesser $Oa = Ob$ des Punctes o der Curve, unter allen auf die vorhin genannte Weise entstehenden, am Kleinsten *). Und diesen absoluten Krümmungshalbmesser haben wir in der That auch im vorletzten

*) Ist nämlich (Fig. 58) C der Mittelpunct eines Kreises, so kann dieser nicht blofs mit dem Halbmesser CA aus C, sondern, wenn die Gerade DE in C auf der Kreisebene perpendikulär steht, aus jedem Puncte dieser Axe, wie C', C'', .. mit der betreffenden Entfernung $C'A$, $C''A$, ... beschrieben werden; weil jeder dieser Puncte der Axe, von allen Puncten der Kreisperipherie gleich weit abstehet. Von allen diesen Halbmessern $C'A$, $C''A$, ... ist aber jener CA, Fig. 58.

Paragraphe bestimmt, weil wir den Krümmungsmittelpunct O in der Osculationsebene liegend angenommen haben, welches sofort die Ebene aOb der genannten Perpendikel aO, bO ist.

Ist nun O der absolute oder eigentliche Krümmungsmittelpunct des ersten, dem Puncte o entsprechenden, Kreisbogens, und $O\,O'\,O''\ldots$ die durch diesen Punct geführte Evolute der gegebenen Curve; so kann O' nicht auch der absolute Krümmungsmittelpunct des zweiten Kreisbogens seyn, welcher dem Puncte o' zugehört; weil sonst eben so, wie aO und bO auf AB, so auch $b\,O\,O'$ und $c\,O''$ auf $A'\,B'$ perpendikulär seyn müfste; was aber offenbar nur Statt haben kann, wenn die Durchschnittslinien AB und $A'B'$ mit einander parallel sind, also die drei auf einander folgenden Seiten mo, oo', $o'o''$ des Polygons oder der gegebenen Curve in einer Ebene liegen. Da sich nun in diesem besondern Falle die developpable Fläche der Normalebenen in eine Cylinderfläche verwandelt, so folgt, dafs die Linie der absoluten Krümmungsmittelpuncte einer Curve von doppelter Krümmung nicht auch zugleich eine Evolute derselben seyn kann; dagegen ist dieses für jede ebene Curve der Fall, und es liegen zugleich alle ihre Evoluten auf einer Cylinderfläche (der vorhin erwähnten), von denen aber nur eine einzige eine ebene Curve ist; diese liegt zugleich in der Ebene der gegebenen Curve (sie ist jene, welche wir ausschliefslich bei den ebenen Curven behandelt haben) und bildet die Basis des Cylinders; alle übrigen Evoluten sind Curven von doppelter Krümmung, die sofort auf der Oberfläche dieses Cylinders liegen.

Anmerkung.

Die *Loxodrome.*

Um noch ein Beispiel von einer krummen Linie doppelter Krümmung anzuführen, wollen wir hier die in der Schifffahrt

welcher in der Kreisebene selbst liegt, der kürzeste, und also der eigentliche oder absolute und durch die geringste Anzahl von Bedingungen Bestimmte.

wichtige loxodromische Linie, d. i. jener auf der Oberfläche einer Kugel (oder allgemeiner eines Sphäroids) liegenden Linie AMN (Fig. 59) aufsuchen, welche die sämmtlichen durch P gehenden gröfsten Kreisbogen oder Meridiane PQ, PB,.. unter dem nämlichen Winkel $\alpha = AMQ = ANB = \ldots$ schneidet. Fig. 59.

Dazu sey AB ein gröfster Kreisbogen, dessen Pol P ist (der Aequator), der veränderliche Bogen AQ (die Länge) $= v$ und für einen beliebigen Punct M des entsprechenden Meridians PQ, der Bogen PM (die Poldistanz oder das Complement der Breite) $= w$. Zieht man den Meridian PQ' an den eben genannten PQ unendlich nahe; so ist, den Kugelhalbmesser $= 1$ gesetzt, $QQ' = dv$. Wird ferner durch M der Bogen Mm mit jenem AB parallel gezogen, welcher also den Meridian PQ' unter einem rechten Winkel schneidet; so ist $\frac{Mm}{M'm} = tang.\,\alpha$ und (sphär. Trigon., S. 237)

$$Mm = QQ'\,sin.\,w = sin.\,w\,dv;$$

also wegen $M'm = -dw$ (da eine Zunahme von v eine Abnahme von w hervorbringt, folglich einem posit. dv ein negat. dw entspricht):

$$\frac{sin.\,w\,dv}{-dw} = tang.\,\alpha \text{ und daraus } dv = -\,tang.\,\alpha\,\frac{dw}{sin.\,w} \ldots (1;$$

welches sofort die Differentialgleichung der gesuchten loxodromischen Linie auf der Oberfläche der Kugel ist.

In der Integralrechnung wird gezeigt werden [§. 144., Form. 5)] wie man daraus die endliche Gleichung selbst für diese Curve herleitet. Hier genügt es, zu bemerken, dafs, wie man sogleich sieht oder sich überzeugen kann,

$$\frac{-dw}{sin.\,w} = d\,.\,l\,cot.\,\tfrac{1}{2}w$$

oder, wenn C eine beliebige, unbestimmte constante Gröfse bezeichnet,

$$dv = d.(C + tang.\,\alpha\;l\,cot.\,\tfrac{1}{2}w),$$

folglich auch

$$v = C + tang.\,\alpha\,.\,l\,cot.\,\tfrac{1}{2}w \;\ldots (2$$

die endliche Gleichung dieser loxodromischen Linie ist; dabei sind beide Coordinaten Kreisbögen (m. vergl. §. 187., Bd. II).

Zählt man die Bogen v (die Längen) von dem Puncte A aus, in welchem die Loxodrome den gröfsten Kreisbogen AB (Aequator) schneidet; so fällt in der vorigen Gleichung die unbestimmte Constante C weg, indem offenbar für $w = 90$, $v = 0$ seyn mufs.

Die Gleichung (2 zeigt zugleich, dafs die loxodromische Linie sich in unzähligen Windungen um den Pol P herum windet, diesem sich fortwährend nähert, ohne ihn jemals vollständig zu erreichen; weil nur für $v = \infty$, $w = 0$ werden kann.

Für $a = 0$ verwandelt sich die obige Gleichung (2 in $v = C$; mithin fällt die Loxodrome mit einem Meridian zusammen. Für $a = 90$ dagegen erhält man aus (2 oder $v \cot. a = C \cot a + l \cot. \frac{1}{2} w$, wegen $\cot. a = 0$: $l \cot. \frac{1}{2} w = 0$, daher $\cot \frac{1}{2} w = 1$, d. i. $w = 90$; folglich fällt in diesem Falle die Loxodrome mit AB (dem Aequator) zusammen. Läuft diese Linie anstatt vom Aequator, von irgend einem Parallelkreis aus; so fällt in dem zuletzt angeführten Falle die Loxodrome mit diesem Parallelkreis zusammen *).

*) *Murdoch* (*nouvelles tables loxodromiques, trad. par Bremond*), *Walz* (*Actis Erud. Maj.* 1741), *Maupertuis* (*Mém. de l'Acad. des Sc.* 1744), *Caluso* (*Mém. de Turin pour* 1788. 89.) u. m. A. haben die loxodromische Linie auch auf dem elliptischen Sphäroide behandelt.

Zweiter Abschnitt.

Die Integralrechnung.

Einleitung.

§. 104.

Erklärungen.

1. Die Integralrechnung ist die umgekehrte oder entgegengesetzte Rechnungsoperation der Differentialrechnung, und hat demnach zum Zwecke: aus einem gegebenen Differentialausdruck, die ursprüngliche Function wieder herzuleiten, aus deren Differentiation das gegebene Differential entsteht oder in der That erzeugt wurde.

Diese Operation, welche das Integriren heifst, wird angedeutet, indem man dem zu integrirenden Differentialausdruck das Zeichen $\int$ vorsetzt*); der mit diesem Zeichen behaftete Differentialausdruck, oder vielmehr die gesuchte Function selbst, heifst dann das Integral dieses Differentialausdrucks. Ist nämlich $X dx$ das Differential der Function $f(x)$, so ist $\int X dx = \int d.f(x) = f(x)$ das Integral von $X dx$ und sofort die gesuchte ursprüngliche Function; x^m ist das Integral von $x^{m-1} dx$ oder $\int x^{m-1} dx = \int d.x^m = x^m$. Zugleich folgt hieraus, dafs sich die beiden einander geradezu entgegengesetzten Operationszeichen $\int$ und d, wo diese wie hier zusammenkommen, gegenseitig tilgen oder aufheben.

*) Dieses Zeichen ist von *Leibnitz* als Anfangsbuchstabe des Wortes Summe eingeführt, und aus Achtung für ihn beibehalten worden; weil nach seiner Ansicht jede variable Gröfse als das Aggregat oder die Summe von unendlich vielen und unendlich kleinen Zunahmen (Differentialen) angesehen werden kann, welche diese, vom Entstehen bis zu dem Augenblick an, wo man sie betrachtet, erhalten hat. Streng genommen, ist sie blofs die Grenze dieser Summe, was man auch, wenn man diese Benennung Summe der Bequemlichkeit wegen beibehalten will, darunter zu verstehen hat.

2. Ist aus der Relation $y = \varphi(x)$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = X$, oder die Differentialgleichung $dy = Xdx$ abgeleitet worden; so wird man aus dieser Gleichung ebenfalls wieder auf die ursprüngliche, zwischen y und x bestehende Relation zurückgeführt, indem man beide Theile der Gleichung integrirt; man hat nämlich $\int dy = \int Xdx$ oder $y = \int Xdx = \varphi(x)$; und es wird diese letzte Gleichung die Integralgleichung, oder auch nur das Integral der gegebenen Differentialgleichung $dy = Xdx$ genannt.

3. Die ursprüngliche oder gesuchte Function heifst auch in Beziehung auf ihr 2tes, 3tes, . . . ntes Differential, das Integral der 2ten, 3ten, . . . nten Ordnung, und es folgt aus der Entstehungsart der höhern Differentiale (§. 5.) von selbst, dafs man aus dem nten Differential die ursprüngliche Function findet, indem man den gegebenen Differentialausdruck der nten Ordnung n Mal nach einander integrirt, oder dafs, wenn $d^n.\varphi(x) = f(x)dx^n$ ist, auch umgekehrt $\varphi(x) = \int^n.f(x)dx^n$ seyn müsse.

4. Der einfachste und leichteste Fall der Integralrechnung ist der, in welchem der gegebene Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ blofs eine Function von x oder von y, oder was dasselbe ist, wenn entweder $dy = Xdx$ oder $dx = Ydy$ ist; in diesem Falle hat man es immer nur mit der Aufsuchung einer Function von einer Variablen, oder mit der Bestimmung des Integrals $\int Xdx$ zu thun.

Auf diesen einfachen Fall wird auch die Integration der Differentialgleichung $Pdx + Qdy = o$ zurückgeführt, wenn entweder P und Q blofs Functionen von x oder von y allein, oder wenn P eine Function von x und Q eine Function von y, oder umgekehrt wäre; denn in diesen Fällen hat man beziehungsweise:

$$dy = -\frac{P}{Q}dx = Xdx; \; dx = -\frac{Q}{P}dy = Ydy; \; Pdx = -Qdy,$$

nämlich $Xdx = Ydy$; und endlich im letzten Falle

$$\frac{dx}{Q} = -\frac{dy}{P},$$

d. i. $Xdx = Ydy$, so, dafs es in allen diesen Fällen nur auf die Integration der einfachen Differentialausdrücke $X\,dx$ oder $Y\,dy$ ankommt.

5. Complicirter und schwieriger sind die Fälle, in welchen der genannte Quotient als Function von x und y erscheint, oder in welchen man die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = o$ zu integriren hat und dabei P und Q Functionen von x und y sind.

Kommen endlich vollends auch höhere Differentiale in den gegebenen Differentialformeln vor, oder soll aus den gegebenen Ausdrücken die ursprüngliche Function zweier oder mehrerer Variablen hergeleitet werden; so erscheint die Integralrechnung, so weit diese bis jetzt gediehen ist, und selbst in den angeführten und am meisten bearbeiteten einfachen Fällen noch lange nicht das leistet, was zu wünschen wäre, nur erst als eine Sammlung von Regeln und Kunstgriffen, die höchstens in einigen wenigen Fällen das leistet, was von ihr verlangt wird; und es stellt sich sofort der Satz fest, dafs man zwar alle Functionen differentiiren, aber bei weitem nicht alle Differentialausdrücke und Gleichungen integriren könne *).

6. So wie in der Differentialrechnung der Fall, in welchem die Function unmittelbar durch ihre veränderlichen Gröfsen ausgedrückt oder (*explicit*) bestimmt ist, von jenem unterschieden wurde, in welchem die Relation der Function und ihrer Variablen in einer unentwickelten (impliciten) Gleichung erscheint; so biethen auch hier in der Integralrechnung die beiden Fälle, in deren einem der Differentialcoefficient oder die gesuchte Function unmittelbar durch die absolut veränderlichen Gröfsen ausgedrückt, und in de-

*) Etwas Aehnliches, obschon in einem weit minderen Grade, findet auch schon in der gemeinen Arithmetik Statt, indem man wohl von jeder Zahl jede beliebige Potenz entwickeln, aber nicht umgekehrt aus jeder Zahl jede beliebige Wurzel ausziehen kann.

Die Integralrechnung ist demnach eben so schwierig und unvollendet, als die Differentialrechnung leicht und abgeschlossen erscheint.

ren zweitem dieser Coefficient mit den Variab len noch auf irgend eine Art verbunden in der Gleichung erscheinen, einen natürlichen Eintheilungsgrund dar.

Wir werden uns hier gröſstentheils auf die Integration des einfachsten Falles, d. i. auf die Bestimmung des Integrals $\int X dx$ beschränken müssen, und sofort, da X eine algebraische oder transcendente Function von x, und im erstern Falle wieder rational oder irrational, ferner noch ganz oder gebrochen seyn kann, mit dem leichtesten Falle, in welchem X eine algebraische rationale ganze Function von x ist, den Anfang machen.

Erstes Capitel.

Von der Integration der algebraischen Differential-, und zwar *A*) der *rationalen* und *B*) der *irrationalen* Functionen *einer* Variablen, oder Bestimmung des Integrals $\int X dx$.

A) Bestimmung des Integrals $\int X dx$, wenn X eine *rationale* Function von x ist.

a) Für *ganze* Functionen.

§. 105.

Indem wir das Integral $\int X dx$ in der Voraussetzung zu bestimmen suchen, daſs X eine ganze rationale Function von x bezeichnet, müssen wir bemerken, daſs aus der Differentialrechnung theils die allereinfachsten Integrale unmittelbar gegeben sind und als bekannt vorausgesetzt werden können*), theils aber ihre Fundamentalregeln,

*) Die einfachsten Integralformeln, welche man aus der Differentialrechnung als bekannt voraussetzen darf, sind (§. 3.):

1) $\int x^{n-1} dx = x^n$

2) $\int \frac{dx}{x} = lx$

3) $\int \frac{dx}{x\,lx} = llx$

4) $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$

5) $\int a^x la\,dx = a^x$

6) $\int e^x dx = e^x$

7) $\int cos.\,x\,dx = sin.\,x$

8) $\int sin.\,x\,dx = -\,cos.\,x$

9) $\int \frac{dx}{cos.^2 x} = tang.\,x$

10) $\int \frac{dx}{sin.^2 x} = -\,cot.\,x$

11) $\int \frac{sin.\,x\,dx}{cos.^2 x} = sec.\,x$

12) $\int \frac{cos\;x\,dx}{sin.^2 x} = -\,cosec.\,x$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = arc.\,sin.\,x = -\,arc.\,cos.\,x$

14) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc.\,tang.\,x = -\,arc.\,cot.\,x$

die hier in vielen Fällen nur umzukehren sind, zur Zurückleitung der ursprünglichen Functionen aus den einfachsten Differentialen dienen. So haben wir z. B. [§. 2., (2] gefunden, dafs das Differential einer algebraischen Summe erhalten wird, indem man das Differential eines jeden einzelnen Gliedes entwickelt; es wird also auch umgekehrt eine solche algebraische Summe von Differentialen integrirt, wenn man das Integral von jedem einzelnen Gliede nimmt, d. h. es folgt aus $d.(x+y-z+..) = dx+dy-dz+..$ umgekehrt: $x+y-z+... = \int(dx+dy-dz+...)$; folglich ist, wegen $x = \int dx$, $y = \int dy$ u. s. f.:

$$\int(dx+dy-dz+...) = x+y-z+... = \int dx + \int dy - \int dz + ...$$

Eben so folgt aus $d. AX = AdX$ wieder umgekehrt $AX = \int AdX$ oder wegen $AX = A\int dX$ auch:

$$\int AdX = A\int dX;$$

d. h. man kann die constanten Factoren eines zu integrirenden Differentialausdruckes immer gleich *vor* das Integralzeichen setzen.

15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = arc. sec. x = - arc. cosec. x$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = arc. sinv. x = - arc. cosv. x.$

Man könnte diese Fundamentalformeln, aus welchen, wie wir sehen werden, eine sehr grofse Anzahl anderer zusammengesetztere abgeleitet werden, leicht noch durch einige andere, als z. B.

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = l\left(\frac{x}{\sqrt{[1+x^2]}}\right), \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = l[x+\sqrt{(1+x^2)}],$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \int dx \cot. x = l \sin. x \text{ u. s. w.}$$

vermehren. Es scheint jedoch räthlicher zu seyn, sich nur auf die obigen einfachern und leicht zu behaltenden Formeln zu beschränken, und diese letztern selbst aus den erstern abzuleiten; weil man sonst leicht noch viel weiter gehen, und selbst die complicirtesten Integralformeln blofs hinstellen, und sich von ihrer Richtigkeit durch die Differentiation überzeugen könnte.

§. 106.

Aus $d.(ax^n + B) = nax^{n-1}dx$, wo B irgend eine constante Gröſse bezeichnet, folgt umgekehrt durch Integration: $ax^n + B = \int nax^{n-1}dx$, oder, wenn man $n - 1 = m$, also $n = m + 1$ und $na = A$, also $a = \frac{A}{n} = \frac{A}{m+1}$ setzt, auch:

$$\int Ax^m dx = A\frac{x^{m+1}}{m+1} + B;$$

d. h. das Integral eines Monoms wird gefunden, wenn man den Exponenten der Variablen um 1 vermehrt, diese dann durch ihren neuen Exponenten dividirt und ihr Differential wegläſst; eine Regel, welche auch unmittelbar aus der Umkehrung der Regel für das Differential eines Monoms [§. 3., 1)] folgt.

Anmerk. 1. Eine solche constante Gröſse, wie in der letzten Integralformel unter B erscheint, und sonst ganz willkürlich ist, indem für jeden Werth von B

$$d.\left(\frac{Ax^{m+1}}{m+1} + B\right) = Ax^m dx$$

wird, also der gegebene Differentialausdruck, zum Beweis der richtigen Integration, zum Vorschein kommt, muſs jedem Integeal, wenn es vollständig oder allgemein seyn soll, beigefügt werden. Man bezeichnet diese willkürliche Constante durchaus mit *Const.* (*Constans*), oder auch bloſs durch C; sie wird in besondern oder bestimmten Fällen aus der Natur des gerade vorliegenden Falles immer leicht bestimmt. Wäre z. B. aus der Natur der Aufgabe bekannt, daſs das vorige Integral für $x = a$ den Werth b annimmt; so benützt man diese Bedingung zur Bestimmung der Constante B; denn man hat dieser Bedingung gemäſs

$$b = A\frac{a^{m+1}}{m+1} + B, \text{ und daraus } B = b - A\frac{a^{m+1}}{m+1};$$

folglich ist das nun bestimmte oder besondere Integral

$$\int Ax^m dx = b + \frac{A}{m+1}(x^{m+1} - a^{m+1}),$$

welches in der That für $x = a$ gleich b wird.

Gewöhnlich oder häufig ist $b = 0$, d. i., man kennt in vielen Fällen jenen Werth der Variablen (z. B. $x = a$), für welchen das Integral verschwindet.

Anmerk. 2. Von dieser im gegenwärtigen Paragraphe abgeleiteten Regel, welche sonst für jeden const. Exponenten n gilt, ist der einzige Fall von $n = -1$ ausgeschlossen; denn in diesem Falle würde man nach dieser Regel haben: $\int x^{-1}\,dx = \frac{x^0}{0}$, was offenbar ungereimt wäre und zu nichts führen kann. Allein man weifs [§. 3., 3)], dafs $x^{-1}\,dx = \frac{dx}{x} = d.lx$, folglich $\int x^{-1}\,dx = \int d.lx = lx$ ist; und man kann, wie leicht zu sehen, dieses Integral nach der obigen Regel aus dem einfachen Grunde nicht finden, weil es nicht möglich ist, die transcendente Gröfse lx als eine einzige Potenz von x (also als algebraisches Monom) darzustellen.

§. 107.

Beispiele.

1. Es ist nach dieser entwickelten Regel:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

2. Eben so ist

$$\int \frac{3.dx}{x^7} = 3\int x^{-7}\,dx = \frac{3x^{-6}}{-6} + C = C - \frac{1}{2x^6}.$$

3. Es ist

$$\int (ax^m + bx^n - cx^p)\,dx = a\int x^m\,dx + b\int x^n\,dx - c\int x^p\,dx$$
$$= \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} - \frac{cx^{p+1}}{p+1} + C.$$

Anmerk. Es wird hier nur eine unbestimmte Constante hinzugefügt, weil die Summe der willkürlichen oder unbestimmten Constanten, die man dem Integral jedes einzelnen Monoms beifügen kann, selbst wieder unbestimmt ist und sofort durch eine einzige solche Constante ausgedrückt werden kann.

4. Auf gleiche Art ist für irrationale Monome *)

$$\int a\sqrt{x^3}\,dx = a\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \tfrac{2}{5}ax^{\frac{5}{2}} + C$$

oder $\int Ax^{\frac{p}{q}}\,dx = \frac{qA}{p+q}x^{\frac{p}{q}+1} + C.$

*) Da die Integration der irrationalen Monome von jener der rationalen Monome in Nichts verschieden ist, so können wir diese ohne weitere Rücksicht gleich hier mit behandeln.

5. Um das Integral $\int dx(1 - 2x + 3x^2)^2$ zu finden, wird man zuerst die angezeigte Potenz entwickeln, sodann die einzelnen Glieder mit dem Factor dx multipliciren, und endlich die entstehenden Monome nach der in Rede stehenden Regel integriren. Man erhält nämlich

$$\int dx(1 - 2x + 3x^2)^2$$
$$= \int dx(1 - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4)$$
$$= \int dx - 4\int x\,dx + 10\int x^2 dx - 12\int x^3 dx + 9\int x^4 dx$$
$$= x - 2x^2 + \frac{10x^3}{3} - 3x^4 + \frac{9x^5}{5} + C.$$

Anmerk. Auf dieselbe Art erhält man allgemein, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet, das Integral

$$\int dx(a + bx + cx^2 + \ldots)^n$$

6. Zur Bestimmung des Integrals $\int dx\,(a + bx)^m$ setze man, es mag m was immer für einen Werth haben, $a + bx = z$; so folgt daraus, wenn man differentiirt: $b\,dx = dz$ oder $dx = \frac{dz}{b}$; mithin ist

$$\int dx\,(a + bx)^m = \int \frac{dz}{b} z^m = \frac{1}{b}\int dz\,z^m = \frac{1}{b}\,\frac{z^{m+1}}{m+1} + C$$

und wenn man endlich den Werth von z in x wieder herstellt, auch

$$\int dx\,(a + bx)^m = \frac{(a + bx)^{m+1}}{b(m+1)} + C.$$

Anmerk. Diese Substitution wird hier, wie man leicht sieht, bei nur einiger Uebung entbehrlich.

7. Auf dem nämlichen Weg der Substitution wird man auch, es mögen die Exponenten n, m was immer für Werthe haben, das Integral $\int x^{n-1} dx\,(a + bx^n)^m$ bestimmen können, weil, von den constanten Factoren abgesehen, der Theil *vor* der Klammer, das Differential von jenem *innerhalb* der Klammer ist. Man setzt nämlich wieder

$$a + bx^n = z,$$

so folgt daraus

$$bnx^{n-1} dx = dz \text{ oder } x^{n-1} dx = \frac{dz}{bn};$$

also ist:

$$\int x^{n-1} dx\,(a + bx^n)^m = \int \frac{dz}{bn} z^m = \frac{z^{m+1}}{bn(m+1)} = \frac{(a + bx^n)^{m+1}}{bn(m+1)} + C,$$

wenn man nämlich nach vollendeter Integration für z wieder den vorigen Werth in x zurück substituirt.

8. Genau auf dieselbe Art findet man auch z. B.

$$\int dx(3a + 6bx + 9cx^2)\sqrt[3]{(ax + bx^2 + cx^3)}$$

und

$$\int dx(5x - 30x^3)\sqrt{\left(\frac{3}{x} - 6x\right)} = \int 5dx(1 - 6x^2)\sqrt{(3x - 6x^3)},$$

wenn man im erstern Beispiele (da wieder, nachdem man den gemeinschaftlichen Factor 3 herausgenommen hat, der Theil vor dem Wurzelausdruck das Differential von jenem untern Wurzelzeichen ist) $ax + bx^2 + cx^3$, und im letztern Beispiel (nach der schon ausgeführten Umwandlung) $3x - 6x^3$ gleich z setzt und wie vorhin verfährt.

Allgemein ist man also im Stande, auf diesem Wege das Integral

$$\int AX^m dX$$

zu bestimmen, weil dX das vollständige Differential von der Function X unterm Exponenten m ist.

b) Für *gebrochene* Functionen.

§. 108.

Bevor wir auf die allgemeinste Form der rationalen gebrochenen Differentialfunctionen übergehen, wollen wir einige einfachere Fälle behandeln.

1. Es sey $dy = \frac{AdX}{X}$; so ist [§. 105., Note, Form. 2)]

$$y = A\int\frac{dX}{X} = AlX + C = Al.Cx,$$

wenn man nämlich, was immer gestattet ist (da die Constante noch willkürlich und unbestimmt bleibt), statt C, lC schreibt:

ist also, von den constanten Factoren abgesehen, der *Zähler* der Bruchfunction das Differential des *Nenners;* so ist, bis auf die nöthigen beständigen Factoren, das gesuchte Integral der *natürliche Logarithme* des Nenners.

B e i s p i e l.

So ist für $dy = \frac{2x^4 dx}{a + bx^5}$:

$$y = 2\int \frac{x^4 dx}{a + bx^5} = \frac{2}{5b} l(a + bx^5) + C,$$

wozu man (wenigstens bis man einige Uebung besitzt) noch leichter gelangen kann, wenn man den Nenner $a + bx^5 = z$ setzt und diese Gleichung differentiirt; denn es folgt hieraus $5bx^4 dx = dz$ und $x^4 dx = \frac{dz}{5b}$, also:

$$2\int \frac{x^4 dx}{a + bx^5} = \frac{2}{5b}\int \frac{dz}{z} = \frac{2}{5b} lz = \frac{2}{5b} l(a + bx^5),$$

wenn man nämlich zuletzt wieder für z zurücksubstituirt.

2. Um die Gleichung

$$dy = \frac{Ax^n dx}{(a + bx)^m}.$$

zu integriren, setze man wieder $a + bx = z$; so wird

$$x = \frac{z - a}{b}, \quad dx = \frac{dz}{b} \quad \text{und} \quad x^n = \frac{(z - a)^n}{b^n},$$

folglich

$$dy = \frac{A(z - a)^n dz}{b^{n+1} z^m} \quad \text{und} \quad y = \frac{A}{b^{n+1}}\int \frac{dz\,(z - a)^n}{z^m}.$$

Ist nun n eine ganze positive Zahl, so wird man $(z - a)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln und jedes Glied durch z^m dividiren; dadurch erhält man eine endliche Reihe von Monomen, die man sofort integriren kann. Nach vollendeter Integration darf man nur noch den Werth von z in x herstellen, um das gesuchte Integral zu erhalten.

B e i s p i e l.

Es sey z. B. $n = 3$ und $m = 2$, also $dy = \frac{Ax^3 dx}{(a + bx)^2}$; so wird nach der vorgenommenen Substitution:

$$y = \frac{A}{b^4}\int \frac{dz}{z^2}(z - a)^3 = \frac{A}{b^4}\int \frac{dz}{z^2}(z^3 - 3az^2 + 3a^2 z - a^3)$$

$$= \frac{A}{b^4}\int (z\,dz - 3a\,dz + 3a^2 z^{-1} dz - a^3 z^{-2} dz)$$

$$= \frac{A}{b^4}\left(\frac{z^2}{2} - 3az + 3a^2 lz + \frac{a^3}{z}\right) + C,$$

mithin endlich

$$y = \frac{A}{b^4}\left[\tfrac{1}{2}(a + bx)^2 - 3a(a + bx) + 3a^2 l(a + bx) + \frac{a^3}{a + bx}\right] + C.$$

Anmerk. Für den einfachern Fall von $n = 0$ hat man

$$\int \frac{A\,dx}{(a + bx)^m} = \frac{A}{b}\int \frac{dz}{z^m} = \frac{A}{b} \cdot \frac{z^{-m+1}}{-m+1}$$
$$= \frac{A}{b} \cdot \frac{1}{(1 - m)(a + bx)^{m-1}} + C;$$

wie es auch die Regel für die Integration der Monome gibt.

3. Auf dieselbe Weise würde man mit der allgemeinern Formel

$$dy = \frac{Ax^n\,dx + Bx^p\,dx + Cx^q\,dx + \ldots}{(a + bx)^m}$$

verfahren; denn man würde erhalten:

$$y = \int \frac{Ax^n\,dx}{(a + bx)^m} + \int \frac{Bx^p\,dx}{(a + bx)^m} + \int \frac{Cx^q\,dx}{(a + bx)^m} + \ldots,$$

wobei jedes dieser Integrale nach der vorigen Nummer behandelt werden kann.

4. Um das Integral $\int \frac{dx}{a + bx^2}$ zu entwickeln, setze man in der Formel 14), §. 105. (Note), statt x, $x\sqrt{\frac{b}{a}}$, also statt dx, $dx\sqrt{\frac{b}{a}}$; so folgt daraus

$$\int \frac{dx\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 + \frac{b}{a}x^2} = arc.\,tang.\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C$$

oder $\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{(ab)}}\, arc.\,tang.\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C \ldots$ (m.

Anmerk. Diese Formel erhält eine imaginäre Form, wenn a und b verschiedene Zeichen besitzen; für diesen Fall wird weiter unten [§. 110., α)] eine andere Formel entwickelt werden.

§. 109.

Um nun auf die allgemeine Form der rationalen gebrochenen Differentialfunctionen überzugehen, kann man

$$X = \frac{\mathfrak{t}_1 x^{n-1} + \mathfrak{t}_2 x^{n-2} + \ldots + \mathfrak{t}_{n-1} x + \mathfrak{t}_n}{\mathfrak{T}_1 x^n + \mathfrak{T}_2 x^{n-1} + \ldots + \mathfrak{T}_n x + \mathfrak{T}_{n+1}}$$

annehmen, und also diese Function X als echt gebrochen voraussetzen; weil im entgegengesetzten Falle X durch eine vorläufige Division (Bd. I., §. 103.) in eine ganze Function X' und eine echt gebrochene X'' zerlegt werden kann, also das Integral

$$\int X dx \quad \text{in} \quad \int X' dx + \int X'' dx$$

zerfällt, wovon das erstere sofort unmittelbar nach den frühern Paragraphen entwickelt wird, und es sich sofort nur noch um die Integration des letztern Integrals $\int X'' dx$, wobei X'' eine echt gebrochene Function von x ist, handelt.

Dieses nun vorausgesetzt, besteht die allgemeine Methode für die Bestimmung des Integrals von $\int X dx$, wo X die obige Bruchfunction bedeutet, darin, dafs man diese Function nach Bd. I., Capitel 5, II. in Partialbrüche zerlegt; denn dadurch erhält man, wenn die obige Bruchfunction Kürze halber durch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ bezeichnet wird, die nachstehenden Fälle.

§. 110.

I. Wenn der Nenner $\psi(x)$ in lauter reelle ungleiche Factoren $a_1 + b_1 x$, $a_2 + b_2 x$, ... $a_n + b_n x$ zerlegt werden kann (Bd. I., §. 104.); in diesem Falle wird:

$$\int \frac{\varphi(x)\, dx}{\psi(x)} = \int \frac{A_1\, dx}{a_1 + b_1 x} + \int \frac{A_2\, dx}{a_2 + b_2 x} + \ldots + \int \frac{A_n\, dx}{a_n + b_n x},$$

folglich ist nach der Regel (1.) des vorigen Paragraphes, da bei jedem dieser Brüche der Zähler das Differential des Nenners ist (von den constanten Factoren abgesehen):

$$\int \frac{\varphi(x)\, dx}{\psi(x)} = \frac{A_1}{b_1} l(a_1 + b_1 x) + \frac{A_2}{b_2} l(a_2 + b_2 x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_n}{b_n} l(a_n + b_n x) + C.$$

Beispiel.

Um das Integral $\int \frac{dx}{1-x^2}$ zu bestimmen, hat man (Bd. I., §. 104., Beisp. 1.)

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)};$$

folglich ist

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x};$$

und wegen $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x)$ und $\int \frac{dx}{1-x} = -l(1-x)$ auch

$$p) \ldots \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}[l(1+x) - l(1-x)]$$

$$= \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C = \frac{1}{2} l\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C',$$

wo, wenn die Beziehung nothwendig wäre, $C' = C + \frac{1}{2} l(-1)$ ist.

Um dieser Integralformel, des künftigen Gebrauches wegen, sogleich eine allgemeinere Form zu geben, setze man wieder statt x: $x\sqrt{\frac{b}{a}}$, und also statt dx: $dx\sqrt{\frac{b}{a}}$; so erhält man daraus:

$$\int \frac{dx\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 - \frac{b}{a}x^2} = \frac{1}{2} l \left\{ \frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 - x\sqrt{\frac{b}{a}}} \right\} + C,$$

oder wenn man reducirt und beiderseits durch $\sqrt{(ab)}$ dividirt:

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{(ab)}}\, l\left(\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}\right) + C \ldots (\alpha.$$

§. 111.

II. Enthält der Nenner $\psi(x)$ auch einfache imaginäre, also reelle quadratische Factoren von der Form $(x-p)^2 + q^2$ (Bd. I., §. 105.); so kommen nebst den Integralen von der vorigen Form, auch noch solche vor, welche in der Form $\int \frac{(A+Bx)\,dx}{(x-p)^2+q^2}$ begriffen sind.

Um aber dieses letztere Integral zu bestimmen, setze

man $x - p = z$; so wird $x = p + z$ und $dx = dz$, folglich

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(x-p)^2 + q^2} = \int \frac{(A + Bp + Bz)\,dz}{z^2 + q^2} = \int \frac{(A' + Bz)\,dz}{z^2 + q^2},$$

wenn man nämlich noch $A + Bp = A'$ setzt.

Es ist aber

$$\int \frac{(A' + Bz)\,dz}{z^2 + q^2} = B\int \frac{z\,dz}{z^2 + q^2} + A' \int \frac{dz}{z^2 + q^2};$$

oder, wegen

$$\int \frac{z\,dz}{z^2 + q^2} = \tfrac{1}{2} l(z^2 + q^2) = l\sqrt{(z^2 + q^2)} \quad (\S.\ 108.,\ 1.)$$

und

$$\int \frac{dz}{q^2 + z^2} = \frac{1}{q}\, arc.\, tang. \left(\frac{z}{q}\right)$$

(§. 108., 4, wenn man dort $a = q^2$, $b = 1$ und $x = z$ setzt) auch

$$\int \frac{(A' + Bz)\,dz}{z^2 + q^2} = B\,l\sqrt{(z^2 + q^2)} + \frac{A'}{q} arc.\, tang. \left(\frac{z}{q}\right) + C.$$

Es ist daher endlich, wenn man wieder für A' und z die Werthe herstellt:

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(x-p)^2 + q^2} = B\,l\sqrt{[(x-p)^2 + q^2]}$$
$$+ \left(\frac{A + Bp}{q}\right) arc\ tang. \left(\frac{x-p}{q}\right) + C \ldots (\beta;$$

dabei ist der Nenner der zu integrirenden Bruchfunction auch

$$= (p^2 + q^2) - 2px + x^2.$$

Anmerk. Man kann diesem Integral auch noch andere Formen geben, wenn man berücksichtiget, dafs (Trigonom. S. 28, Form. 3.)

$$arc.\, tang. \frac{z}{q} = arc.\, sin. \frac{z}{\sqrt{(z^2 + q^2)}} = arc.\, cos \frac{q}{\sqrt{(z^2 + q^2)}} \text{ ist.}$$

Beispiel 1.

Es sey

$$dy = \frac{(2 - x^2)\,dx}{-5 + 9x - 5x^2 + x^3}, \text{ also } y = \int \frac{(2 - x^2)\,dx}{-5 + 9x - 5x^2 + x^3}.$$

Da nun (Bd. I., §. 105., Beisp.)

$$\frac{2 - x^2}{-5 + 9x - 5x^2 + x^3} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1 - 3x}{2(5 - 4x + x^2)}$$

ist, so folgt

$$y = \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + \tfrac{1}{2}\int\frac{(1-3x)\,dx}{5-4x+x^2}.$$

Nun ist (§. 108., 1.) $\int\frac{dx}{x-1} = l\,(x-1)$, und nach der vorigen Formel (β, wenn man in dieser $A=1$, $B=-3$, $p^2+q^2=5$, $2p=4$, also $p=2$ und $q=1$ setzt:

$$\int\frac{(1-3x)\,dx}{5-4x+x^2} = -3\,l\sqrt{(5-4x+x^2)} - 5\,arc.\,tang.\,(x-2);$$

folglich hat man endlich für das gesuchte Integral:

$$y = \tfrac{1}{2}[l\,(x-1) - 3\,l\sqrt{(5-4x+x^2)} \\ - 5\,arc.\,tang.\,(x-2)] + C.$$

Beispiel 2.

Um das Integral $\int\frac{dx}{x^3-a^3}$ zu finden, hat man, wegen $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, nach §. 105., Bd. I.:

$$\frac{1}{x^3-a^3} = \frac{1}{3a^2(x-a)} - \frac{2a+x}{3a^2(x^2+ax+a^2)};$$

folglich

$$\int\frac{dx}{x^3-a^3} = \frac{1}{3a^2}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{3a^2}\int\frac{(2a+x)\,dx}{x^2+ax+a^2}.$$

Nun ist $\int\frac{dx}{x-a} = l\,(x-a)$, und nach der obigen Formel (β, wenn man in dieser $A=2a$, $B=1$, $2p=-a$ und $p^2+q^2=a^2$, also $q^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$ setzt:

$$\int\frac{(2a+x)\,dx}{x^2+ax+a^2} = l\sqrt{(x^2+ax+a^2)} + \sqrt{3}\,.\,arc.\,tang.\left(\frac{a+2x}{a\sqrt{3}}\right);$$

folglich erhält man endlich für das gesuchte Integral:

$$\int\frac{dx}{x^3-a^3} = \frac{1}{3a^2}\left[l\left(\frac{x-a}{\sqrt{(x^2+ax+a^2)}}\right) \\ - \sqrt{3}\,.\,arc\ tang.\left(\frac{a+2x}{a\sqrt{3}}\right)\right] + C.$$

Auf demselben Wege findet man alle Integrale von der Form $\int\frac{dx}{x^n \mp a^n}$ oder auch $\int\frac{x^m\,dx}{x^n \mp a^n}$, wenn m und n ganze positive Exponenten bezeichnen. (Dabei wird man die §. §. 149. und 150. im ersten Bande berücksichtigen.)

§. 112.

III. Hat der Nenner $\psi(x)$ gleiche einfache Factoren, so kommt man (Bd. I., §. 106.) auf Integrale von der Form

$$\int \frac{A\,dx}{(a+bx)^m},$$

welche sofort nach der Regel der Monome (§. 106.) bestimmt werden. Es ist nämlich (§. 107., Beisp. 6.)

$$\int \frac{A\,dx}{(a+bx)^m} = \frac{A}{b(1-m)(a+bx)^{m-1}} + C.$$

Beispiel.

Um das Integral $\int \frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$ zu bestimmen, hat man, wenn dieser Bruch in Partialbrüche aufgelöst wird (Bd. I., §. 106., Anmerk., Beisp.)

$$\int \frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3} = \tfrac{9}{8}\int \frac{dx}{x+1} + \tfrac{1}{8}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x}$$
$$+ \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^3} + \tfrac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \tfrac{1}{4}\int \frac{(1+x)\,dx}{x^2+1}.$$

Werden diese einzelnen Integrale nach dem Vorhergehenden bestimmt, so erhält man der Reihe nach:

$$\tfrac{9}{8}l(x+1),\ \tfrac{1}{8}l(x-1),\ -lx,\ -\frac{1}{x},\ \frac{1}{2x^2},\ -\frac{1}{4(x+1)},$$
$$-\tfrac{1}{8}l(x^2+1) - \tfrac{1}{4}\,arc.\,tang.\,x.$$

Die Summe der algebraischen Glieder ist

$$= \frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)},$$

und jene der logarithmischen:

$$l(x+1) + \tfrac{1}{8}l(x+1) + \tfrac{1}{8}l(x-1) - \tfrac{1}{8}l(x^2+1) - lx$$
$$= l(x+1) + \tfrac{1}{8}l(x^2-1) - \tfrac{1}{8}l(x^2+1) - lx$$
$$= \tfrac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + l\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Es ist daher endlich:

$$\int \frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3} = \frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)} + \tfrac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$
$$+ l\left(\frac{x+1}{x}\right) - \tfrac{1}{4}\,arc.\,tang.\,x + C.$$

§. 113.

IV. Enthält endlich der Nenner $\psi(x)$ gleiche quadratische Factoren, so entstehen von daher Integralausdrücke von der Form

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{[(x-p)^2+q^2]^m},$$

und wenn man dieselbe Substitution wie in §. 111. vornimmt, so kommt man auf das Integral

$$\int \frac{(A'+Bz)\,dz}{(z^2+q^2)^m} = A'\int \frac{dz}{(z^2+q^2)^m} + B\int \frac{z\,dz}{(z^2+q^2)^m}.$$

Von diesen beiden Integralen wird das letztere wieder nach der Regel der Monome (§. 107., Beisp. 7.) gefunden; das erstere hingegen betreffend, so werden wir weiter unten [im §. 130., (C'')] eine Reductionsformel ableiten, mittelst welcher das Integral $\int \frac{dz}{(z^2+q^2)^m}$ auf jenes $\int \frac{dz}{(z^2+q^2)^{m-1}}$, dieses wieder auf $\int \frac{dz}{(z^2+q^2)^{m-2}}$, u. s. w. herabgebracht werden kann, bis man zuletzt, da hier m eine ganze positive Zahl ist, auf das Integral $\int \frac{dz}{z^2+q^2}$ kommt, welches sofort bekannt ist, und bereits im §. 108., 4. (oder auch im §. 111.) gefunden wurde.

§. 114.

1. Um die in der Anwendung sehr häufig vorkommenden Integrale von der Form

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

zu entwickeln, setze man in der Formel (*m* (§ 108., 4.) statt x, $c+x$; so wird, da dx dadurch ungeändert bleibt:

$$\int \frac{dx}{a+bc^2+2bcx+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{(ab)}}\, arc.\ tang.\, (c+x)\sqrt{\frac{b}{a}},$$

und wenn man in diesem Ausdrucke noch $a+bc^2=\alpha$, $2bc=\beta$ und $b=\gamma$ setzt, wodurch sofort $c=\frac{\beta}{2\gamma}$ und $a=\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma}=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}$, also $ab=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4}$ und $\frac{b}{a}=\frac{4\gamma^2}{4\alpha\gamma-\beta^2}$

wird; so erhält man

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{(4\alpha\gamma - \beta^2)}} \, arc. \, tang. \left(\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{(4\alpha\gamma - \beta^2)}} \right) + C \ldots (1.$$

2. Setzt man eben so in der Formel (α, §. 110., statt x, $c + x$; so geht $a - bx^2$ in $a - bc^2 - 2bcx - bx^2$, und dieser Ausdruck wieder in $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ über, wenn man $a - bc^2 = \alpha$, $-2bc = \beta$ und $-b = \gamma$ setzt, wodurch $b = -\gamma$, $c = \frac{\beta}{2\gamma}$ und $a = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\gamma}$, also $ab = \frac{1}{4}(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$ wird; man erhält demnach aus der genannten Formel die folgende:

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}} \, l \left[\frac{\sqrt{(4\alpha\gamma - \beta^2)} + (\beta + 2\gamma x)\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(4\alpha\gamma - \beta^2)} - (\beta + 2\gamma x)\sqrt{(-1)}} \right],$$

oder, wenn man im letzten Bruche Zähler und Nenner mit $\sqrt{(-1)}$ multiplicirt, auch:

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}} \, l \left[\frac{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)} - (\beta + 2\gamma x)}{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)} + (\beta + 2\gamma x)} \right] + C \ldots (1'.$$

In dieser Formel kann der Wurzelfactor $\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}$ positiv oder negativ genommen werden; denn man findet leicht, daſs im letztern Falle der zweite Theil der Gleichung, wenn man beachtet, daſs $-AlB = Al\left(\frac{1}{B}\right)$ ist, wieder auf die vorige Form zurückgeführt werden kann.

Anmerk. Um das in diesem Paragraphe entwickelte Integral $\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ immer in einer reellen Form zu erhalten, wird man sich der Formel (1 oder (1' bedienen, je nachdem $4\alpha\gamma >$ oder $< \beta^2$ ist.

Dagegen kann keine von beiden gebraucht werden, wenn $4\alpha\gamma = \beta^2$ ist, weil dann jede dieser beiden Formeln Unendlich wird; was sofort anzeigt, daſs in diesem Falle das gesuchte Integral weder durch Kreisbogen noch durch Logarithmen (weil es nämlich algebraisch wird) dargestellt wer-

den kann. In diesem Falle läfst sich aber das Integral ohnehin nach der Regel der Monome finden; denn es ist bei dieser Voraussetzung $\beta = 2\sqrt{(\alpha\gamma)}$ und $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \alpha + 2\sqrt{(\alpha\gamma)} \cdot x + \gamma x^2 = (\sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma})^2$, folglich (§. 107., 6.)

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma})^2} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}\,(\sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma})} + C.$$

§. 115.

Um eine Formel für das Integral $\int \frac{x\,dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ zu finden, setze man $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = X$; so wird

$$l(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = lX \text{ und } \frac{(\beta + 2\gamma x)\,dx}{X} = d.lX;$$

$$\text{also } \frac{2\gamma x\,dx}{X} = d.lX - \frac{\beta\,dx}{X}$$

$$\text{und } \frac{x\,dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{1}{2\gamma}\,d.lX - \frac{\beta}{2\gamma} \cdot \frac{dx}{X};$$

daher endlich:

$$\int \frac{x\,dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{1}{2\gamma}\,l(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \frac{\beta}{2\gamma} \int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} \ldots (a$$

in welcher Formel man für das letzte Integral seinen Werth aus den Formeln des vor. Paragraphes substituiren kann.

Anmerk: Es ist nun auch leicht, Differentialausdrücke von der Form

$$\frac{(A + Bx)\,dx}{a + bx + cx^2}$$

zu integriren.

B) Bestimmung des Integrals $\int X\,dx$, wenn X eine *irrationale* Function von x ist.

§. 116.

1. Um zuerst wieder einige Hauptformeln zu entwickeln, wollen wir mit der Bestimmung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)}}$ den Anfang machen.

Damit nun dieser Ausdruck rational werde, setze man

$$\sqrt{(1 + x^2)} = z - x \ldots (p;$$

so wird $1 + x^2 = z^2 - 2zx + x^2$, also

$$x = \frac{z^2 - 1}{2z}, \quad dx = \frac{(1+z^2)dz}{2z^2} \text{ und } z - x = \frac{1+z^2}{2z} = \sqrt{(1+x^2)};$$

es ist daher, wenn man diese Werthe substituirt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = \int \frac{dz}{z} = lz;$$

und wenn man für z wieder den Werth aus (p herstellt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = l[x + \sqrt{(1+x^2)}] + C \ldots (b.$$

2. Setzt man wieder, sowohl in dieser letztern, so wie auch in der Formel 13), §. 105. (Note), statt x, $x\sqrt{\frac{b}{a}}$, also statt dx, $dx\sqrt{\frac{b}{a}}$; so erhält man aus der zuerst genannten:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, l\left(\frac{x\sqrt{b} + \sqrt{[a+bx^2]}}{\sqrt{a}}\right) + C,$$

oder da man den constanten Theil $-\frac{1}{\sqrt{b}}\, l\sqrt{a}$ (wenn man den Logarithmus auflöst) zur noch unbestimmten Constante C nehmen kann, auch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, l[x\sqrt{b} + \sqrt{(a+bx^2)}] + C \ldots (c\ ^*);$$

und aus der zuletzt angeführten:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, arc.\, sin. \left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C \ldots (d.$$

§. 117.

1. Man setze in den beiden letzten Formeln (c und (d statt x, $c + x$; so erhält man aus der erstern, wenn man noch, wie im §. 114., $a + bc^2 = \alpha$, $2bc = \beta$, $b = \gamma$ setzt und das Glied $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\, l(2\sqrt{\gamma})$ zur Constante C schlägt, oder als in dieser schon enthalten sich vorstellt:

*) Wird nämlich die willkürliche Constante C dieser letztern Formel in ihrer Anwendung auf irgend eine Frage bestimmt, so findet man diese $= A - \frac{1}{\sqrt{b}}\, l\sqrt{a}$, wenn die der unmittelbar vorhergehenden Formel bei derselben Frage $= A$ gefunden wird, so, daſs also in beiden Fällen der Gesammtausdruck derselbe ist.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} l[(\beta + 2\gamma x + 2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}] + C \ldots (2,$$

und aus der letztern, wenn man $a - b c^2 = \alpha$, $-2 b c = \beta$ und $b = \gamma$ setzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x - \gamma x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} arc. sin. \left(\frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]}}\right) + C .. (2' \text{*}).$$

Anmerk. Da in diesen beiden letzten Formeln γ von Null verschieden seyn mufs, so kann man aus keiner derselben das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x)}}$ ableiten. Es ist jedoch in diesem Falle nach §. 107., 6., dieses Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x)}} = \int dx\, (\alpha + \beta x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\beta} \sqrt{(\alpha + \beta x)} + C \ldots (3$$

sofort bekannt und algebraisch, wefshalb es weder in (2 noch (2' enthalten seyn kann.

*) Wegen

$$arc. sin. \frac{z}{\sqrt{(z^2 + q^2)}} = arc. cos. \frac{q}{\sqrt{(z^2 + q^2)}} = arc. tang \frac{z}{q}$$

(s. §. 111., Anmerk.) kann man diesem Integral auch noch folgende Form geben:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x - \gamma x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} arc. cos. \left(\frac{2\sqrt{\gamma}\sqrt{[\alpha + \beta x - \gamma x^2]}}{\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]}}\right) + C .. (a$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} arc. tang \left(\frac{2\gamma x - \beta}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{[\alpha + \beta x - \gamma x^2]}}\right) + C .. (b$$

Endlich kann man auch noch, wegen

$$arc. tang. \left(\frac{2BC}{B^2 - C^2}\right) = 2\, arc. tang. \left(\frac{C}{B}\right)$$

(wenn man näml. von der Formel ausgeht: $tang. 2\alpha = \frac{2\, tang.\, \alpha}{1 - tang.^2 \alpha}$) diesen letztern Ausdruck [wenn man $2BC = 2\gamma x - \beta$ und $B^2 - C^2 = 2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha + \beta x - \gamma x^2)}$ setzt] in folgenden verwandeln:

$$\frac{2}{\sqrt{\gamma}} arc. tang. \left(\frac{\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]} - 2\sqrt{\gamma}\sqrt{[\alpha + \beta x - \gamma x^2]}}{\beta - 2\gamma x}\right) + C .. (c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\gamma}} arc. tang. \left(\frac{\beta - 2\gamma x}{\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]} + 2\sqrt{\gamma}\sqrt{[\alpha + \beta x - \gamma x^2]}}\right) + C .. (d.$$

2. Setzt man ferner in diesen beiden Formeln (2 und (2' statt x, $-\frac{1}{x}$, also statt dx, $\frac{dx}{x^2}$ und vertauscht zuletzt noch die Buchstaben γ, β, α mit α, $-\beta$, γ; so erhält man ganz einfach, beziehungsweise:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, l \left[\frac{2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} - (2\alpha + \beta x)}{x}\right] + C \ldots (4$$

und

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(-\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, arc.sin \left(\frac{\beta x - 2\alpha}{x\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]}}\right) + C \ldots (4' \,^*).$$

*) Dieses Integral nimmt auch noch folgende Formen an:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(-\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, arc.\,cos. \left(\frac{2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{[-\alpha + \beta x + \gamma x^2]}}{x\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]}}\right) + C \ldots (m;$$

wenn man nämlich nach der Formel (Trigon. S. 28, Form. 1) $arc.\,sin.\, x = arc.\,cos.\, \sqrt{(1 - x^2)}$ statt des Sinus den Cosinus hineinbringt.

$$= -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, arc.\,cos. \left(\frac{\beta x - 2\alpha}{x\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]}}\right) + C \ldots (n;$$

wenn man in der obigen Formel (4' nach der Relation: $arc.\,sin.\,\varphi = 90 - arc.\,cos.\,\varphi$ für den Sinus den Cosinus setzt und den beständigen Bogen $\frac{\pi}{2} = 90$ mit der unbestimmten Constante C verbindet.

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, arc.\,tang. \left(\frac{\beta x - 2\alpha}{2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{[-\alpha + \beta x + \gamma x^2]}}\right) + C \ldots (p;$$

nach der Relation $arc.\,sin. \left(\frac{C}{\sqrt{[B^2 + C^2]}}\right) = arc.\,tang \left(\frac{C}{B}\right)$.

$$= -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, arc.\,tang. \left(\frac{2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{[-\alpha + \beta x + \gamma x^2]}}{\beta x - 2\alpha}\right) + C \ldots (q;$$

wegen $arc.\,tang.\,\frac{C}{B} = 90 - arc.\,cot.\,\frac{C}{B} = 90 - arc.\,tang.\,\frac{B}{C}$ und wenn man den Theil 90^0 zur Constante C nimmt.

$$= -\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\, arc.\,tang. \left(\frac{2\alpha - \beta x + x\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]}}{2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{[-\alpha + \beta x + \gamma x^2]}}\right) + C \ldots (r;$$

wenn man nach der Relation

$$arc.\,tang. \left(\frac{2BC}{B^2 - C^2}\right) = 2\, arc.\,tang. \left(\frac{C}{B}\right)$$

Anmerk. 1. In diesen beiden letzten Formeln darf wieder nicht $\alpha = 0$ seyn, weil sie sonst beide Unendlich werden; zum Beweis, dafs das betreffende Integral sich weder logarithmisch noch durch Kreisfunctionen darstellen läfst. Und in der That, es ist in diesem Falle das Integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{(\beta x + \gamma x^2)}}$ zu bestimmen; und um dieses abzuleiten, wird man in der obigen Formel (3 ebenfalls x, α und β mit $-\frac{1}{x}$, γ und $-\beta$ verwechseln und dadurch erhalten:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(\beta x + \gamma x^2)}} = C - \frac{2}{\beta x}\sqrt{(\beta x + \gamma x^2)} \quad . \; . \; . \; (5$$

welches sofort algebraisch ist.

Anmerk. 2. Wie man sieht, gehören immer je zwei Formeln, deren eine das gesuchte Integral durch Logarithmen, die andere durch Kreisfunctionen ausdrückt, und von denen die eine immer reell ist, wenn die andere imaginär ausfällt, zusammen*).

zufolge der vorigen Formel $2BC = 2\sqrt{\alpha}\sqrt{(-\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ und $B^2 - C^2 = \beta x - 2\alpha$ setzt und entwickelt.

Auch erhält man die ersten Formeln unmittelbar aus jenen der vorigen Note, wenn man ebenfalls statt x, $-\frac{1}{x}$ setzt.

*) Der Zusammenhang der Kreisbogen und Logarithmen läfst sich gleich unmittelbar durch die Integralrechnung selbst nachweisen und einsehen.

Setzt man z. B. in der Formel (c des vorigen Paragraphes $a = 1$ und $b = -1$, so erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)}}\, l\,[x\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1 - x^2)}];$$

also dieses Integral in einer imaginären Form durch Logarithmen ausgedrückt. Diese Integralformel mit jener 13), §. 105 (Note) verglichen, liefert die Relation

$$arc.\,sin.\,x = \frac{1}{\sqrt{(-1)}}\, l\,[x\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1 - x^2)}],$$

oder für $x = sin.\,z$:

$$z = \frac{1}{\sqrt{(-1)}}\, l\,[cos.\,z + \sqrt{(-1)}\,sin.\,z]$$

[vergl. Bd. I., §. 144., Anmerk., Gl. (m)].

Eben so ist, wenn man in der Formel p), §. 110, statt x $x\sqrt{(-1)}$ setzt und gleich durch $\sqrt{(-1)}$ dividirt:

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}}\, l \left(\frac{1 + x\sqrt{[-1]}}{1 - x\sqrt{[-1]}}\right) + C,$$

§. 118.

Man sieht überhaupt eine irrationale Differentialformel für so gut als integrirt an, wenn es gelingt, diese durch passende Transformationen auf eine rationale Form, oder auch nur auf eine endliche Reihe rationaler Monome zu bringen; weil man in beiden Fällen die Integration nach den vorhergehenden Regeln ausführen oder bewerkstelligen kann. Dieser so wie die nächstfolgenden Paragraphen werden Beispiele von diesem Verfahren liefern.

Beispiele.

1) Um das Integral $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x-1}$ zu finden, setze man $x^{\frac{1}{2}} = z$; so folgt, wegen $x = z^2$ und $dx = 2z\,dz$:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x-1} = 2\int \frac{z^2\,dz}{z^2-1} = 2\int dz - 2\int \frac{dz}{1-z^2},$$

weil nämlich $\frac{z^2}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{z^2-1} = 1 - \frac{1}{1-z^2}$ ist.

folglich, wenn man diese Formel mit jener 14), §. 105., (Note) vergleicht:

$$arc.\,tang.\,x = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}}\, l\left(\frac{1+x\sqrt{[-1]}}{1-x\sqrt{[-1]}}\right),$$

oder auch, wenn man $x = tang.\,z$ setzt:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{[-1]}\,tang.\,z}{1-\sqrt{[-1]}\,tang.\,z}\right)$$

[vergl. Formel (*p* in §. 144., Anmerk., Bd. I.], wobei die willkürliche Constante wegfällt oder Null wird, weil für $z = 0$ auch $tang.\,z = 0$ ist, also die identische Gl. $0 = 0$ entstehen muſs.

Setzt man in der vorletzten Formel $x = \frac{C}{B}$, so erhält man auch noch:

$$arc.\,tang.\left(\frac{C}{B}\right) = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}}\, l\left[\frac{B+C\sqrt{(-1)}}{B-C\sqrt{(-1)}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(-1)}}\, l\left[\frac{[B+C\sqrt{(-1)}]^2}{B^2+C^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-1)}}\, l\left[\frac{B+C\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(B^2+C^2)}}\right]$$

$$= arc.\,sin.\,\frac{C}{\sqrt{(B^2+C^2)}} = arc.\,cos.\,\frac{B}{\sqrt{(B^2+C^2)}}.$$

Da ferner $\int dz = z$ und [§. 110., (p] $\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} l \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ ist, auch, wenn man für z wieder den Werth $x^{\frac{1}{2}}$ herstellt:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x-1} = 2x^{\frac{1}{2}} - l\left(\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\right) + C = 2\sqrt{x} + l\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) + C.$$

2) Um die Differentialgleichung

$$dt = \frac{ds}{(q-rs)\sqrt{(2\varphi s)}}$$

zu integriren, in welcher q, r, φ constante Gröſsen sind, setze man $s = y^2$; so wird $ds = 2y\,dy$ und

$$dt = \frac{2y\,dy}{(q-ry^2)y\sqrt{(2\varphi)}} = \frac{2}{\sqrt{(2\varphi)}} \cdot \frac{dy}{q-ry^2}$$

sofort rational. Nun ist nach der Formel (α, §. 110. (wenn man dort $a = q$, $b = r$ setzt):

$$\int \frac{dy}{q-ry^2} = \frac{1}{2\sqrt{(qr)}}\, l\left(\frac{\sqrt{q}+y\sqrt{r}}{\sqrt{q}-y\sqrt{r}}\right),$$

folglich, wenn man auch zugleich wieder für y den Werth $\sqrt{s}$ substituirt:

$$t = \frac{1}{\sqrt{(2qr\varphi)}}\, l\left(\frac{\sqrt{q}+\sqrt{[rs]}}{\sqrt{q}-\sqrt{[rs]}}\right) + C.$$

3) Um das Integral

$$\int \frac{(1-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx}{1-\sqrt{x}}$$

zu bestimmen, setze man, damit die irrationalen Monome rational werden,

$$x^{\frac{1}{6}} = z, \text{ also } x = z^6 \text{ und } dx = 6z^5 dz;$$

so wird

$$\frac{(1-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx}{1-\sqrt{x}} = \frac{6(1-z^3+z^4)z^5 dz}{1-z^3}$$
$$= 6dz\left(-z^6+z^5-z^3-1+\frac{1}{1-z^3}\right),$$

wenn man nämlich wirklich dividirt.

Es ist also das obige Integral

$$= 6\left(-\int z^6 dz + \int z^5 dz - \int z^3 dz - \int dz + \int \frac{dz}{1-z^3}\right),$$

wobei sich diese sämmtlichen Integrale nach den frühern Regeln bestimmen lassen; nach vollendeter Integration hat man nur noch für z seinen Werth $x^{\frac{1}{6}}$ zu setzen, um sofort das gesuchte Integral vollendet zu erhalten.

4) Um endlich noch das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1-x^2)}}$$

zu entwickeln, mache man zuerst den Nenner rational; so erhält man:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1-x^2)}} = \frac{dx\,[\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1-x^2)}]}{2x^2}$$

und es zerfällt sonach das obige gesuchte Integral in die beiden folgenden:

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{dx\sqrt{(1+x^2)}}{x^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx\sqrt{(1-x^2)}}{x^2}.$$

Um diese rational zu machen, setze man $\sqrt{(1+x^2)} = xz$, wo z eine neue noch unbestimmte Variable bezeichnet; so wird

$$1 + x^2 = x^2 z^2, \text{ also } x = \frac{1}{\sqrt{(z^2-1)}} \text{ und } dx = \frac{-z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}};$$

folglich

$$\frac{dx\sqrt{(1+x^2)}}{x^2} = \frac{-z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{z}{\sqrt{(z^2-1)}} \cdot (z^2-1) = \frac{-z^2\,dz}{z^2-1}.$$

Auf die nämliche Art wird, wenn man $\sqrt{(1-x^2)} = xw$ setzt,

$$\frac{dx\sqrt{(1-x^2)}}{x^2} = \frac{-w^2\,dw}{w^2+1};$$

es reducirt sich also das gesuchte Integral auf folgendes:

$$-\tfrac{1}{2}\int \frac{z^2\,dz}{z^2-1} - \tfrac{1}{2}\int \frac{w^2\,dw}{w^2+1}.$$

Nun ist aber, wegen

$$\frac{z^2\,dz}{z^2-1} = dz + \frac{dz}{z^2-1} \text{ und } \frac{w^2\,dw}{w^2+1} = dw - \frac{dw}{w^2+1}$$

[nach Form. p), §. 110. und Form. 14), §. 105., Note]:

$$\int \frac{z^2\,dz}{z^2-1} = z - \tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = z + \tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

und $\int \frac{w^2 dw}{w^2 + 1} = w - arc.tang. w$;

folglich das gesuchte Integral, wenn man für z und w die Werthe in x wieder herstellt:

$$= -\tfrac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x} + \tfrac{1}{2} l\left(\frac{\sqrt{[1+x^2]} - x}{\sqrt{[1+x^2]} + x}\right) + \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} - arc.tang. \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right],$$

oder endlich, wegen

$$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{\sqrt{[1+x^2]} - x}{\sqrt{[1+x^2]} + x}\right) = \tfrac{1}{2} l[\sqrt{(1+x^2)} - x]^2 =$$

$$l[\sqrt{(1+x^2)} - x] = - l[\sqrt{(1+x^2)} + x]$$

auch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)} - \sqrt{(1-x^2)}} = - \frac{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1-x^2)}}{2x}$$

$$+ \tfrac{1}{2} l[\sqrt{(1+x^2)} + x] + \tfrac{1}{2} arc.tang. \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} + C.$$

Anmerk. Wegen $arc.tang. a = arc.cot. \frac{1}{a} = 90 - arc.tang. \frac{1}{a}$ kann man, wenn man die constante Gröfse 90 zur Constante C schlägt, für den letzten Theil dieses Integrals auch schreiben:

$$- \tfrac{1}{2} arc.tang. \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

§. 119.

Enthält die Function X keine andere Irrationalgröfse, als jene $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$, so erscheint X immer unter einer der beiden Formen

$$X' \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} \text{ oder } \frac{X'}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}},$$

wo X' eine rationale Function von x bezeichnet; und es kann der irrationale Differentialausdruck $X dx$ durch eine der nachstehenden Transformationen rational gemacht werden.

1. Man setze $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = z + x\sqrt{\gamma}$, so entsteht, wenn man quadrirt:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = z^2 + 2zx\sqrt{\gamma} + \gamma x^2,$$

und daraus, wenn man Kürze halber $\sqrt{\gamma} = c$ setzt:

$$x = \frac{a - z^2}{2cz - \beta},\ dx = \frac{-2(cz^2 - \beta z + \alpha c)\,dz}{(2cz - \beta)^2}$$

und $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = z + cx = \dfrac{cz^2 - \beta z + \alpha c}{2cz - \beta}$;

also $dx\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = \dfrac{-2(cz^2 - \beta z + \alpha c)^2\,dz}{(2cz - \beta)^3}$

und $\dfrac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} = \dfrac{-2\,dz}{2cz - \beta}$.

Substituirt man nun auch noch in die rationale Function X' für x den vorigen Werth in z ausgedrückt, so ist offenbar das Integral $\int X dx$ auf eine rationale Form gebracht, nach deren Bestimmung man wieder für z den Werth

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} - x\sqrt{\gamma}$$

in x herstellen, und auch $c = \sqrt{\gamma}$ setzen wird.

2. Setzt man eben so $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = \sqrt{\alpha} + zx$, so wird $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \alpha + 2xz\sqrt{\alpha} + z^2x^2$, oder $\beta + \gamma x = 2z\sqrt{\alpha} + z^2 x$; und daraus, wenn man noch $\sqrt{\alpha} = a$ setzt:

$$x = \frac{\beta - 2az}{z^2 - \gamma},\ dx = \frac{2(az^2 - \beta z + a\gamma)\,dz}{(z^2 - \gamma)^2}$$

und $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = a + zx = \dfrac{-(az^2 - \beta z + a\gamma)}{z^2 - \gamma}$.

Werden diese Werthe in Xdx für x, dx und $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ substituirt und der entstehende rationale Differentialausdruck integrirt; so hat man dann nur noch für a und z die Werthe $\sqrt{\alpha}$ und $\dfrac{-\sqrt{\alpha} + \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}{x}$ zurück zu substituiren, um sofort das irrationale Integral $\int X dx$ gefunden zu haben.

3. Zerlegt man das Trinom $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ in seine einfachen Factoren (Bd. I, §. 27.), so wird

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = (a + x)(b + x)\gamma,$$

wenn man Kürze halber

$$\frac{\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\gamma} = a \text{ und } \frac{\beta - \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\gamma} = b$$

setzt.

Um nun $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ rational zu machen, setze man

$$(a + x)(b + x) = (a + x)^2 z^2 \ldots (m,$$

also

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = (a + x) z \sqrt{\gamma} \ldots (n;$$

so folgt aus $(m$:

$$x = \frac{b - a z^2}{z^2 - 1}, \text{ also } dx = \frac{2(a - b) z\, dz}{(z^2 - 1)^2},$$

und wenn man diesen Werth von x in $(n$ substituirt:

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = \frac{-(a - b) z}{z^2 - 1} \sqrt{\gamma}.$$

Nachdem also diese Werthe in $X dx$ gehörig substituirt und die entstehende rationale Differentialformel integrirt worden ist, setzt man wieder für z den aus $(m$ folgenden Werth $z = \frac{\sqrt{(b + x)}}{\sqrt{(a + x)}}$ und auch für a und b die oben stehenden Werthe zurück.

Anmerk. Obschon noch andere Transformationen zum Ziele führen, so sind dennoch die hier angeführten die Wesentlichsten und Einfachsten.

Der dabei vorkommenden Factoren $\sqrt{\gamma}$ und $\sqrt{\alpha}$ wegen, wird man, wenn in dem angenommenen irrationalen Trinom γ negativ ist, die in 2., und wenn α negativ ist, die in 1. oder 3. angegebene Transformation anwenden. Auch ist klar, dafs man seinen Zweck durch diese Umwandlungen immer noch erreichen wird, wenn statt $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ jede andere Potenz von dieser Wurzelgröfse in X vorkommen sollte.

Zur weitern Erläuterung wollen wir im nächsten Paragraphe einige solche irrationale Differentialausdrücke wirklich integriren.

§. 120.

Beispiele.

1) Um das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$$

zu finden, hat man nach 1. des vorigen Paragraphes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}} = -2 \int \frac{dz}{2cz - \beta} = -\frac{1}{c} l(2cz - \beta)$$

und wenn man für c und z (wie es dort angegeben) die Werthe $\sqrt{\gamma}$ und $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} - x\sqrt{\gamma}$ zurücksetzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} l[2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} - (2\gamma x + \beta)] + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} l[\beta + 2\gamma x + 2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}] + C' \text{ *)}.$$

Anmerk. Für negative Werthe von γ wird diese Formel imaginär; es läfst sich aber (m. s. §. 117., Anmerk. 2) der imaginäre Logarithmus dann durch reelle Kreisfunctionen ausdrücken. Es wird nämlich, wenn man der Kürze wegen $\sqrt{(\alpha + \beta x - \gamma x^2)} = X$ setzt:

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{(-1)}\sqrt{\gamma}} l[\beta - 2\gamma x + 2\sqrt{(-1)}\sqrt{\gamma} X] + C'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-1)}\sqrt{\gamma}} l\left[\frac{2\sqrt{\gamma} X - (\beta - 2\gamma x)\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}\right] + C'';$$

dabei hat nur C'' einen von C' verschiedenen constanten Werth

$$\left\{C'' = C' + \frac{1}{\sqrt{(-1)}\sqrt{\gamma}} l\left(\frac{\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]}}{-\sqrt{[-1]}}\right)\right\}$$

und es ist leicht zu sehen, dafs dieser letztere Ausdruck die Form $\frac{1}{\sqrt{(-1)}\sqrt{\gamma}} l\left(\frac{B + C\sqrt{[-1]}}{\sqrt{[B^2 + C^2]}}\right)$ erhält, wenn man

$$2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha + \beta x - \gamma x^2)} = B \quad \text{und} \quad 2\gamma x - \beta = C$$

setzt.

Es ist daher endlich wegen

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)}\sqrt{\gamma}} l\left(\frac{B + C\sqrt{[-1]}}{\sqrt{[B^2 + C^2]}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \, arc. sin. \frac{C}{\sqrt{[B^2 + G^2]}}$$

(m. s. die letzte Formel in der Note auf S. 315) auch

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \, arc. sin. \left(\frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{[4\alpha\gamma + \beta^2]}}\right) + C \text{ (wie in 2', §. 117.)}.$$

Und so könnten wir, so lange die unbestimmte Constante damit verbunden ist, dieser Formel noch die verschiedensten

*) In dieser Formel, welche genau mit jener (2, §. 117., übereinstimmt, hat blofs die unbestimmte Constante C' einen andern Werth, als jene C in der unmittelbar verhergehenden; es ist nämlich $C' = C - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} l(4\alpha\gamma - \beta^2)$. Solche Aenderungen in der unbestimmten Constante sind also offenbar erlaubt und werden zur Vereinfachung der Integralformeln häufig vorgenommen, ohne dafs diese jedesmal [wie hier und z. B. in §. 116., 2., und §. 117., (4'] ausdrücklich erwähnt werden.

Formen geben, die aber blofs in den constanten Theilen abweichen, also eigentlich nur in den unbestimmten Constanten verschieden sind und durch Differentiation das nämliche Resultat geben.

Ueberhaupt wollen wir hier Ein- für allemal bemerken, dafs zwei scheinbar verschiedene Formeln des nämlichen Integrals, die also einerlei Differential besitzen, nur um eine beständige Gröfse, die man sofort mit der willkürlichen Constante verbunden sich vorstellen kann, verschieden seyn können; denn sind U und V zwei Functionen von der Beschaffenheit, dafs $dU = dV$, also $dU - dV = 0$, d. i. $d.(U - V) = 0$ ist; so mufs nothwendig, wenn man integrirt, $U - V = \text{Const.}$ seyn.

2) Nach 1. des vorigen Paragraphes ist

$$\int dx \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)} = -2\int \frac{(\alpha c - \beta z + c z^2)^2 dz}{(2cz - \beta)^3},$$

folglich könnte dieses Integral wieder nach dem Vorhergehenden gefunden werden; allein weit einfacher werden wir dasselbe mit Hilfe einer weiter unten zu entwickelnden Reductionsformel [§. 136, (a)] bestimmen, indem wir dieses von dem vorhin bereits gefundenen Integral $\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ abhängig machen werden.

3) Um die Differentialgleichung

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax + x^2)}} \; ^{*)}$$

zu integriren, hat man zuerst $y = a\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$.

Man kann diese irrationale Differentialformel unmittelbar und ganz einfach rational machen, wenn man

$$\sqrt{(2ax + x^2)} = zx$$

setzt; denn daraus wird

$$x = \frac{2a}{z^2 - 1},\; dx = \frac{-4az\,dz}{(z^2 - 1)^2} \text{ und } zx = \frac{2az}{z^2 - 1}$$

und daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax + x^2)}} = -2\int \frac{dz}{z^2 - 1} = 2\int \frac{dz}{1 - z^2} = l\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

*) Die Differentialgleichung der Kettenlinie [§. 213., B)].

[p), §. 110.]; also wenn man den Werth von z wieder herstellt:

$$y = a\,l\left(\frac{x + \sqrt{[2ax + x^2]}}{x - \sqrt{[2ax + x^2]}}\right) + C = a\,l\left(\frac{a + x + \sqrt{[2ax + x^2]}}{-a}\right) + C.$$

Ist nun z. B. aus der Natur der Sache bekannt (wie es hier wirklich der Fall ist), daſs für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn muſs; so hat man zur Bestimmung der Constante C die Bedingungsgleichung:

$$0 = a\,l(-1) + C, \text{ und daraus } C = -a\,l(-1).$$

Wird daher dieser Werth für C substituirt, so hat man endlich das vollkommen bestimmte Integral:

$$y = a\,l\left(\frac{a + x + \sqrt{[2ax + x^2]}}{a}\right).$$

Anmerk. Wir haben hier bloſs zur Uebung dieses Integral von vorne herein entwickelt; schneller gelangt man zu dem Resultate, wenn man sich der schon oben im §. 117. entwickelten Formel (2 bedient, und darin $\alpha = 0$, $\beta = 2a$ und $\gamma = 1$ setzt. Man erhält nämlich dadurch unmittelbar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax + x^2)}} = l[2a + 2x + 2\sqrt{(2ax + x^2)}] + C;$$

und da der obigen Bedingung gemäſs, dieses Integral für $x = 0$ verschwinden soll, so hat man $0 = l(2a) + C$, also $C = -l(2a)$ und daher wie zuvor:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax + x^2)}} = l\left(\frac{a + x + \sqrt{[2ax + x^2]}}{a}\right).$$

§. 121.

Enthält die Function X bloſs den irrationalen Bruch

$$\left(\frac{a + bx}{a' + b'x}\right)^{\frac{p}{q}},$$

ist nämlich

$$Xdx = X'dx\left(\frac{a + bx}{a' + b'x}\right)^{\frac{p}{q}},$$

wobei X' eine rationale Function von x bezeichnet; so kann diese irrationale Differentialformel auf folgende Weise rational gemacht werden:

Man setze

$$\frac{a+bx}{a'+b'x}=z^q,\ \text{also}\ \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{p}{q}}=z^p\ \ldots\ (\alpha;$$

so folgt aus der ersten Gleichung

$$x=\frac{a-a'z^q}{b'z^q-b}\ \text{und daraus}\ dx=\frac{q(ba'-ab')z^{q-1}dz}{(b'z^q-b)^2}.$$

Wird demnach in X' für x dieser Werth gesetzt, so ist, da zugleich auch

$$dx\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{p}{q}}=\frac{q(ba'-a'b)z^{p+q-1}dz}{(b'z^q-b)^2}$$

rational ausfällt, das gegebene Integral $\int X dx$ sofort auf ein rationales gebracht, nach dessen Entwicklung nur noch für z der Werth $z=\sqrt[q]{\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)}$ zurücksubstituirt werden darf, um das erstere entwickelt zu haben.

Anmerk. Ist

$$X dx = X'\frac{dx}{x}\left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}}$$

wobei X' eine rationale Function von x seyn soll, welche nur ganze Potenzen von x^n enthält; so wird man $x^n=y$ setzen, wodurch $n\,lx=ly$ und $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{ny}$, also $X'\frac{dx}{x}=Y dy$, wo Y eine rationale Function von y ist, und

$$\left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}}=\left(\frac{a+by}{a'+b'y}\right)^{\frac{p}{q}}$$

wird, also sofort wieder der vorige Fall Statt findet.

Zweites Capitel.

Von der Integration der *binomischen* Differentialformeln $x^n dx(a+bx^m)^p$.

§. 122.

Die häufig vorkommenden Differentialausdrücke von der Form $x^n dx(a+bx^m)^p$, wobei die Exponenten n, m, p beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen seyn können, und von denen wir bereits einzelne Fälle im vorhergehenden Capitel betrachtet haben, verdienen eine besondere und nähere Erörterung.

Aufser den beiden im §. 107. (5. und 7.) angeführten Fällen, in welchen nämlich entweder p eine ganze positive Zahl, oder $x^n dx$ das Differential von x^m ist, gibt es noch zwei Fälle, in welchen das Integral des obigen Differentialausdruckes durch eine einfache Substitution gefunden werden kann. Setzt man nämlich

1. $a+bx^m=z$, so folgt

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$dx=\frac{1}{m}\frac{dz}{b}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1} \quad \text{und} \quad x^n=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{n}{m}};$$

mithin, wenn man diese Werthe substituirt, auch:

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p=\frac{1}{mb^{\frac{n+1}{m}}}\int z^p dz(z-a)^{\frac{n+1}{m}-1};$$

daraus folgt, dafs sich die angezeigte Integration (nach §. 107., 5.) wirklich ausführen läfst, wenn $\frac{n+1}{m}$ eine *ganze positive* (von Null verschiedene) Zahl ist.

Anmerk. In dieser Regel ist sofort der im Beispiele 7., §. 107. angeführte Fall, als ein specieller, mit begriffen; denn da

dort $n = m - 1$ ist, so wird $\frac{n+1}{m} = \frac{m}{m} = 1$; nämlich eine ganze positive Zahl, und zwar die möglich kleinste.

Nimmt man dagegen

2. aus dem Binom zuerst x^m als Factor heraus, so wird auch

$$x^n\,dx\,(a + b x^m)^p = x^{n+mp}\,dx\,(a x^{-m} + b)^p.$$

Setzt man jetzt wieder das Binom $a x^{-m} + b = z$, so wird

$$x = \left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{1}{m}},$$

$$dx = -\frac{1}{m}\,\frac{dz}{a}\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{1}{m}-1} \quad \text{und} \quad x^{n+mp} = \left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{n}{m}-p}$$

folglich

$$\int x^n\,dx\,(a + b x^m)^p =$$
$$\int x^{n+mp}\,dx\,(a x^{-m} + b)^p =$$
$$= \frac{1}{m a^{-\left(\frac{n+1}{m}+p\right)}} \int z^p\,dz\,(z-b)^{-\left(\frac{n+1}{m}+p\right)-1};$$

ist daher $-\left(\frac{n+1}{m} + p\right)$ eine ganze positive Zahl, wodurch sofort auch der Exponent von $(z-b)$ eine solche Zahl wird; so kann das Integral wieder genau (nach 5., §. 107.) entwickelt werden.

Zur Erläuterung dieser beiden Methoden dienen folgende Beispiele.

§. 123.

Beispiele.

1) Für das Integral $\int x^3\,dx \sqrt{(1 - x^2)}$ ist $n = 3$, $m = 2$ und $p = \frac{1}{2}$; folglich $\frac{n+1}{m} = \frac{4}{2} = 2$ eine ganze positive Zahl. Man setze also, da sich dieses Integral nach der ersten Methode des vorigen Paragraphes entwickeln läſst, $1 - x^2 = z$; so wird

$$x = (1 - z)^{\frac{1}{2}},$$

$$dx = -\tfrac{1}{2}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz \quad \text{und} \quad x^3 = (1-z)^{\frac{3}{2}};$$

folglich

$$\begin{aligned}\int x^3 dx \sqrt{(1-x^2)} &= -\tfrac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}} dz (1-z) \\ &= -\tfrac{1}{2}\int dz (z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{3}{2}}) \\ &= -\tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}) + C;\end{aligned}$$

oder, wenn man für z den Werth $1-x^2$ wieder herstellt:

$$\int x^3 dx \sqrt{(1-x^2)} = C - \tfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + \tfrac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}.$$

2) Zur Beurtheilung, ob sich das Integral

$$\int \frac{dx}{x^3(1+x^2)^2}$$

auf einem der angegebenen Wege finden lasse, hat man

$$\frac{dx}{x^3(1+x^2)^2} = x^{-3}dx(1+x^2)^{-2},$$

also $n=-3$, $m=2$ und $p=-2$; folglich

$$\frac{n+1}{m} = \frac{-2}{2} = -1$$

keine positive ganze Zahl, daher kann dieses Integral nicht nach der unter 1. des vorigen Paragraphes angegebenen Methode gefunden werden. Dagegen ist

$$-\left(\frac{n+1}{m}+p\right) = -(-1-2) = +3$$

eine ganze positive Zahl; folglich kann die Integration nach 2. des vorigen Paragraphes ausgeführt werden.

Es ist nämlich, wenn man zuerst die hier nöthige Vorbereitung trifft und x^2 als Factor aus dem Binom herausnimmt:

$$x^{-3}dx(1+x^2)^{-2} = x^{-7}dx(x^{-2}+1)^{-2};$$

mithin für $x^{-2}+1=z$:

$$x=(z-1)^{-\frac{1}{2}}, \; dx = -\tfrac{1}{2}(z-1)^{-\frac{3}{2}}dz \text{ und } x^{-7}=(z-1)^{\frac{7}{2}}$$

Daher weiters:

$$\begin{aligned}\int x^{-7}dx(x^{-2}+1)^{-2} &= -\tfrac{1}{2}\int z^{-2}dz(z-1)^2 \\ &= -\tfrac{1}{2}\int dz(1-2z^{-1}+z^{-2}) \\ &= -\tfrac{1}{2}(z-2lz-z^{-1}) + C;\end{aligned}$$

und endlich, wenn man für z den Werth in x wieder her-

stellt:

$$\int \frac{dx}{x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\tfrac{1}{2}\left[(1+x^{-2}) - 2l(1+x^{-2}) - \frac{1}{1+x^{-2}}\right] + C.$$

3) Für das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt[5]{(2 - 3x^{\frac{1}{4}})} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx (2 - 3x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{5}}$$

ist $n = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{4}$ und $p = \frac{1}{5}$; folglich $\frac{n+1}{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 2$ eine ganze positive Zahl. Man setze also $2 - 3x^{\frac{1}{4}} = z$; so wird

$$x = \left(\frac{2-z}{3}\right)^4,$$

$$dx = -4\left(\frac{2-z}{3}\right)^3 \frac{dz}{3} \quad \text{und} \quad x^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2-z}{3}\right)^{-2};$$

also

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx (2 - 3x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{5}} =$$
$$-\tfrac{4}{9}\int z^{\frac{1}{5}} dz (2 - z) =$$
$$-\tfrac{4}{9}\int dz (2z^{\frac{1}{5}} - z^{\frac{6}{5}}) =$$
$$C - \tfrac{4}{9}(\tfrac{5}{3}z^{\frac{6}{5}} - \tfrac{5}{11}z^{\frac{11}{5}}) =$$
$$\tfrac{20}{9}\left[\tfrac{1}{11}(2 - 3x^{\frac{1}{4}})^{\frac{11}{5}} - \tfrac{1}{3}(2 - 3x^{\frac{1}{4}})^{\frac{6}{5}}\right] + C.$$

Reductionsformeln für das Integral $\int x^n dx (a + bx^m)^p$.

§. 124.

Obschon wir jetzt in vielen Fällen das Integral $\int x^n dx (a + bx^m)^p$ bestimmen können, so gibt es dennoch bei weitem mehr Fälle, in welchen keine der hiezu angeführten Methoden unmittelbar brauchbar ist, und in welchen die Integration nur in so ferne gelingt, als es möglich ist, das gegebene oder zu suchende Integral von einem andern, bereits bekannten, abhängig zu machen. Dieses geschieht nun durch die sogenannten Reductionsformeln, von denen wir sofort die vorzüglichsten entwickeln wollen.

Eine Haupt-Reductionsformel, die wir in der Folge

häufig anwenden werden, um die Integration eines gegebenen Differentialausdrucks auf die eines einfachern oder leichter auszuführenden zurückzuleiten, und welches Verfahren das **theilweise Integriren** genannt wird, erhält man auf folgende Art:

Es ist $d.uv = udv + vdu$; mithin, wenn man integrirt: $uv = \int udv + \int vdu$, und daraus die erwähnte Formel

$$\int udv = uv - \int vdu \ldots (\alpha.$$

§. 125.

Um nun diese Formel sogleich auf das in Rede stehende Integral $\int x^n dx (a + bx^m)^p$, in welchem wir Kürze halber für die folgenden Entwickelungen $a + bx^m = X$ setzen wollen, anzuwenden, setze man

$$dv = x^n dx \quad \text{und} \quad u = (a + bx^m)^p;$$

so wird

$$v = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ und } du = bmp(a + bx^m)^{p-1} x^{m-1} dx;$$

also nach Formel (α:

$$\int x^n dx X^p = \frac{x^{n+1} X^p}{n+1} - \frac{bmp}{n+1} \int x^{n+m} dx X^{p-1} \ldots (A.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung das Integral des zweiten Theiles, so erhält man

$$\int x^{n+m} dx X^{p-1} = \frac{x^{n+1} X^p}{bmp} - \frac{n+1}{bmp} \int x^n dx X^p,$$

und wenn man in diesem letztern Ausdruck statt n und p beziehungsweise $n - m$ und $p + 1$ schreibt, wodurch

$$X = a + bx^m$$

selbst ungeändert bleibt:

$$\int x^n dx X^p = \frac{x^{n-m+1} X^{p+1}}{bm(p+1)} - \frac{n-m+1}{bm(p+1)} \int x^{n-m} dx X^{p+1} \ldots (A'.$$

Von diesen beiden Reductionsformeln (A und (A' dienet die erstere, den Exponenten von X, d. i. des Binoms $a + bx^m$, nach und nach um 1, 2, 3, ... Einheiten zu **vermindern**; denn setzt man in dieser statt n und p,

$n+m$ und $p-1$, um nämlich das zweite in dieser Formel vorkommende Integral selbst wieder herabzubringen; so erhält man

$$\int x^{n+m}\,dx\,X^{p-1} = \frac{x^{n+m+1}\,X^{p-1}}{n+m+1} - \frac{b\,m\,(p-1)}{n+m+1}\int x^{n+2m}\,dx\,X^{p-2},$$

und wenn man diesen Werth in (*A* substituirt, auch

$$\int x^n\,dx\,X^p = \frac{x^{n+1}\,X^p}{n+1} - \frac{b\,m\,p\,x^{n+m+1}\,X^{p-1}}{(n+1)(n+m+1)}$$
$$+ \frac{b^2\,m^2\,p\,(p-1)}{(n+1)(n+m+1)}\int x^{n+2m}\,dx\,X^{p-2},$$

so, daſs sofort das ursprüngliche Integral nach zwei Substitutionen von einem Integral abhängt, in welchem der Exponent von X bereits um zwei Einheiten vermindert ist.

Setzt man ferner in (*A* statt n und p: $n+2m$ und $p-2$; so wird wieder das letzte Integral der vorigen Formel, also auch, wenn man den resultirenden Werth zurück setzt, das gegebene Integral, von einem andern abhängig, in welchem X den Exponenten $p-3$ besitzt. Und so findet man allgemein, wenn man diese Substitutionen fortsetzt [also in (*A* nach und nach für n und p: $n+m$, $p-1$; $n+2m$, $p-2$; $n+3m$, $p-3$ u. s. w. schreibt] und den Werth aus der letzten Gleichung immer in die unmittelbar vorhergehende setzt, nach r solcher Substitutionen oder Reductionen die Formel:

$$\int x^n\,dx\,X^p = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big[X^p - \frac{b\,m\,p\,x^m\,X^{p-1}}{n+m+1}$$
$$+ \frac{b^2 m^2 p(p-1)\,x^{2m}\,X^{p-2}}{(n+m+1)(n+2m+1)} - \frac{b^3\,m^3\,p\,(p-1)(p-2)\,x^{3m}\,X^{p-3}}{(n+m+1)(n+2m+1)(n+3m+1)} + \ldots$$
$$+ \frac{(-b\,m)^{r-1}\,p\,(p-1)\ldots(p-r+2)\,x^{(r-1)m}\,X^{p-r+1}}{(n+m+1)(n+2m+1)\ldots[n+(r-1)\,m+1]}\Big]$$
$$+ \frac{(-b\,m)^r\,p\,(p-1)\ldots(p-r+1)}{(n+1)(n+m+1)(n+2m+1)\ldots[n+(r-1)m+1]}\int x^{n+rm}dx\,X^{p-r}. \quad \text{I.}$$

Dabei steht X für $a+b\,x^m$.

Wir wollen den Gebrauch dieser Reductionsformel I. gleich an einem Beispiele nachweisen.

§. 126.

Beispiel.

Betrachtet man das Integral $\int x^{-6}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$, so zeigt sich, daſs dieses nach keiner der in §. 122. angeführten und erwähnten Methoden zu bestimmen ist, daſs aber, wenn man die Grundformel (*A* (des vorigen Paragraphes) drei Mal hinter einander anwendet, oder, was kürzer ist, in der Reductionsformel I. $r=3$ setzt, das Binom $1-x^2$ den Exponenten $\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{2}$, und wegen $n=-6$ und $m=2$ das vor der Klammer stehende x den Exponenten $-6+6=0$ erhält, und also das gegebene Integral von jenem

$$\int dx\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = arc.\,sin.\,x$$

[§. 105., Note, 13)], welches sofort bekannt ist, abhängig gemacht wird.

Man setze demnach in der letzt genannten Reductionsformel I. $a=1$, $b=-1$, $n=-6$, $m=2$ und $p=\frac{5}{2}$; so erhält man daraus für $r=3$:

$$\int x^{-6}\,dx\,X^{\frac{5}{2}} =$$

$$\frac{x^{-5}}{-5}\left[X^{\frac{5}{2}} - \tfrac{5}{3}x^2 X^{\frac{3}{2}} + \frac{5.3}{3.1}x^4 X^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{5.3.1}{5.3.1}\int x^0\,dx\,X^{-\frac{1}{2}},$$

nämlich

$$\int x^{-6}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} =$$

$$C - \sqrt{(1-x^2)}\left[\tfrac{1}{5}x^{-5}(1-x^2)^2 - \tfrac{1}{3}x^{-3}(1-x^2) + x^{-1}\right]$$
$$- arc.\,sin.\,x.$$

§. 127.

Die Reductionsformel (*A'* (§. 125.) dienet, den Exponenten p zu vergröſsern, was in der Regel für negative Werthe von p nothwendig wird. Setzt man nämlich in dieser Formel successive statt n und p beziehungsweise $n-m$ und $p+1$; $n-2m$ und $p+2$, u. s. f., und substituirt die entstehenden Integralformeln immer für das im zweiten Theile der unmittelbar vorhergehenden Gleichung stehende Integral; so verwandelt sich der Exponent von X nach und nach in $p+1$, $p+2$, $p+3$, u. s. w., und nach r solcher Substitutionen in $p+r$; und man kann auf diese

Weise sehr leicht, analog mit jener I., die allgemeine Reductionsformel, mittelst welcher das gegebene Integral auf jenes $\int x^{n-rm} dx X^{p+r}$ gebracht wird, aufstellen (auch kann man diese ganz einfach unmittelbar aus der Formel I. entwickeln, was wir übrigens dem eigenen Fleiſse des Studirenden überlassen wollen). Wir wollen uns indessen bei dem folgenden Beispiel mit der Formel (A' selbst behelfen, und das in dem speciellen Falle thun, was man gleich Ein für alle Mal allgemein und weiter ausführen kann.

B e i s p i e l.

Das Integral $\int x^4 dx (1+x^2)^{-3}$ läſst sich nach keiner der früher angegebenen Methoden entwickeln; läſst sich dieses aber von dem Integral $\int x^0 dx (1+x^2)^{-1} = arc.tang.x$ [§. 105., Note, Form. 14)] abhängig machen oder auf dieses reduciren, so ist die Integration gelungen. Da nun hiezu der Exponent $p=-3$ um zwei Einheiten vergröſsert werden muſs, und dabei nach der Formel (A' (§. 125.) der Exponent von x (vor der Klammer) zugleich auf Null gebracht wird; so kann man sich hier dieser Reductionsformel (A' mit gutem Erfolg bedienen.

Man erhält nämlich nach dieser Formel, wegen $a=1$, $b=1$, $n=4$, $m=2$ und $p=-3$:

$$\int x^4 dx X^{-3} = \frac{-x^3 X^{-2}}{4} + \tfrac{3}{4}\int x^2 dx X^{-2}.$$

Setzt man ferner in derselben Formel (um dieses letzte Integral noch weiter zu reduciren) $n=2$, $p=-2$, und läſst die übrigen Werthe a, b, m ungeändert; so wird

$$\int x^2 dx X^{-2} = -\frac{x X^{-1}}{2} + \tfrac{1}{2}\int x^0 dx X^{-1};$$

dieser Werth in die vorhergehende Gleichung substituirt, gibt also

$$\int x^4 dx X^{-3} = -\frac{x^3 X^{-2}}{4} - \frac{3xX^{-1}}{4.2} + \frac{3.1}{4.2}\int \frac{dx}{1+x^2},$$

oder endlich

$$\int x^4 dx (1+x^2)^{-3} = -\tfrac{1}{4}x^3(1+x^2)^{-2} - \tfrac{3}{8}x(1+x^2)^{-1} + \tfrac{3}{8}\,arc.tang.x + C.$$

§. 128.

Da, wie die beiden angeführten Beispiele deutlich zeigen, auch der Exponent n eine passende Gröſse haben muſs, wenn die genannten Reductionsformeln (A und (A' auf bestimmte, bereits bekannte Integrale führen sollen; so müssen auch noch solche Reductionsformeln entwickelt werden, mittelst welcher dieser Exponent n nach Erforderniſs herab oder hinauf gebracht werden kann Dazu gebe man der angenommenen Differentialformel die Form

$$x^n dx (a + bx^m)^p = x^{n-m+1} x^{m-1} dx (a + bx^m)^p,$$

und setze in der ursprünglichen Reductionsformel (α, §. 124.

$$u = x^{n-m+1} \quad \text{und} \quad dv = x^{m-1} dx (a + bx^m)^p;$$

so folgt, wegen $du = (n - m + 1) x^{n-m} dx$ und (§. 107., 7.)

$$v = \int x^{m-1} dx (a + bx^m)^p = \frac{(a + bx^m)^{p+1}}{bm(p+1)} = \frac{X^{p+1}}{bm(p+1)}:$$

$$\int x^n dx X^p = \frac{x^{n-m+1} X^{p+1}}{bm(p+1)} - \frac{(n-m+1)}{bm(p+1)} \int x^{n-m} dx X^{p+1}.$$

Es ist aber

$$\int x^{n-m} dx X^{p+1} = \int x^{n-m} dx (a + bx^m)(a + bx^m)^p$$
$$= \int a x^{n-m} dx X^p + \int b x^n dx X^p,$$

demnach, wenn man diesen Werth in der unmittelbar vorhergehenden Gleichung substituirt, auch

$$\int x^n dx X^p = \frac{x^{n-m+1} X^{p+1}}{bm(p+1)} - \frac{(n-m+1)a}{bm(p+1)} \int x^{n-m} dx X^p$$
$$- \frac{(n-m+1)}{m(p+1)} \int x^n dx X^p,$$

und wenn man sofort aus dieser Gleichung das Integral $\int x^n dx X^p$ bestimmt:

$$\int x^n dx X^p = \frac{x^{n-m+1} X^{p+1}}{b(mp+n+1)}$$
$$- \frac{(n-m+1)a}{b(mp+n+1)} \int x^{n-m} dx X^p \quad \ldots \text{(B.}$$

Auf diese Art ist man zu einer ersten Reductionsformel gelangt, mittelst welcher man durch ähnliche wiederholte Substitutionen, wie in jener (A, §. 125., den Expo-

nenten n nach und nach um m, $2m$, $3m$, . . . Einheiten vermindern kann; es wird in der That, wenn man zuerst in dieser Formel (*B* statt n, $n-m$ schreibt, das letzte Integral wieder

$$\int x^{n-m}\,dx\,X^p = \frac{x^{n-2m+1}\,X^{p+1}}{b\,[m(p-1)+n+1]} - \frac{(n-2m+1)\,a}{b\,[m(p-1)+n+1]}\int x^{n-2m}\,dx\,X^p,$$

und wenn man diesen Werth in der nächst vorhergehenden Gleichung substituirt:

$$\int x^n\,dx\,X^p = \frac{x^{n-m+1}\,X^{p+1}}{b\,(mp+n+1)} - \frac{(n-m+1)\,a\,x^{n-2m+1}\,X^{p+1}}{b^2\,(mp+n+1)[m(p-1)+n+1]} + \frac{(n-m+1)(n-2m+1)\,a^2}{b^2\,(mp+n+1)[m(p-1)+n+1]}\int x^{n-2m}\,dx\,X^p.$$

Setzt man weiters in (*B* $n-2m$ statt n, so wird das letztere Integral des vorigen Ausdruckes wieder auf jenes $\int x^{n-3m}\,dx\,X^p$ herabgebracht u. s. w., so, dafs man endlich nach r Substitutionen und Reductionen auf die Formel kommt:

$$\int x^n\,dx\,X^p = \frac{x^{n-m+1}\,X^{p+1}}{(mp+n+1)\,b}\Big[1 - \frac{(n-m+1)\,a\,x^{-m}}{[m(p-1)+n+1]\,b} + \frac{(n-m+1)(n-2m+1)\,a^2\,x^{-2m}}{[m(p-1)+n+1][m(p-2)+n+1]\,b^2} - + \ldots + (-1)^{r-1}\frac{(n-m+1)(n-2m+1)\ldots[n-(r-1)m+1]\,a^{r-1}\,x^{-(r-1)m}}{[m(p-1)+n+1][m(p-2)+n+1]\ldots[m(p-r+1)+n+1]\,b^{r-1}}\Big]$$
$$+(-1)^r\frac{(n-m+1)(n-2m+1)\ldots(n-rm+1)\,a^r}{(mp+n+1)[m(p-1)+n+1]\ldots[m(p-r+1)+n+1]\,b^r}\int x^{n-rm}\,dx\,X^p.\ \text{II.}$$

Um aber auch für negative Exponenten n eine erste Reductionsformel [analog mit jener (*A'*, §. 125.] zu erhalten, in welchem Falle nämlich n vergröfsert oder hinauf gebracht werden mufs, darf man nur wieder die Formel (*B* umkehren, d. h. das letzte Integral durch das erste ausdrücken. Man erhält dadurch

$$\int x^{n-m}\,dx\,X^p = \frac{x^{n-m+1}\,X^{p+1}}{(n-m+1)\,a} - \frac{(mp+n+1)\,b}{(n-m+1)\,a}\int x^n\,dx\,X^p,$$

und wenn man noch in dieser Formel statt n, $n+m$ schreibt:

$$\int x^n\,dx\,X^p = \frac{x^{n+1}X^{p+1}}{(n+1)a}$$
$$- \frac{[m(p+1)+n+1]b}{(n+1)a}\int x^{n+m}\,dx\,X^p \;.\;.\;.\;(B',$$

die betreffende Reductionsformel. Auch kann man gleich, weil sie in der Regel nur in diesem Falle angewendet wird, in dieser Formel n negativ nehmen [wie man diefs auch oben in (A' thun könnte], wodurch diese Reductionsformel die Form erhält:

$$\int \frac{dx\,X^p}{x^n} = \frac{-X^{p+1}}{(n-1)a\,x^{n-1}} + \frac{[m(p+1)-n+1]b}{(n-1)a}\int \frac{dx\,X^p}{x^{n-m}} \;.\;.\;(B''$$

Durch ähnliche wiederholte Substitutionen von $n+m$, $n+2m$, . . . statt n in (B' und Reductionen wie in (B, kann man den Exponenten n nach und nach auf $n+2m$, $n+3m$, . . . $n+rm$ bringen, und gleich allgemein analog mit II. die betreffende Reductionsformel (die auch unmittelbar und ganz einfach aus jener II. abgeleitet werden kann) aufstellen; was wir aber wieder dem eigenen Fleifse des Studirenden überlassen können. Die folgenden Beispiele mögen die Anwendung dieser beiden Reductionsformeln (B und (B' erläutern.

§. 129.

Beispiele.

1) Um das Integral $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ zu bestimmen, darf nur, wie man auf den ersten Blick ersieht, der Exponent 4 auf Null herabgebracht werden, um auf das bekannte Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = arc.\,sin.\,x$ zu kommen. Dieses leistet aber die Reductionsformel (B des vorigen Paragraphes nach zweimaliger Anwendung, oder schneller die schon entwickelte Formel II.; weil beide den Exponenten n vermindern, ohne dadurch jenen p zu ändern.

Setzt man also in II. $a=1$, $b=-1$, $p=-\frac{1}{2}$, und wegen $m=2$ und $n=4$: $r=2$; so wird

$$\int x^4\,dx\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^3 X^{\frac{1}{2}}}{-4}\left(1-\frac{3x^{-2}}{-2}\right) + \frac{3\,.\,1}{4\,.\,2}\int x^0\,dx\,X^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\left(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{8}x\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+ \tfrac{3}{8}\,arc.\,sin.\,x + C.$$

Anmerk. Wäre der Exponent n ungerad und z. B. $=5$, so käme man durch die nämliche Substitution auf das Integral $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, welches ebenfalls bekannt und nach §. 107., 7. $= C - \sqrt{(1-x^2)}$ ist.

2) Zur Bestimmung des Integrals $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$ wird man den Exponenten $n = -2$ nach der Reductionsformel (B' (des vorigen Paragraphes) auf Null bringen, und sofort, wegen $a=1$, $b=1$, $n=-2$, $m=2$ und $p=-1$ erhalten:

$$\int x^{-2}\,dx\,(1+x^2)^{-1} = \frac{x^{-1}X^0}{-1} + \frac{1}{-1}\int\frac{x^0\,dx}{1+x^2}$$
$$= C - \frac{1}{x} - arc.\,tang.\,x.$$

3) Um das Integral $\int \frac{x^5\,dx}{1+x^2}$ zu bestimmen, kann man dasselbe nach Formel (B oder II. auf jenes

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}l(1+x^2)\ (\S.\ 108.)$$

bringen, wenn man in der letztgenannten Reductionsformel $a=1$, $b=1$, $n=5$, $m=2$, $p=-1$ und $r=2$ setzt; dadurch erhält man nämlich:

$$\int\frac{x^5\,dx}{1+x^2} = \frac{x^4}{4}\left(1-\frac{4x^{-2}}{2}\right) + \frac{4\,.\,2}{4\,.\,2}\int\frac{x\,dx}{1+x^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}l(1+x^2) + C.$$

4) Um endlich noch das Integral $\int x^2\,dx\sqrt{(1-x^2)}$ auf jenes $\int\frac{x^0\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = arc.\,sin.\,x$ zu bringen, wird man beide Reductionsformeln (A und (B (§. 125. und 128.), oder was dasselbe ist, I. und II. vereint, und zwar in der Ordnung anwenden, daſs man zuerst nach I. den Exponenten $p=\frac{1}{2}$ um 1 vermindert und auf $-\frac{1}{2}$ bringt, und dann erst den Exponenten n, welcher dadurch auf $n+m=4$ steigt, nach der Formel II., welche den Exponenten $p=-\frac{1}{2}$ dabei un-

berührt läfst, um $2m = 4$ Einheiten vermindert und auf Null bringt.

Es ist nämlich nach I. (§. 125.), wenn man $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $m=2$, $p=\frac{1}{2}$ und $r=1$ setzt [oder auch unmittelbar aus $(A]$:

$$\int x^2 dx \sqrt{(1-x^2)} = \tfrac{1}{3}x^3\sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{1}{3}\int x^4 dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man ferner in II. (§. 127.) $a=1$, $b=-1$, $n=4$, $m=2$, $p=-\frac{1}{2}$ und $r=2$; so erhält man weiters

$$\int x^4 dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^3 X^{\frac{1}{2}}}{-4}\left(1 - \frac{3x^{-2}}{-2}\right) + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\int x^0 dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{8}x)\sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{3}{8}\, arc. sin. x;$$

dieser Werth in der vorhergehenden Gleichung substituirt, gibt endlich:

$$\int x^2 dx \sqrt{(1-x^2)}$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3\sqrt{(1-x^2)} - (\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{x}{8})\sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{1}{8}\, arc. sin. x$$

$$= \tfrac{1}{4}(x^3 - \tfrac{1}{2}x)\sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{1}{8}\, arc. sin. x + C.$$

Zur Uebung kann man auch die beiden ersten Beispiele des §. 123. auf diesem Wege behandeln und die Ergebnisse mit den dortigen Auflösungen vergleichen.

Anmerk. Es dürfte schon aus diesen wenigen Beispielen klar geworden seyn, dafs sich mit Hilfe der beiden Haupt-Reductionsformeln (A und (B und den daraus durch Umkehrung abgeleiteten (A' und (B' alle Integralausdrücke von der Form

$$\int x^s dx (1-x^2)^{\frac{q}{2}} \quad \text{und} \quad \int x^s dx (1+x^2)^t,$$

(wo s und t ganze positive oder negative, und q ungerade Zahlen bezeichnen) die erstern immer auf

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = arc. sin. x \quad \text{oder} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)},$$

und die letztern auf

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc. tang. x \quad \text{oder} \quad \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}l(1+x^2),$$

je nachdem s gerad oder ungerad ist, bringen und sofort bestimmen lassen.

§. 130.

Um aber endlich in jenen Fällen, in welchen der Exponent n bereits die gehörige Gröfse (1 oder 0) besitzt, und nur der Exponent p herab oder hinauf zu bringen ist, nicht durch Anwendung der hiezu nöthigen Formel (A oder (A', (§. 125.) den Exponenten n zu verändern und dadurch genöthigt zu werden, hinter her, nachdem p die nöthige Gröfse erlangt hat, die Formel (B oder (B' anzuwenden; kann man auch noch solche Reductionsformeln entwickeln, mittelst welcher der Exponent p vermindert oder vergrössert wird, ohne dafs dadurch [was in (A und (A' nicht der Fall ist] n eine Aenderung erleidet. Dazu löse man den Factor bx^{n+m} im letzten Integral der Reductionsformel (A (§. 125.) auf folgende Art auf:

$$bx^{n+m} = x^n bx^m = x^n(X - a) = x^n X - ax^n$$

(wegen $a + bx^m = X$, also $bx^m = X - a$); wird dieser Werth für bx^{n+m} in der genannten Formel (A substituirt, so erhält man

$$\int x^n dx X^p = \frac{x^{n+1} X^p}{n+1} - \frac{mp}{n+1} \int X^{p-1} dx (x^n X - ax^n)$$

$$= \frac{x^{n+1} X^p}{n+1} - \frac{mp}{n+1} \int x^n dx X^p$$

$$+ \frac{mpa}{n+1} \int x^n dx X^{p-1},$$

und wenn man aus dieser Gleichung $\int x^n dx X^p$ bestimmt, auch:

$$\int x^n dx X^p = \frac{x^{n+1} X^p}{mp+n+1} + \frac{mpa}{mp+n+1} \int x^n dx X^{p-1} \ldots (C$$

Drückt man dagegen, um eine ähnliche Reductionsformel für negative Exponenten p [welche jene (A' ersetzt] zu erhalten, aus dieser Gleichung das letzte Integral durch das erste aus, und schreibt dann noch statt p: $p+1$; so erhält man auch

$$\int x^n dx X^p = \frac{-x^{n+1} X^{p+1}}{m(p+1)a}$$

$$+ \frac{m(p+1)+n+1}{m(p+1)a} \int x^n dx X^{p+1} \ldots (C',$$

oder wenn man gleich den negativen Werth von p aussetzen will, auch

$$\int \frac{x^n dx}{X^p} = \frac{x^{n+1}}{m(p-1)aX^{p-1}} + \frac{m(p-1)-n-1}{m(p-1)a} \int \frac{x^n dx}{X^{p-1}} \ldots (C''$$

Diese vier Formeln (B, (B', (C und (C' sind es also eigentlich, welche am einfachsten zur Reduction der am Ende des vorigen Paragraphes angeführten Integralausdrücke

$$\int x^s dx (1-x^2)^{\frac{q}{2}} \text{ und } \int x^s dx (1+x^2)^t$$

gebraucht werden; dabei ist die Ordnung, in der man sie anwenden will, willkürlich.

§. 131.

Beispiele.

Wir wollen diese letzten Reductionsformeln (C und (C' noch durch folgende Beispiele erläutern.

1) Um das Integral $\int dx \sqrt{(a+bx^2)}$ zu finden, hat man $n=0$, $m=2$ und $p=\frac{1}{2}$; also nach Formel (C:

$$\int dx \sqrt{(a+bx^2)} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(a+bx^2)} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$$

und wenn man für das letzte Integral seinen Werth aus Formel (c, §. 116., setzt, auch

$$\int dx \sqrt{(a+bx^2)} = \frac{x\sqrt{(a+bx^2)}}{2}$$
$$+ \frac{a}{2\sqrt{b}} l[x\sqrt{b} + \sqrt{(a+bx^2)}] + C \ldots (m.$$

2) Eben so findet man nach (C, §. 130., und (d, §. 116.:

$$\int dx \sqrt{(a-bx^2)} = \frac{x\sqrt{(a-bx^2)}}{2} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(a-bx^2)}}$$
$$= \frac{x\sqrt{(a-bx^2)}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} arc. sin. \left(x \sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

Schlufsbemerkung. Die in den vorhergehenden Paragraphen aufgestellten sechs Reductionsformeln sind natürlich für jene Fälle, in welchen die Nenner verschwinden oder gleich Null werden, unbrauchbar; diefs geschieht in (A und (B' für $n+1=0$; in (B' und (C' für $a=0$; in (A' und (B für $b=0$; in (A' und (C' für $m=0$ oder $p+1=0$; und endlich in (B

und (C für $mp + n + 1 = 0$. In allen diesen Fällen jedoch läſst sich das betreffende Integral $\int x^n\, dx\, (a + b x^m)^p$ auf Monome oder rationale Brüche zurückführen, wodurch diese Reductionsformeln ohnehin entbehrlich werden *).

*) 1) Ist nämlich $n + 1 = 0$, also $n = -1$; so geht das genannte Integral über in jenes: $\int \frac{dx}{x} (a + b x^m)^p$, von welchem (da die übrigen Fälle gehörigen Orts bereits behandelt sind) nur noch der Fall zu betrachten ist, in welchem p gebrochen und z. B. $= \frac{r}{s}$ ist. Setzt man aber $a + bx^m = z^s$, so wird

$$x = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ und } dx = \frac{s}{bm} z^{s-1}\, dz \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{m} - 1},$$

$$\text{folglich } \int \frac{dx}{x} (a + b x^m)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{m} \int \frac{z^{r+s-1}\, dz}{z^s - a}$$

und es ist sonach das obige Integral auf jenes eines rationalen Bruches gebracht.

2) Ist $a = 0$, so verwandelt sich das mehr genannte Integral in $b^p \int x^{n + mp}\, dx$, also in ein Monom.

3) Ist $b = 0$, so kommt man eben so auf das Integral

$$a^p \int x^n\, dx = \frac{a^p x^{n+1}}{n + 1}.$$

4) Für $m = 0$ erhält man wieder $(a + b)^p \int x^n\, dx$.

5) Ist $p + 1 = 0$, also $p = -1$; so hat man das Integral $\int \frac{x^n\, dx}{a + b x^m}$ zu bestimmen, welches man nach den in den Paragraphen von 109. bis 113. vorgetragenen Methoden findet.

6) Ist endlich $mp + n + 1 = 0$, also $p = -\frac{n + 1}{m}$; so hat man das Integral zu suchen:

$$\int x^n\, dx\, (a + b x^m)^{-\frac{n+1}{m}}.$$

Dazu setze man $a + b x^m = x^m z^m$, so wird

$$x = a^{\frac{1}{m}} (z^m - b)^{-\frac{1}{m}} \text{ und } dx = -a^{\frac{1}{m}} z^{m-1}\, dz\, (z^m - b)^{-\frac{1}{m} - 1};$$

folglich

$$\int x^n\, dx\, (a + b x^m)^{-\frac{n+1}{m}} = -\int \frac{z^{m-n-2}\, dz}{z^m - b};$$

welches letztere Integral, da es sich auf einen rationalen Bruch bezieht, wieder nach dem Frühern (§. 109. — §. 113.) entwickelt werden kann.

§. 132.

Um die, eine vorzügliche Anwendung findenden Integrale von der Form

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

zu bestimmen, setze man in der Reductionsformel (*B*, (§. 128.) $a=1$, $b=-1$, $m=2$ und $p=-\frac{1}{2}$; so wird

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\ ^{*)}.$$

a) Setzt man nun in dieser Formel zuerst für n nach und nach die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, . . .; so erhält man

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)} + C$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^2\sqrt{(1-x^2)}}{3} + \frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= -\left(\frac{x^2}{3} + \frac{1.2}{1.3}\right)\sqrt{(1-x^2)} + C,$$

wenn man nämlich für das letzte Integral den Werth aus der vorhergehenden Gleichung setzt:

*) Es wird gut seyn zu bemerken, daſs man diese Formel auch auf folgende Art ableiten kann:

Es ist

$$d.x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)} = \left[(n-1)x^{n-2}\sqrt{(1-x^2)} - \frac{x^n}{\sqrt{(1-x^2)}}\right]dx$$

$$= \frac{(n-1)\,x^{n-2} - n\,x^n}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx;$$

folglich auch, wenn man integrirt:

$$x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)} = (n-1)\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - n\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

und daraus ist endlich

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

wie oben.

Wird ferner aus dieser Gleichung das letzte Integral bestimmt und dann statt n, $n+2$ gesetzt; so erhält man die im folgenden Paragraphe angegebene Formel für negative Exponenten n.

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^4\sqrt{(1-x^2)}}{5} + \tfrac{4}{5}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= -\left(\frac{x^4}{5}+\frac{1.4}{3.5}x^2 + \frac{1.2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{(1-x^2)} + C$$

$$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^6\sqrt{(1-x^2)}}{7} + \tfrac{6}{7}\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= -\left(\frac{x^6}{7}+\frac{1.6}{5.7}x^4+\frac{1.4.6}{3.5.7}x^2+\frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}\right)\sqrt{(1-x^2)}+C.$$

Und nach diesem einfachen Gesetze weiter.

b) Setzt man eben so für n nach und nach die geraden Zahlen 2, 4, 6, ...; so erhält man aus derselben Formel, wenn man noch Kürze halber $arc.\,sin.\,x = A$ setzt:

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= -\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2} + \tfrac{1}{2}A + C$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^3\sqrt{(1-x^2)}}{4} + \tfrac{3}{4}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= -\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1.3}{2.4}A + C$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^5\sqrt{(1-x^2)}}{6} + \tfrac{5}{6}\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= -\left(\frac{x^5}{6}+\frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1.3.5}{2.4.6}A + C$$

u. s. w.

§. 133.

Setzt man ferner auch in der Reductionsformel (B'' (§. 128.) $a=1$, $b=-1$, $m=2$ und $p=-\frac{1}{2}$; so erhält man

$$\int\frac{dx}{x^n\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{-\sqrt{(1-x^2)}}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{(1-x^2)}}.$$

a) Für $n=1$ folgt aus §. 117., Form. (4, wenn man $\alpha=1$, $\beta=0$ und $\gamma=-1$ setzt:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}} = l\left(\frac{2\sqrt{[1-x^2]}-2}{x}\right)+C = -l\left(\frac{x}{1-\sqrt{[1-x^2]}}\right)+C,$$

wenn man nämlich $l(-2)$ mit C verbindet; oder endlich

auch

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}} = -l\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right) + C\ ^{*)}.$$

Setzt man ferner in der erstern Formel nach und nach $n=3, 5, 7, \ldots$; so erhält man der Reihe nach, wenn man der Kürze wegen $\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x} = X$ setzt:

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{2x^2} - \tfrac{1}{2}lX + C$$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{4x^4} + \tfrac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= -\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{1.3}{2.4x^2}\right)\sqrt{(1-x^2)} - \tfrac{3}{8}lX + C$$

u. s. w.

b) Eben so wird für $n=2, 4, 6, \ldots$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} + C$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{3x^3} + \tfrac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= -\left(\frac{1}{3x^3} + \frac{1.2}{1.3x}\right)\sqrt{(1-x^2)} + C$$

*) Dieses Integral, welches defswegen nicht aus der vorhergehenden Formel, die für $n=1$ Unendlich wird, erhalten werden kann, weil dasselbe nicht, wie es diese Formel fordert, algebraisch wird; läfst sich auch direct auf folgende Art finden:

Setzt man $\sqrt{(1-x^2)} = z$, so wird

$$x = \sqrt{(1-z^2)} \text{ und } dx = \frac{-z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}};$$

daher

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}} = -\int\frac{dz}{1-z^2} = -\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{[1-x^2]}}{1-\sqrt{[1-x^2]}}\right) + C$$

$$= -\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{[1-x^2]}}{x}\right)^2$$

$$= -l\left(\frac{1+\sqrt{[1-x^2]}}{x}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^6 \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{5x^5} + \tfrac{4}{5}\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= -\left(\frac{1}{5x^5} + \frac{1.4}{3.5x^3} + \frac{1.2.4}{1.3.5x}\right)\sqrt{(1-x^2)} + C$$

u. s. w.

§. 134.

Setzt man ferner in den Formeln der beiden vorigen Paragraphen statt x: $\frac{1}{x}$, also statt dx: $-\frac{dx}{x^2}$, wodurch $\sqrt{(1-x^2)}$ in $\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$ und $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = arc.\,sin.\,x$ in $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = -\,arc.\,sin.\frac{1}{x}$, welchen letztern Werth wir mit A' bezeichnen wollen, übergeht; so erhält man noch der Reihe nach folgende Formeln:

a) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2-1)}} = \frac{1}{x}\sqrt{(x^2-1)} + C$

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{(x^2-1)}} = \left(\frac{1}{3x^3} + \frac{1.2}{1.3x}\right)\sqrt{(x^2-1)} + C$$
$$\int \frac{dx}{x^6 \sqrt{(x^2-1)}} = \left(\frac{1}{5x^5} + \frac{1.4}{3.5x^3} + \frac{1.2.4}{1.3.5x}\right)\sqrt{(x^2-1)} + C$$

u. s. w.

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = arc.\,sec.\,x = -A' + C$

[§. 105., Note, Form. 15)]

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(x^2-1)}} = \frac{1}{2x^2}\sqrt{(x^2-1)} - \tfrac{1}{2}A' + C$$
$$\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{(x^2-1)}} = \left(\frac{1}{4x^4} + \frac{1.3}{2.4x^2}\right)\sqrt{(x^2-1)} - \frac{1.3}{2.4}A' + C$$

u. s. w.

a') $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}} = l[x + \sqrt{(x^2-1)}] + C$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{x\sqrt{(x^2-1)}}{2} + \tfrac{1}{2}\,l[x + \sqrt{(x^2-1)}] + C$$

u. s. w.

Endlich

b') $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)}} = \sqrt{(x^2-1)} + C$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(x^2-1)}} = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1.2}{1.3}\right)\sqrt{(x^2-1)} + C$$

u. s. w.

§. 135.

Soll das Integral $\int x^q dx (ax^r + bx^s)^p$ bestimmt werden, so bemerke man, dafs

$$x^q dx (ax^r + bx^s)^p = x^{q+rp} dx (a + bx^{s-r})^p$$

ist, setze $q + rp = n$ und $s - r = m$; dadurch erhält das obige Integral die Form $\int x^n dx (a + bx^m)^p$ und kann also nach dem Frühern behandelt werden.

B e i s p i e l e.

1) Um z. B. das Integral

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

zu finden, hat man

$$\frac{x^n dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = x^n dx (2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{n-\frac{1}{2}} dx (2a - x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man daher in der Formel (B, §. 128., statt n: $n - \frac{1}{2}$, $m = 1$ und $p = -\frac{1}{2}$, dann statt a: $2a$ und $b = -1$; so erhält man

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \int \frac{x^{n-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{(2a - x)}} = \frac{x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{(2a - x)}}{-n}$$

$$+ \frac{2(n - \frac{1}{2})a}{n} \int x^{n-\frac{3}{2}} dx (2a - x)^{-\frac{1}{2}},$$

oder auch, wie man leicht sieht:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = -\frac{x^{n-1} \sqrt{(2ax - x^2)}}{n} + \frac{(2n-1)a}{n} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}};$$

eine Reductionsformel, die auch direct auf folgendem Wege gewonnen werden kann:

Es ist nämlich (analog mit dem Verfahren in der Note zu §. 132.)

$$d.x^n \sqrt{(2ax - x^2)} = \left[nx^{n-1} \sqrt{(2ax - x^2)} + \frac{x^n (a - x)}{\sqrt{(2ax - x^2)}} \right] dx$$

oder, wenn man einerlei Nenner herstellt:

$$d.x^n \sqrt{(2ax - x^2)} = \frac{(2n+1) ax^n dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} - \frac{(n+1) x^{n+1} dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}};$$

also auch, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung das Integral nimmt:

$$x^n \sqrt{(2ax-x^2)} = (2n+1)a\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$$
$$-(n+1)\int\frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}.$$

Bestimmt man von diesen beiden Integralen das letztere und setzt statt n: $n-1$; so erhält man sofort die obige Reductionsformel:

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{(2ax-x^2)}}{n}$$
$$+\frac{(2n-1)a}{n}\int\frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} \ldots (b$$

Bestimmt man dagegen von den genannten beiden Integralen das erste und nimmt n negativ; so erhält man auch noch folgende Reductionsformel [die eben so aus (B'', §. 128., wie die vorige aus (B abgeleitet werden kann]:

$$\int\frac{dx}{x^n\sqrt{(2ax-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{(2n-1)ax^n}$$
$$+\frac{(n-1)}{(2n-1)a}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{(2ax-x^2)}} \ldots (b'.$$

Nach der ersten dieser beiden besondern Reductionsformeln kommt man, wenn n eine ganze positive Zahl ist, durch fortgesetzte Substitutionen von $n-1$, $n-2$, ... statt n, zuletzt entweder auf

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} \text{ oder auf } \int\frac{x\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}},$$

welche Integrale beide bekannt sind; denn es ist

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = arc.\,sinv.\left(\frac{x}{a}\right) \text{ [§. 105., Note, Form. 16)]}$$

$$= C - arc.\,sin.\left(\frac{a-x}{a}\right)$$ [wegen $arc.\,sinv.\,y = arc.\,cos.\,(1-y)$ $= 90 - arc.\,sin.\,(1-y)$] und [wenn man in (b selbst $n=1$ setzt]

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = -\sqrt{(2ax-x^2)} + a\int\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$$
$$= -\sqrt{(2ax-x^2)} - a\,arc.\,sin.\left(\frac{a-x}{a}\right) + C \ldots (g$$

Nach der zweiten Formel (b' kommt man zuletzt auf die gleichfalls bekannten Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = arc.\,sinv.\left(\frac{x}{a}\right)$$

und $\int \frac{dx}{x\sqrt{(2ax-x^2)}} = -\frac{1}{ax}\sqrt{(2ax-x^2)}$ [§. 117., Form. (5].

2) Um eben so das Integral $\int dx \sqrt{(2ax-x^2)}$ auf diesem Wege zu bestimmen, ist

$$dx\sqrt{(2ax-x^2)} = x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(2a-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man daher in der Reductionsformel (C, §. 130., $n=\frac{1}{2}$, $m=1$, $p=\frac{1}{2}$, $b=-1$ und statt a: $2a$; so erhält man

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\sqrt{(2a-x)} = \tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{(2a-x)} + \frac{a}{2}\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{(2a-x)}}$$
$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{(2ax-x^2)} + \frac{a}{2}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$$

folglich, wenn man für das letzte Integral den im vorigen Beispiele gefundenen Werth (g substituirt, endlich:

$$\int dx\sqrt{(2ax-x^2)} = -\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}$$
$$-\frac{a^2}{2}\,arc.\,sin.\left(\frac{a-x}{a}\right) + C \ldots (h.$$

Anmerk. Noch einfacher läfst sich dieses Integral finden, wenn man $x=a-z$, also $dx=-dz$ setzt; dadurch erhält man

$$\int dx\sqrt{(2ax-x^2)} = -\int dz\,(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\tfrac{1}{2}z\sqrt{(a^2-z^2)} - \frac{a^2}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}},$$

wenn man nämlich in der Reductionsformel (C, $n=1$, $m=2$, $p=\frac{1}{2}$, $b=-1$; ferner statt a: a^2 und statt x: z schreibt.

Es ist daher wegen $\int\frac{dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = arc.\,sin.\frac{z}{a}$ [§. 116., (d] und wenn man gleich wieder den Werth von $z=a-x$ herstellt, wie vorhin:

$$\int dx\sqrt{(2ax-x^2)} = -\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}$$
$$-\frac{a^2}{2}\,arc.\,sin.\left(\frac{a-x}{a}\right).$$

Auf die nämliche Art könnte man auch das Integral

$$\int dx\sqrt{(2ax+x^2)}$$

bestimmen; was wir indefs im nächsten Paragr. thun wollen.

Reductionsformeln für einige besondere Fälle des Integrals $\int x^n dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p$.

§. 136.

Setzt man in den Reductionsformeln (C und (C'', §. 130., $n=0$, $m=2$, schreibt sodann statt x, $c+x$ und setzt endlich wieder nach vollendeter Entwicklung, gerade wie im §. 114., $a+bc^2=\alpha$, $2bc=\beta$ und $b=\gamma$, wodurch (wie dort) $c=\frac{\beta}{2\gamma}$ und $a=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}$ wird; so erhält man

$$\int dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p=\frac{(\beta+2\gamma x)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p}{2\gamma(2p+1)}$$
$$+\frac{p(4\alpha\gamma-\beta^2)}{2\gamma(2p+1)}\int dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{p-1} \ldots (a$$

und

$$\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^p}=\frac{\beta+2\gamma x}{(p-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{p-1}}$$
$$+\frac{2\gamma(2p-3)}{(p-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{p-1}} \ldots (a'.$$

Beispiel.

Wir können nun nach der ersten Reductionsformel (a das im §. 120., Beisp. 2) erwähnte Integral $\int dx\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}$ ganz einfach entwickeln. Es ist nämlich zufolge dieser Formel, wenn man $p=\frac{1}{2}$ setzt:

$$\int dx\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}=\frac{(\beta+2\gamma x)\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{4\gamma}$$
$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}},$$

oder, wenn man gleich für das letzte Integral seinen Werth aus §. 117., Form. (2, setzt, auch

$$\int dx\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}=\frac{(\beta+2\gamma x)\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{4\gamma}$$
$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}}\,l[\beta+2\gamma x+2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}]+C \ldots (r$$

und wenn γ negativ ist [§. 117., Form. (2']:

$$\int dx\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)}=\frac{-(\beta-2\gamma x)\sqrt{(\alpha+\beta x-\gamma x^2)}}{4\gamma}$$
$$+\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}}\,arc.sin.\left(\frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{[4\alpha\gamma+\beta^2]}}\right)+C \ldots (s.$$

Anmerk. Setzt man in der Formel (r, $\alpha = 0$, $\beta = 2a$ und $\gamma = 1$; so erhält man:

$$\int dx\sqrt{(2ax + x^2)} = \tfrac{1}{2}(a + x)\sqrt{(2ax + x^2)}$$
$$- \frac{a^2}{2}\, l[a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}] + C \ldots (t;$$

dabei ist der constante Theil $-\frac{a^2}{2}\,l\,2$ zur willkürlichen Constante C geschlagen worden.

Nimmt man dieselbe Substitution in der Formel (s vor, so erhält man abermals das obige Integral (h (im vor. Paragr.):

$$\int dx\sqrt{(2ax - x^2)}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{(2ax - x^2)} + \frac{a^2}{2}\,arc.\,sin.\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$
$$= \quad \text{detto} \quad \text{detto} \quad - \frac{a^2}{2}\,arc.\,sin.\left(\frac{a-x}{a}\right) + C.$$

§. 137.

Nach der Theorie der höhern Gleichungen (Bd I., §. 34.) läſst sich das Trinom $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ auf die Form $a + bz^2$ bringen, wenn man $x = z - \frac{\beta}{2\gamma} = \frac{2\gamma z - \beta}{2\gamma}$ setzt; dadurch wird aber $a = \alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\gamma}$, $b = \gamma$, und wegen $dx = dz$:

$$\int x^n dx(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^p = (-1)^n \int \left(\frac{\beta}{2\gamma} - z\right)^n dz(a + bz^2)^p.$$

Ist nun n eine ganze positive Zahl, so läſst sich das Binom $\left(\frac{\beta}{2\gamma} - z\right)^n$ in eine endliche Anzahl ($= n + 1$) Glieder entwickeln, so, daſs man eben so viele Integrale von der Form $\int Az^r dz(a + bz^2)^p$ zu bestimmen hat, die sofort nach den frühern Paragraphen gefunden werden können.

Selbst das noch allgemeinere Integral

$$\int x^n dx(\alpha + \beta x^m + \gamma x^{2m})^p$$

kann auf diesem Wege gefunden werden; denn setzt man $x^m = y$, so verwandelt sich dieses Integral in folgendes:

$$\frac{1}{m}\int y^{\frac{n+1}{m}-1} dy(\alpha + \beta y + \gamma y^2)^p,$$

welches die vorige Gestalt hat, wenn $\frac{n+1}{m}$ eine ganze positive Zahl ist.

B e i s p i e l.

Für die Bestimmung des Integrals $\int x dx \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ hat man $n = 1$ und $p = \frac{1}{2}$, also

$$(-1)^1 \int \left(\frac{\beta}{2\gamma} - z\right) dz\,(a + bz^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\beta}{2\gamma} \int dz\,(a + bz^2)^{\frac{1}{2}} + \int z\,dz\,(a + bz^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\beta}{2\gamma} \left\{ \frac{z\sqrt{(a + bz^2)}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\, l\left[z\sqrt{b} + \sqrt{(a + bz^2)}\right] \right\}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{(a + bz^2)^{\frac{3}{2}}}{b}$$

[§. 131., Form. (m und §. 107., 7.], oder wegen

$$z = x + \frac{\beta}{2\gamma} = \frac{\beta + 2\gamma x}{2\gamma} \text{ und } a + bz^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 = X^2$$

wenn man nämlich Kürze halber das Trinom $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ durch X^2 bezeichnet, endlich:

$$\int x\,dx\,X = -\frac{\beta}{2\gamma}\left[\frac{(\beta + 2\gamma x)X}{4\gamma} + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}}\, l\left(\frac{\beta + 2\gamma x}{2\sqrt{\gamma}} + X\right)\right]$$

$$+ \frac{X^3}{3\gamma} + C.$$

§. 138.

Um noch andere Reductionsformeln für die trinomischen Differentialausdrücke $x^n\,dx\,\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$ zu erhalten, kann man auf folgende Art verfahren:

Es ist

$$d\,.\,x^{n-1}\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$$

$$= (n-1)\,x^{n-2}\,dx\sqrt{X} + \frac{x^{n-1}(\beta + 2\gamma x)\,dx}{2\sqrt{X}}$$

$$= \frac{(n-1)\,\alpha\,x^{n-2}\,dx + (n - \frac{1}{2})\,\beta\,x^{n-1}\,dx + n\gamma\,x^n\,dx}{\sqrt{X}},$$

wobei X für $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ steht; daraus folgt:

$$\frac{x^n\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{d\,.\,x^{n-1}\sqrt{X}}{n\gamma} - \frac{(n - \frac{1}{2})\beta}{n\gamma} \cdot \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{X}} - \frac{(n-1)\alpha}{n\gamma} \cdot \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{X}}$$

und wenn man integrirt:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{n\gamma}$$

$$-\frac{(n-\frac{1}{2})\beta}{n\gamma}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}-\frac{(n-1)\alpha}{n\gamma}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}\,..(D;$$

eine Reductionsformel, welche den Exponenten n herabbringt.

Bestimmt man aus dieser Gleichung, um die analoge Reductionsformel für negative Exponenten n zu erhalten, das letzte Integral und setzt statt n, $n+2$; so erhält man, wenn man auch gleich n wirklich negativ nimmt:

$$\int\frac{dx}{x^n\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} = \frac{-\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{(n-1)\,\alpha\,x^{n-1}}$$

$$-\frac{(n-\frac{3}{2})\beta}{(n-1)\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}$$

$$-\frac{(n-2)\gamma}{(n-1)\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}\,..(D'$$

Beispiele.

1) Setzt man in $(D$ $n=1$, so erhält man, wenn man Kürze halber das Trinom durch X bezeichnet:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt X} = \frac{\sqrt X}{\gamma} - \frac{\beta}{2\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt X}.$$

Für $n=2$ wird:

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt X} = \frac{x\sqrt X}{2\gamma} - \frac{3\beta}{4\gamma}\int\frac{x\,dx}{\sqrt X} - \frac{\alpha}{2\gamma}\int\frac{dx}{X}$$

u. s. w., wodurch die folgenden Integrale immer durch die nächst vorhergehenden ausgedrückt und bestimmt werden, so, daſs man durch allmählige Substitutionen endlich das Integral $\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt X}$ erhält, wobei n eine ganze positive Zahl bezeichnet.

2) Setzt man eben so in $(D'$ [da das Integral für $n=1$ schon bekannt ist, §. 117, (4] nach und nach $n=2, 3, \ldots$; so erhält man der Reihe nach:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt X} = \frac{-\sqrt X}{\alpha x} - \frac{\beta}{2\alpha}\int\frac{dx}{x\sqrt X}$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{-\sqrt{X}}{2\alpha x^2} - \frac{3\beta}{4\alpha}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X}} - \frac{\gamma}{2\alpha}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

u. s. w.,

so, daſs man durch die wiederholte Substitution der vorhergehenden Integralausdrücke in die nächstfolgenden, und wenn man zuletzt auch für $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ aus Form.(4., §. 117., den Werth setzt, endlich auf das Integral $\int\frac{dx}{x^n\sqrt{X}}$ gelangt, wobei n jede ganze positive Zahl seyn kann.

Anmerk. Da

$$x^n dx \sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} = \frac{x^n dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}$$
$$= \frac{\alpha x^n dx}{\sqrt{X}} + \frac{\beta x^{n+1} dx}{\sqrt{X}} + \frac{\gamma x^{n+2} dx}{\sqrt{X}}$$

und

$$\frac{dx\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{x^n} = \frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)dx}{x^n\sqrt{X}}$$
$$= \frac{\alpha dx}{x^n\sqrt{X}} + \frac{\beta dx}{x^{n-1}\sqrt{X}} + \frac{\gamma dx}{x^{n-2}\sqrt{X}}$$

ist; so sieht man, daſs sich auch diese beiden Differentialausdrücke mit Hilfe der obigen Formeln (D und (D' integriren lassen, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Drittes Capitel.

Von der Integration einiger *transcendenten* Differentialformeln.

A) Bestimmung des Integrals $\int X dx$, wenn X *logarithmische* oder *Exponentialgröfsen* enthält.

§. 139.

Um das Integral $\int X' l^n x\, dx$ zu finden, wenn X' eine solche algebraische Function von x bezeichnet, dafs $\int X' dx$ nach den vorigen Capiteln bestimmt werden kann; so setze man in der ursprünglichen Reductionsformel (α, §. 124., $u = l^n x$ und $dv = X' dx$. Dadurch wird

$$du = n l^{n-1} x \frac{dx}{x} \text{ und } v = \int X' dx = \varphi(x);$$

folglich nach der genannten Formel:

$$\int X' dx\, l^n x = \varphi(x) l^n x - n \int \frac{\varphi(x)}{x} l^{n-1} x\, dx,$$

oder, wenn man die nun ebenfalls algebraische Function $\frac{\varphi(x)}{x} = X''$ setzt, auch:

$$\int X' dx\, l^n x = \varphi(x) l^n x - n \int X'' dx\, l^{n-1} x \ldots (a.$$

Auf diese Weise hat man wieder eine besondere Reductionsformel erhalten, welche durch wiederholte Anwendung den Exponenten n nach und nach um 1, 2, 3 ... Einheiten vermindert, und endlich, wenn n eine ganze positive Zahl ist, das gegebene Integral auf jenes: $\int X dx$ bringet, wo X eine algebraische Function von x ist.

Bestimmt man, um eine ähnliche Reductionsformel für negative Werthe von n zu erhalten, aus (a das zweite Integral, setzt statt n: $n + 1$ und nimmt endlich n negativ; so erhält man

$$\int \frac{X'' \, dx}{l^n x} = \frac{-\varphi(x)}{(n-1)\, l^{n-1} x} + \frac{1}{n-1} \int \frac{X' \, dx}{l^{n-1} x} \; . \; . \; . \; (a'$$

dabei ist $\varphi(x) = x X''$ und $X' = \frac{d \, . \, \varphi(x)}{dx}$.

§. 140.

Beispiele.

1) Um das Integral $\int x^m dx \, l^n x$ zu bestimmen, hat man nach der Formel (*a*:

$$X' = x^m, \; \varphi(x) = \int X' dx = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$\text{und } X'' = \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{x^m}{m+1};$$

folglich

$$\int x^m dx \, l^n x = \frac{x^{m+1} \, l^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m dx \, l^{n-1} x.$$

Setzt man ferner in dieser Formel statt n nach und nach $n-1$, $n-2$, ...; so erhält man der Reihe nach:

$$\int x^m dx \, l^{n-1} x = \frac{x^{m+1} \, l^{n-1} x}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int x^m dx \, l^{n-2} x$$

$$\int x^m dx \, l^{n-2} x = \frac{x^{m+1} \, l^{n-2} x}{m+1} - \frac{n-2}{m+1} \int x^m dx \, l^{n-3} x$$

u. s. w.,

und wenn man das zuletzt bestimmte Integral immer in die unmittelbar vorhergehende Gleichung substituirt, endlich:

$$\int x^m dx \, l^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} l^{n-2} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} l^{n-3} x + \ldots \right] + C \ldots (1$$

eine Reihe, welche immer abbricht, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Aus dieser Formel lassen sich nun leicht die besondern Fälle von $n = 1, 2, 3, \ldots$ ableiten.

Anmerk. Für $m = -1$ wird diese Formel (1, wie man sieht, unbrauchbar. Es läſst sich aber das betreffende Integral $\int \frac{dx}{x} l^n x$ bestimmen, indem man $l\,x = z$ setzt; denn dadurch wird $\frac{dx}{x} = dz$ und

$$\int \frac{dx}{x} l^n x = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \text{ oder } \int \frac{dx}{x} l^n x = \frac{l^{n+1} x}{n+1} + C.$$

2) Zur Bestimmung des Integrals $\int \frac{x^m\,dx}{l^n x}$ hat man nach der Formel (a' (des vorigen Paragraphes):

$X'' = x^m$, $\varphi(x) = x X'' = x^{m+1}$ und $X' = \frac{d\,.\,\varphi(x)}{dx} = (m+1)\,x^m$;
folglich

$$\int \frac{x^m\,dx}{l^n x} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)\,l^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{l^{n-1} x};$$

aus welcher Formel ebenfalls, wenn man, wie im vorigen Beispiel, statt n nach und nach $n-1$, $n-2$, ... setzt und die entstehenden Integralausdrücke immer in die vorhergehende Gleichung substituirt, zuletzt folgt:

$$\int \frac{x^m\,dx}{l^n x} =$$

$$\frac{-x^{m+1}}{n-1}\left[\frac{1}{l^{n-1} x} + \frac{m+1}{(n-2)\,l^{n-2} x} + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)\,l^{n-3} x} + \ldots\right]$$

$$+ \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}\int \frac{x^m\,dx}{lx} + C \ldots (1'$$

so, daſs das zu suchende Integral endlich von jenem $\int \frac{x^m\,dx}{lx}$ abhängt, welchem man eine einfachere Form geben kann, wenn man $x^{m+1} = z$ setzt; denn dadurch wird

$x^m\,dx = \frac{dz}{m+1}$ und $lx = \frac{lz}{m+1}$; also $\int \frac{x^m\,dx}{lx} = \int \frac{dz}{lz}$,

ein Integral, welches auch, wenn man $lz = w$ setzt, auf jenes $\int \frac{e^w\,dw}{w}$ gebracht werden kann, und welches wir weiter unten [§. 154., 12)] durch eine Reihe darstellen werden.

3) Um das Integral $\int \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ zu finden, hat man nach der Formel (a:

$$n = 1, \quad X' = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}};$$

also $\varphi(x) = \int X'\,dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \sqrt{(a^2+x^2)}$ (§. 107., 7.)

$$\text{und } X'' = \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{x};$$

folglich $\int \frac{x\,dx\,lx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \sqrt{(a^2+x^2)}\,.\,lx - \int \frac{dx}{x}\sqrt{(a^2+x^2)}$.

Da nun ferner

$$\frac{dx}{x}\sqrt{(a^2+x^2)} = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + \frac{a^2\,dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}},$$

also $\int\frac{dx}{x}\sqrt{(a^2+x^2)} = \sqrt{(a^2+x^2)} + a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}} =$

$$\sqrt{(a^2+x^2)} + a\,l\left(\frac{-a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x}\right) + C$$

[§. 117., Form. (4, wenn man $\alpha = a^2$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ setzt und $a\,l\,2\,a$ zur Constante C rechnet] ist; so hat man endlich, wenn man diesen Werth oben substituirt und reducirt:

$$\int\frac{x\,dx\,l\,x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \sqrt{(a^2+x^2)}.(l\,x-1) + a\,l\left(\frac{a+\sqrt{[a^2+x^2]}}{x}\right) + C$$

$\left\{\text{wegen} - l\left(\frac{-a+\sqrt{[a^2+x^2]}}{x}\right) = l\left[\frac{x[a+\sqrt{(a^2+x^2)}]}{x^2}\right]\right\}$.

§. 141.

Um das Integral $\int X a^x\,dx$ zu bestimmen, setze man in der Fundamentalformel (α, §. 124., $u = X$ und $dv = a^x\,dx$; so wird $du = dX = X'\,dx$, wo X' eine neue Function von x bezeichnet (§. 5.) und $v = \frac{a^x}{l\,a}$ [§. 105, Form. 5)]; mithin nach dieser Formel:

$$\int X a^x\,dx = \frac{X a^x}{l\,a} - \frac{1}{l\,a}\int X' a^x\,dx \;...\;(b$$

und eben so

$$\int X' a^x\,dx = \frac{X' a^x}{l\,a} - \frac{1}{l\,a}\int X'' a^x\,dx$$

$$\int X'' a^x\,dx = \frac{X'' a^x}{l\,a} - \frac{1}{l\,a}\int X''' a^x\,dx$$

u. s. w.

dabei ist $d.X = X'\,dx$, $d.X' = X''\,dx$, $d.X'' = X'''\,dx$, .. gesetzt, so, daſs also

$$X' = \frac{dX}{dx},\quad X'' = \frac{dX'}{dx} = \frac{d^2X}{dx^2},\quad X''' = \frac{dX''}{dx} = \frac{d^3X}{dx^3}$$

u. s. w. ist (dx wird als constant genommen).

Werden diese Integralausdrücke von unten hinauf substituirt und zugleich auch die vorigen Werthe von X', X'', .. gesetzt; so erhält man

$$\int X a^x\,dx =$$

$$\frac{a^x}{la}\left(X - \frac{1}{la}\frac{dX}{dx} + \frac{1}{l^2a}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{l^3a}\frac{d^3X}{dx^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{l^{n-1}a}\frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}}\right)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{l^n a}\int \frac{d^n X}{dx^n}\, a^x\,dx \;.\;.\;. \;(2.$$

Ist nun X eine solche Function von x, daſs für irgend einen Werth von n, $\frac{d^n X}{dx^n} = 0$ wird; so verschwindet der summatorische Theil und die Reihe bricht ab.

§. 142.

Beispiele.

1) Für $X = x^n$ ist $\frac{dX}{dx} = n x^{n-1}$, $\frac{d^2X}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$ u. s. w.; also, wenn n eine ganze positive Zahl ist:

$$\int x^n a^x\,dx =$$

$$\frac{a^x}{la}\left[x^n - \frac{nx^{n-1}}{la} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{l^2a} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{l^n a}\right] + C \;..(3$$

[hier wird erst $\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}} = 0$].

2) Ist n negativ, so erhält man durch Umkehrung der obigen Formel (b, wo $X = x^n$, also $X' = nx^{n-1}$ ist:

$\int x^{n-1} a^x\,dx = \frac{x^n a^x}{n} - \frac{la}{n}\int x^n a^x\,dx$, oder, wenn man statt n: $n+1$ setzt und dann n negativ nimmt:

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^n} = \frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1}\int \frac{a^x\,dx}{x^{n-1}} \;.\;.\;. \;(b'$$

und daraus erhält man, wenn man wieder statt n nach und nach $n-1$, $n-2$, . . . setzt und die entstehenden Integralausdrücke immer wieder in die vorhergehende Gleichung substituirt:

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^n} =$$

$$\frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}}\left[1 + \frac{x\,la}{n-2} + \frac{x^2 l^2 a}{(n-2)(n-3)} + \ldots + \frac{x^{n-2} l^{n-2} a}{(n-2)(n-3)\ldots 2.1}\right]$$

$$+ \frac{l^{n-1}a}{(n-1)(n-2)\;.\;.\;.\;2.1}\int a^x \frac{dx}{x};$$

man kann nämlich, da die Formel (b' für $n = 1$ nichts gibt, die Reduction nicht weiter treiben, so, daſs man also wieder zuletzt auf das im §. 140. erwähnte Integral von der Form $\int \frac{e^w\,dw}{w}$ kommt.

3) Ist n gebrochen, so bricht die vorige Reihe nicht ab; ist z. B. $n = \frac{1}{2}$, so erhält man daraus

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}} = 2\,a^x \sqrt{x}\left(1 - \frac{2xla}{1.3} + \frac{4x^2l^2a}{1.3.5} - \frac{8x^3l^3a}{1.3.5.7} + \ldots\right) + C$$

oder auch, wenn man in der Formel (3 $n = -\frac{1}{2}$ setzt:

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}} = \frac{a^x}{la.\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2\,x\,l\,a} + \frac{1\,.\,3}{4\,x^2\,l^2\,a} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{8\,x^3\,l^3\,a} + \ldots\right) + C.$$

B) **Bestimmung des Integrals $\int X dx$, wenn X *Kreisfunctionen* von x enthält.**

§. 143.

Setzt man in den Formeln 7)—10), §. 105. (Note) statt x: nx, also statt dx: ndx; so erhält man zuerst die ganz einfachen Fälle:

1) $\int cos.\,nx\,dx = \frac{sin.\,n\,x}{n}$; 2) $\int sin.\,n\,x\,d\,x = -\frac{cos.\,n\,x}{n}$;

3) $\int \frac{d\,x}{cos.^2\,n\,x} = \frac{1}{n}\,tang.\,n\,x$; 4) $\int \frac{d\,x}{sin.^2\,n\,x} = -\frac{1}{n}\,cot.\,n\,x$;

welchen Ausdrücken noch durchgehends die willkürliche Constante C beizufügen ist.

§. 144.

Um die Integrale

$$\int sin.\,x\,cos.\,x\,d\,x;\quad \int tang.\,x\,d\,x;\quad \int cot.\,x\,d\,x;$$

$$\int \frac{d\,x}{sin.\,x\,cos.\,x};\quad \int \frac{d\,x}{sin.\,x}\ \text{und}\ \int \frac{d\,x}{cos.\,x}$$

zu finden, hat man der Reihe nach:

1) $\int sin.\,x\,cos.\,x\,d\,x = \int sin.\,x\,d\,.\,sin.\,x = \frac{sin.^2\,x}{2} + C$

2) $\int tang.\,x\,d\,x = \int \frac{sin.\,x\,d\,x}{cos.\,x} = -\int \frac{d\,.\,cos.\,x}{cos.\,x} = -l\,cos.\,x =$

$l.\frac{1}{cos.\,x} = l\,.\,sec.\,x + C$ (§. 108.)

$$3)\ \int cot.\,x\,dx = \int\frac{cos.\,x\,dx}{sin.\,x} = \int\frac{d.\,sin.\,x}{sin.\,x} = l.\,sin.\,x$$

$$= -\,l.\frac{1}{sin.\,x} = -\,l.\,cosec.\,x + C.$$

Anmerk. Einfacher folgt dieses letztere Integral aus dem vorhergehenden, wenn man darin statt x: $90 - x$, also statt dx: $d(90 - x) = -\,dx$ schreibt.

$\int\frac{dx}{sin.\,x\,cos.\,x} = \int\frac{\frac{dx}{cos.^2 x}}{tang.\,x}$, wenn man nämlich Zähler und Nenner durch $cos.^2 x$ dividirt. Da ferner [Form. 9), §. 105.] $\frac{dx}{cos.^2 x} = d.\,tang.\,x$ und (§. 108.) $\int\frac{d.\,tang.\,x}{tang.\,x} = l.\,tang.\,x$ ist; so hat man endlich

$$4)\ \int\frac{dx}{sin.\,x\,cos.\,x} = l.\,tang.\,x + C.$$

Ferner ist wegen $sin.\,x = 2\,sin.\,\tfrac{1}{2}x\,cos.\,\tfrac{1}{2}x$;

$$5)\ \int\frac{dx}{sin.\,x} = \int\frac{d.\,\tfrac{1}{2}x}{sin.\,\tfrac{1}{2}x\,cos.\,\tfrac{1}{2}x} = l.\,tang.\,\tfrac{1}{2}x + C$$

[nach der vorigen Form 4)] und wenn man in dieser Formel statt x: $90 - x$, also statt dx: $-\,dx$ setzt:

$$6)\ \int\frac{dx}{cos.\,x} = -\,l.\,tang.\,(45 - \tfrac{1}{2}x) = l.\frac{1}{tang\,(45 - \tfrac{1}{2}x)}$$

$$= l.\,cot.\,(45 - \tfrac{1}{2}x) = l.\,tang.\,(45 + \tfrac{1}{2}x) + C$$

{wegen $cot.\,(45 - \tfrac{1}{2}x) = tang.\,[90 - (45 - \tfrac{1}{2}x)]$; was man auch unmittelbar erhält, wenn man in 5) statt x: $90 + x$ schreibt}.

§. 145.

Um Formeln für die Integrale $\int dx\,sin.\,nx\,cos.\,mx$, $\int dx\,cos.\,nx\,cos.\,mx$ u. s. w. zu erhalten, verfahre man auf folgende Art:

Es ist (Trigonom. S. 38, Form. 11 — 14)

$$2\,sin.\,\alpha\,cos.\,\beta = sin.\,(\alpha + \beta) + sin.\,(\alpha - \beta),$$
$$2\,sin.\,\beta\,cos.\,\alpha = sin.\,(\alpha + \beta) - sin.\,(\alpha - \beta),$$
$$2\,cos.\,\alpha\,cos.\,\beta = cos.\,(\alpha + \beta) + cos.\,(\alpha - \beta),$$
$$2\,sin.\,\alpha\,sin.\,\beta = cos.\,(\alpha - \beta) - cos.\,(\alpha + \beta).$$

Setzt man in jeder dieser vier Formeln $\alpha = nx$ und

$\beta = mx$; so gibt die erste, wenn man mit dx multiplicirt und durch 2 dividirt:

$$\sin. nx \cos. mx\, dx = \tfrac{1}{2}\sin. (n+m)\, x\, dx + \tfrac{1}{2}\sin. (n-m)\, x\, dx,$$

und wenn man integrirt:

$$\int dx \sin. nx \cos. mx = \tfrac{1}{2}\int dx \sin. (n+m)\, x + \tfrac{1}{2}\int dx \sin. (n-m)\, x;$$

endlich, wenn man im zweiten Theile dieser Gleichung die Integration nach §. 143. wirklich ausführt:

$$1) \int \sin. nx \cos. mx\, dx = -\frac{\cos. (n+m)\, x}{2\,(n+m)} - \frac{\cos. (n-m)\, x}{2\,(n-m)} + C.$$

Genau eben so erhält man aus den beiden letzten der vorigen vier Relationen (da die zweite keine neue Formel liefert):

$$2) \int \cos. nx \cos. mx\, dx = \frac{\sin. (n+m)\, x}{2\,(n+m)} + \frac{\sin. (n-m)\, x}{2\,(n-m)} + C$$

und

$$3) \int \sin. nx \sin. mx\, dx = \frac{\sin. (n-m)\, x}{2\,(n-m)} - \frac{\sin. (n+m)\, x}{2\,(n+m)} + C.$$

Anmerk. Soll z. B. in diesen drei Formeln die willkürliche Constante C so bestimmt werden, daſs das Integral für $x = 0$ verschwindet; so erhält man in der erstern: $C = \frac{n}{n^2 - m^2}$, und in den beiden letztern: $C = 0$.

§. 146.

Da sich jede ganze positive Potenz des Sinus und Cosinus durch die Sinusse und Cosinusse der vielfachen Bögen ausdrücken läſst, indem (Bd. I., §. 157.)

für n gerad:

$$\sin.^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\left[\cos. nx - n \cos. (n-2)\, x + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\cos. (n-4)\, x - \ldots\right],$$

für n ungerad:

$$\sin.^n x = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n}\left[\sin. n x - n \sin.(n-2) x + \ldots\right],$$

und für beide Fälle:

$$\cos.^n x = \frac{1}{2^n}\Big[\cos. n x + n \cos.(n-2) x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos.(n-4) x + \ldots\Big]$$

ist, wobei diese Reihen so weit fortzusetzen sind, bis einer der Binomialcoefficienten verschwindet; so folgt, daſs sich die Integrale $\int \sin.^n x\, dx$ und $\int \cos.^n x\, dx$ auf jene des §. 143. zurückführen lassen.

Beispiele.

1) Um das Integral $\int \sin.^3 x\, dx$ zu bestimmen, hat man, wegen $\sin.^3 x = \frac{3}{4} \sin. x - \frac{1}{4} \sin. 3x$:

$$\int \sin.^3 x\, dx = \tfrac{3}{4}\int \sin. x\, dx - \tfrac{1}{4}\int \sin. 3x\, dx$$
$$= -\tfrac{3}{4}\cos. x + \tfrac{1}{12}\cos. 3x + C.$$

2) Um $\int \cos.^4 x\, dx$ zu finden, ist, wegen
$\cos.^4 x = \frac{1}{8}\cos. 4x + \frac{1}{2}\cos. 2x + \frac{3}{8}$ *):

$$\int \cos.^4 x\, dx = \tfrac{1}{8}\int \cos. 4x\, dx + \tfrac{1}{2}\int \cos. 2x\, dx + \tfrac{3}{8}\int dx$$
$$= \frac{\sin. 4x}{4 \cdot 8} + \frac{\sin. 2x}{2 \cdot 2} + \tfrac{3}{8}x + C \text{ (§. 143.).}$$

§. 147.

Setzt man eben so in dem Differentialausdrucke

$$\sin.^n x \cos.^m x\, dx$$

für $\sin.^n x$ und $\cos.^m x$ die (im vorigen Paragraphe angeführten) Werthe durch Sinus und Cosinus der vielfachen Bögen ausgedrückt; so wird die Integration eines solchen Ausdruckes, oder die Bestimmung der Integrale von der Form $\int \sin.^n x \cos.^m x\, dx$ sofort auf jene der im §. 145. behandelten Integrale zurückgeführt.

*) Was man auch, wenn man die obigen Formeln nicht erst anwenden will, in der Trigonometrie Seite 49, oder in der Formelsammlung Seite 20 schon entwickelt findet.

Beispiel.

Um z. B. das Integral $\int sin.^2 x\, cos.^3 x\, dx$ zu bestimmen, hat man, wegen

$sin.^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos.\, 2x$ und $cos.^3 x = \frac{3}{4} cos.\, x + \frac{1}{4} cos.\, 3x$,

auch

$$sin.^2 x\, cos.^3 x = \tfrac{3}{8} cos.\, x + \tfrac{1}{8} cos.\, 3x - \tfrac{3}{8} cos.\, x\, cos.\, 2x - \tfrac{1}{8} cos.\, 2x\, cos.\, 3x,$$

und daher

$$\int sin.^2 x\, cos.^3 x\, dx = \tfrac{3}{8}\int cos.\, x\, dx + \tfrac{1}{8}\int cos.\, 3x\, dx - \tfrac{3}{8}\int cos.\, x\, cos.\, 2x\, dx - \tfrac{1}{8}\int cos.\, 2x\, cos.\, 3x\, dx.$$

Nun ist aber $\int cos.\, x\, dx = sin.\, x$, $\int cos.\, 3x\, dx = \frac{1}{3} sin.\, 3x$, $\int cos.\, x\, cos.\, 2x\, dx = \frac{1}{6} sin.\, 3x + \frac{1}{2} sin.\, x$ [§. 145., Form. 2)] und $\int cos.\, 2x\, cos.\, 3x\, dx = \frac{1}{10} sin.\, 5x + \frac{1}{2} sin.\, x$; folglich, wenn man diese Werthe substituirt und die ganz einfache Reduction vornimmt, auch:

$$\int sin.^2 x\, cos.^3 x\, dx = \tfrac{1}{8}(sin.\, x - \tfrac{1}{6} sin.\, 3x - \tfrac{1}{10} sin.\, 5x) + C.$$

Will man endlich wieder die Sinus der vielfachen durch die der einfachen Bogen ausdrücken; so hat man noch, wegen $sin.\, 3x = 3\, sin.\, x - 4\, sin.^3 x$ und $sin.\, 5x = 5\, sin.\, x - 20\, sin.^3 x + 16\, sin.^5 x$ [Trig. S. 40, oder Bd. I., §. 155., Form. 3)], nach vollendeter Reduction:

$$\int sin.^2 x\, cos.^3 x\, dx = \tfrac{1}{3} sin.^3 x - \tfrac{1}{5} sin.^5 x + C.$$

Anmerk. Im folgenden Paragraphe werden noch andere Methoden zur Entwickelung dieser Integrale aufgestellt werden.

§. 148.

Um sogleich ganz allgemein das Integral

$$\int sin.^n x\, cos.^m x\, dx$$

für ganze positive oder negative Werthe von n und m auf einem andern Wege zu bestimmen, setze man $sin.\, x = z$; so wird $cos.\, x = \sqrt{(1 - z^2)}$, $cos.\, x\, dx = dz$, also $dx = \frac{dz}{cos.\, x} = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$; daher

$$\int sin.^n x\, cos.^m x\, dx = \int z^n (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dz}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int z^n dz (1 - z^2)^{\frac{m-1}{2}};$$

dadurch ist also unser Integral auf die im vorigen Capitel behandelte Form $\int x^n dx(a + bx^m)^p$ zurückgeführt.

Setzt man nun in den Reductionsformeln (B, (C, (B' und (C' (§. §. 128. und 130.) $a = 1$, $b = -1$, $m = 2$, $p = \frac{m-1}{2}$, läſst n ungeändert und schreibt statt x: z; so erhält man der Reihe nach

aus (B: $\int z^n dz(1-z^2)^{\frac{m-1}{2}} = \frac{z^{n-1}(1-z^2)^{\frac{m+1}{2}}}{-(m+n)}$

$$+ \frac{n-1}{m+n}\int z^{n-2} dz(1-z^2)^{\frac{m-1}{2}}$$

aus (C: detto. $= \frac{z^{n+1}(1-z^2)^{\frac{m-1}{2}}}{m+n}$

$$+ \frac{m-1}{m+n}\int z^n dz(1-z^2)^{\frac{m-3}{2}};$$

aus (B': detto. $= \frac{z^{n+1}(1-z^2)^{\frac{m+1}{2}}}{n+1}$

$$+ \frac{m+n+2}{n+1}\int z^{n+2} dz(1-z^2)^{\frac{m-1}{2}}$$

aus (C': detto. $= -\frac{z^{n+1}(1-z^2)^{\frac{m+1}{2}}}{m+1}$

$$+ \frac{m+n+2}{m+1}\int z^n dz(1-z^2)^{\frac{m+1}{2}}.$$

Geht man jetzt in diesen vier Formeln wieder auf die ursprünglichen Werthe in x zurück, indem man bemerkt, daſs

$z = \sin. x$, $(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = \cos. x$ und $dz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = dx$,

also

$dz(1-z^2)^{\frac{m-1}{2}} = \cos.^m x\, dx$, $dz(1-z^2)^{\frac{m+1}{2}} = \cos.^{m+2} x\, dx$

u. s. w. ist; so erhält man folgende vier besondere Reductionsformeln:

für n positiv:

$$\int \sin.^n x \cos.^m x\, dx = -\frac{\sin.^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n}$$
$$+\frac{n-1}{m+n}\int \sin.^{n-2} x \cos.^m x\, dx \ldots (1,$$

für m positiv:

$$\int \sin.^n x \cos.^m x\, dx = \frac{\sin.^{n+1} x \cos.^{m-1} x}{m+n}$$
$$+\frac{m-1}{m+n}\int \sin.^n x \cos.^{m-2} x\, dx \ldots (2\ ^*);$$

für n negativ:

$$\int \frac{\cos^m x\, dx}{\sin.^n x} = -\frac{\cos.^{m+1} x}{(n-1)\sin.^{n-1} x}$$
$$-\frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos.^m x\, dx}{\sin.^{n-2} x} \ldots (3,$$

für m negativ:

$$\int \frac{\sin.^n x\, dx}{\cos.^m x} = \frac{\sin.^{n+1} x}{(m-1)\cos.^{m-1} x}$$
$$-\frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin.^n x\, dx}{\cos^{m-2} x} \ldots (4\ ^{**}).$$

Nimmt man ferner in (3 m und in (4 n negativ, so erhält man auch

$$\int \frac{dx}{\sin.^n x \cos.^m x} = \frac{-1}{(n-1)\sin.^{n-1} x \cos.^{m-1} x}$$
$$+\frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin.^{n-2} x \cos.^m x} \ldots (5,$$

$$\text{detto.} = \frac{1}{(m-1)\sin.^{n-1} x \cos.^{m-1} x}$$
$$+\frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin.^n x \cos.^{m-2} x} \ldots (6.$$

Setzt man endlich noch in (1 $m = 0$ und in (2 $n = 0$, so erhält man zugleich:

$$\int \sin.^n x\, dx = -\frac{\sin.^{n-1} x \cos. x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin.^{n-2} x\, dx. (7,$$

$$\int \cos.^m x\, dx = \frac{\sin. x \cos.^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos.^{m-2} x\, dx. (8.$$

*) Diese Formel entsteht auch ganz einfach aus der vorhergehenden (1, wenn man statt x, $90 - x$ schreibt, und dann n und m mit einander verwechselt.

**) Auf dieselbe Weise entsteht auch diese Formel aus jener (3.

Und wenn man eben so in (3 $m=0$ und in (4 $n=0$ setzt:

$$\int\frac{dx}{\sin.^n x}=\frac{-\cos.x}{(n-1)\sin.^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin.^{n-2}x}\ldots (9$$

$$\int\frac{dx}{\cos.^m x}=\frac{\sin.x}{(m-1)\cos.^{m-1}x}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{\cos.^{m-2}x}\ldots (10\ ^*).$$

*) Es wird gut seyn zu bemerken, dafs die beiden ersten Reductionsformeln (1 und (2, aus welchen sich sofort alle folgenden von (3 bis (10 sehr leicht ableiten lassen, auch auf folgende Art entwickelt werden können:

Es ist

$$d.\sin.^p x\cos.^q x = p\sin.^{p-1}x\cos.^{q+1}x\,dx$$
$$-\,q\sin.^{p+1}x\cos.^{q-1}x\,dx \ldots (a.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\cos.^{q+1}x=\cos.^{q-1}x\cos.^2 x=\cos.^{q-1}x(1-\sin.^2 x)=$$
$$\cos.^{q-1}x-\sin.^2 x\cos.^{q-1}x;$$

so wird auch

$$d.\sin.^p x\cos.^q x = p\sin.^{p-1}x\cos.^{q-1}x\,dx$$
$$-\,(p+q)\sin.^{p+1}x\cos.^{q-1}x\,dx.$$

Setzt man dagegen in dieser Gleichung (a

$$\sin.^{p+1}x=\sin.^{p-1}x(1-\cos.^2 x)=\sin.^{p-1}x-\sin.^{p-1}x\cos.^2 x,$$

so wird

$$d.\sin.^p x\cos.^q x=(p+q)\sin.^{p-1}x\cos^{q+1}x\,dx$$
$$-\,q\sin.^{p-1}x\cos.^{q-1}x\,dx.$$

Diese beiden Differentialgleichungen integrirt, geben

$$\sin.^p x\cos.^q x = p\int\sin.^{p-1}x\cos.^{q-1}x\,dx$$
$$-\,(p+q)\int\sin.^{p+1}x\cos.^{q-1}x\,dx$$

und

$$\sin.^p x\cos.^q x=(p+q)\int\sin.^{p-1}x\cos.^{q+1}x\,dx$$
$$-\,q\int\sin.^{p-1}x\cos.^{q-1}x\,dx.$$

Aus der erstern dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\int\sin.^{p+1}x\cos.^{q-1}x\,dx=-\frac{\sin.^p x\cos.^q x}{p+q}$$
$$+\frac{p}{p+q}\int\sin.^{p-1}x\cos.^{q-1}x\,dx$$

und aus der letztern:

$$\int\sin.^{p-1}x\cos.^{q+1}x\,dx=\frac{\sin.^p x\cos.^q x}{p+q}$$
$$+\frac{q}{p+q}\int\sin.^{p-1}x\cos.^{q-1}x\,dx.$$

Setzt man nun in der Reductionsformel (1 statt n nach und nach $n-2$, $n-4$, . . . ; so kommt man endlich (wenn n eine ganze positive Zahl ist) auf das Integral $\int cos.^m x\, dx$ oder auf jenes $\int sin. x\, cos.^m x\, dx$, je nachdem n gerad oder ungerad ist.

Auf die nämliche Art führt auch die zweite Formel (2, wenn man statt m nach und nach $m-2$, $m-4$, . . . setzt und die gefundenen Werthe immer wieder substituirt, zuletzt, je nachdem m eine gerade oder ungerade positive Zahl ist, auf $\int sin.^n x\, dx$ oder $\int cos. x\, sin.^n x\, dx$.

Was nun diese vier letzten Integrale betrifft, so ist sofort

$$\int cos.^m x\, sin. x\, dx = -\int cos.^m x\, d. cos. x = -\frac{cos.^{m+1} x}{m+1} + C$$

(nach der Regel der Monome) und

$$\int sin.^n x\, cos. x\, dx = \int sin.^n x\, d. sin. x = \frac{sin.^{n+1} x}{n+1} + C.$$

Um ferner das Integral $\int cos.^m x\, dx$ zu finden, wird man die Formel (8 wiederholt anwenden und durch fortgesetzte Substitutionen von $m-2$, $m-4$, . . . statt m, und dann der entstehenden Integrale in die nächst vorhergehenden Gleichungen, endlich, je nachdem m gerade oder ungerade ist, auf

$$\int dx = x + C \text{ oder } \int cos. x\, dx = sin. x + C$$

kommen.

Auf die nämliche Art findet man das Integral $\int sin.^n x\, dx$

Setzt man endlich noch in der ersten dieser beiden Formeln $p = n-1$, $q = m+1$, und in der zweiten $p = n+1$, $q = m-1$; so erhält man sofort:

$$\int sin.^n x\, cos.^m x\, dx = -\frac{sin.^{n-1} x\, cos.^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int sin.^{n-2} x\, cos.^m x\, dx$$

und auch

$$\int sin.^n x\, cos.^m x\, dx = \frac{sin.^{n+1} x\, cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int sin.^n x\, cos.^{m-2} x\, dx$$

wie oben in (1 und (2.

aus der Formel (7, indem man in dieser statt n nach und nach $n-2$, $n-4$, ... setzt und zuletzt, je nachdem wieder n gerad oder ungerad ist, auf das Integral

$$\int dx = x + C \text{ oder } \int sin.\, x\, dx = -cos.\, x + C$$

herabkommt.

Was endlich die (für negative Werthe von n und m entwickelten) Formeln (3 — (6 anbelangt, so kommt man durch die nöthigen und leicht zu ersehenden wiederholten Substitutionen, da n und m als ganze Zahlen vorausgesetzt werden, endlich

in der Formel (3 auf $\int cos.^m x\, dx$ oder $\int \frac{cos.^m x\, dx}{sin.\, x}$

» » » (4 » $\int sin.^n x\, dx$ » $\int \frac{sin.^n x\, dx}{cos.\, x}$

» » » (5 » $\int \frac{dx}{cos.^m x}$ » $\int \frac{dx}{sin.\, x\, cos.^m x}$

und » » » (6 » $\int \frac{dx}{sin.^n x}$ » $\int \frac{dx}{sin.^n x\, cos\, x}$

je nachdem n und m gerade oder ungerade Zahlen sind.

Von diesen acht letzten Integralen sind zwei schon vorhin angeführt und bestimmt worden; die sechs übrigen betreffend, so findet man jene $\int \frac{dx}{sin^n x}$ und $\int \frac{dx}{cos.^m x}$ aus den Formeln (9 und (10, indem man durch die bereits oft erwähnten wiederholten Substitutionen zuletzt auf die bekannten Integrale

$\int dx$ oder $\int \frac{dx}{sin.\, x}$ [§. 144., 5)] und $\int dx$ oder $\int \frac{dx}{cos.\, x}$ [§. 144., 6)]

kommt.

Setzt man weiters in der Formel (1 $m = -1$ und in jener (2 $n = -1$, so erhält man

$$\int \frac{sin.^n x\, dx}{cos.\, x} = -\frac{sin.^{n-1} x}{n-1} + \int \frac{sin.^{n-2} x\, dx}{cos.\, x}$$

$$\text{und } \int \frac{cos.^m x\, dx}{sin.\, x} = \frac{cos^{m-1}}{m-1} + \int \frac{cos^{m-2} x\, dx}{sin.\, x};$$

es werden also diese beiden Integrale gleichfalls wieder durch wiederholte Anwendung dieser beiden letzten Formeln

auf die bekannten Integrale

$$\int \frac{dx}{\cos. x} \text{ oder } \int \frac{\sin. x\, dx}{\cos. x} \text{ [§. 144., 2)]}$$

$$\text{und } \int \frac{dx}{\sin. x} \text{ oder } \int \frac{\cos. x\, dx}{\sin. x} \text{ [§. 144., 3)]}$$

reducirt oder von diesen abhängig gemacht.

Endlich erhält man für die noch übrigen beiden Integrale, wenn man in der Formel (5 $m = 1$ und in (6 $n = 1$ setzt:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos. x} = \frac{-1}{(n-1)\sin.^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin.^{n-2} x \cos. x}$$

$$\text{und } \int \frac{dx}{\sin. x \cos.^m x} = \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1} x} + \int \frac{dx}{\sin. x \cos.^{m-2} x}$$

so, daſs auch diese letztern Integrale durch wiederholte Anwendung der vorstehenden beiden Formeln zuletzt auf die bereits entwickelten Integrale (je nachdem n und m gerad oder ungerad sind)

$$\int \frac{dx}{\cos. x} \text{ oder } \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x} \text{ [§. 144., 4)]}$$

$$\text{und } \int \frac{dx}{\sin. x} \text{ oder } \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x}$$

zurückgeführt werden.

§. 149.

Beispiele.

1) Nehmen wir gleich wieder, zur Vergleichung, das Beispiel des §. 147. und suchen das Integral $\int \sin.^2 x \cos.^3 x\, dx$; so ist nach der Formel (1 des vorigen Paragraphes [man kann hier nach Belieben diese oder jene (2 anwenden] $n = 2$ und $m = 3$; folglich

$$\int \sin.^2 x \cos.^3 x\, dx = -\tfrac{1}{5} \sin. x \cos.^4 x + \tfrac{1}{5} \int \cos.^3 x\, dx;$$

da man aber nach der Formel (8

$$\int \cos.^3 x\, dx = \tfrac{1}{3} \sin. x \cos.^2 x + \tfrac{2}{3} \int \cos. x\, dx =$$

$$\tfrac{1}{3} \sin. x \cos.^2 x + \tfrac{2}{3} \sin. x + C$$

findet, so ist endlich, wenn man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung substituirt:

$$\int sin.^2 x \, cos.^3 x \, dx = -\tfrac{1}{5} sin.x \, cos.^4 x + \frac{1}{3.5} sin.x \, cos.^2 x$$
$$+ \frac{2}{3.5} sin.x + C\text{*)}.$$

2) Um das Integral $\int \frac{sin.^2 x \, dx}{cos.^3 x}$ zu finden, setze man in der Formel (4 $n = 2$ und $m = 3$; so erhält man

$$\int \frac{sin.^2 x \, dx}{cos.^3 x} = \frac{sin.^3 x}{2 \, cos.^2 x} - \tfrac{1}{2} \int \frac{sin.^2 x . dx}{cos. x}.$$

Setzt man ferner in der Formel (1 (vor. Paragr.) $n = 2$ und $m = -1$; so wird wieder

$$\int \frac{sin.^2 x \, dx}{cos. x} = - sin. x + \int \frac{dx}{cos. x}$$
$$= - sin. x + l. tang. (45 + \tfrac{1}{2} x) + C \, [§. 144., 6)];$$

folglich, wenn man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung substituirt:

$$\int \frac{sin.^2 x \, dx}{cos.^3 x} = \frac{sin.^3 x}{2 \, cos.^2 x} + \tfrac{1}{2} sin. x - \tfrac{1}{2} l. tang. (45 + \tfrac{1}{2} x)$$
$$= \frac{sin. x}{2 \, cos.^2 x} - \tfrac{1}{2} l. tang. (45 + \tfrac{1}{2} x) + C,$$

wenn man nämlich die beiden ersten Brüche zusammennimmt und reducirt.

3) Um endlich noch das Integral

$$\int \frac{dx}{sin. x \, cos^4 x}$$

zu finden, hat man, wenn in der Form. (6 $n = 1$ und $m = 4$ gesetzt wird:

$$\int \frac{dx}{sin \, x \, cos^4 x} = \frac{1}{3 \, cos.^3 x} + \int \frac{dx}{sin. x \, cos.^2 x};$$

setzt man ferner in der nämlichen Formel $n = 1$ und $m = 2$, so wird auch

*) Will man diese Formel (wie im §. 147.) bloſs durch Sinusse ausdrücken; so hat man auch noch

$$\int sin.^2 x \, cos.^3 x \, dx = - \tfrac{1}{5} sin. x \, (1 - sin.^2 x)^2$$
$$+ \tfrac{1}{15} sin. x \, (1 - sin.^2 x) + \tfrac{2}{15} sin. x$$
$$= \tfrac{1}{3} sin.^3 x - \tfrac{1}{5} sin.^5 x + C$$

wie in §. 147.

$$\int \frac{dx}{\sin. x \cos.^2 x} = \frac{1}{\cos. x} + \int \frac{dx}{\sin. x}$$

$$= \frac{1}{\cos. x} + l.tang.\tfrac{1}{2}x + C \text{ [§. 144., 5)]};$$

folglich auch:

$$\int \frac{dx}{\sin. x \cos.^4 x} = \frac{1}{3\cos.^3 x} + \frac{1}{\cos. x} + l.tang.\tfrac{1}{2}x + C.$$

Anmerk. 1. Es ist für die Anwendung wichtig, zu bemerken, daſs zur Bestimmung des Integrals $\int \sin.^n x \cos.^m x\, dx$ die im vorigen Paragraphe aufgestellten Reductionsformeln ganz und gar entbehrlich werden, wenn von den Exponenten n und m wenigstens einer ungerad ist (ein Fall, der in der Mechanik öfters vorkommt); das in diesem Falle einzuschlagende Verfahren wollen wir sogleich durch ein paar Beispiele selbst erläutern.

a) Um das Integral $\int \sin.^2 x \cos.^3 x\, dx$ zu bestimmen, löse man (den Factor mit dem ungeraden Exponenten) $\cos.^3 x$ auf folgende Art auf:

$$\cos.^3 x = \cos. x \cos.^2 x = \cos. x (1 - \sin.^2 x);$$

so wird, wegen

$$\cos. x\, dx = d.\sin. x : \int \sin.^2 x \cos.^3 x\, dx$$
$$= \int \sin.^2 x\, d.\sin. x (1 - \sin.^2 x) = \int z^2 dz (1 - z^2),$$

wenn man nämlich zur Vereinfachung $\sin. x = z$ setzt. Nun ist aber

$$\int z^2 dz (1 - z^2) = \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + C,$$

folglich, wenn man den Werth von z wieder herstellt, endlich:

$$\int \sin.^2 x \cos.^3 x\, dx = \tfrac{1}{3}\sin.^3 x - \tfrac{1}{5}\sin.^5 x + C,$$

wie wir schon oben fanden.

b) Um noch eben so das Integral $\int \sin.^5 x \cos.^8 x\, dx$ zu bestimmen, hat man wegen $\sin.^5 x = \sin. x \sin.^4 x = \sin. x (1 - \cos.^2 x)^2$ und $\sin. x\, dx = -d.\cos. x$:

$$\int \sin.^5 x \cos.^8 x\, dx = -\int \cos.^8 x\, d.\cos. x (1 - \cos.^2 x)^2$$
$$= -\int z^8 dz (1 - z^2)^2,$$

wenn man nämlich noch $\cos. x = z$ setzt. Da nun aber (§. 107., 5.)

$$\int z^8 dz (1 - z^2)^2 = \int z^8 dz (1 - 2z^2 + z^4) = \tfrac{1}{9}z^9 - \tfrac{2}{11}z^{11} + \tfrac{1}{13}z^{13} + C$$

ist; so folgt endlich, wenn man wieder zurück substituirt:

$$\int \sin.^5 x \cos.^8 x\, dx = -\tfrac{1}{9}\cos.^9 x + \tfrac{2}{11}\cos.^{11} x - \tfrac{1}{13}\cos.^{13} x + C.$$

Es ist also allgemein nach diesem Verfahren:

$$\int \sin.^{2p+1} x \cos.^q x\, dx = -\int \sin.^{2p} x \cos.^q x\, d.\cos. x$$
$$= -\int z^q dz (1 - z^2)^p, \text{ für } \cos. x = z$$

und

$$\int \sin.^p x \cos.^{2q+1} x \, dx = \int \sin.^p x \cos.^{2q} x \, d.\sin.x$$
$$= \int z^p dz (1 - z^2)^q \text{, für } \sin.x = z.$$

(Sind beide Exponenten ungerad, so wird man, wie leicht zu begreifen, am vortheilhaftesten den kleinern davon auf diese Art zerlegen.)

Anmerk. 2. Sollte eine der obigen Reductionsformeln (des vor. Paragr.) für besondere Werthe von n und m aus dem Grunde unbrauchbar werden, weil der Nenner Null wird oder verschwindet; so ist das gesuchte Integral entweder schon auf andern Wegen gefunden worden, oder es läfst sich, durch eine andere Ordnung in der Anwendung dieser Formeln, die sich auch immer leicht von selbst ergibt, dieser Fall vermeiden.

Wäre z. B. $m + n = 0$, also $m = -n$; so könnte man offenbar keine der beiden Formeln (1 und (2 zur Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{\sin.^n x}{\cos.^n x} dx = \int tang.^n x \, dx$$

anwenden, sondern man müfste dieses Integral zuerst mittelst der Formel (4 auf jenes $\int \sin.^n x \, dx$ oder $\int \frac{\sin.^n x \, dx}{\cos. x}$, je nachdem n gerad oder ungerad ist, bringen, von denen das erstere nach Formel (7 und das letztere nach Formel (1, in welcher $m = -1$ zu nehmen ist und nach welcher man zuletzt auf $\int \frac{\sin. x \, dx}{\cos. x} = - l.\cos. x$ [§. 144., 2)] kommt, bestimmt werden kann.

Anmerk. 3. Sind endlich die Exponenten n und m gebrochen, so läfst sich das Integral $\int \sin.^n \cos.^m dx$, nur wenige Fälle ausgenommen, nicht mehr genau, sondern blofs näherungsweise mittelst Reihen finden; wozu wir weiter unten das Nöthige vortragen werden.

§. 150.

So wie man die irrationalen algebraischen Differentialausdrücke für die Integration rational zu machen sucht; so geht das Bestreben bei transcendenten Differentialformeln, welche sich, so wie sie vorliegen, zur Integration nicht eignen, dahin, diese durch zweckmäfsige Substitutionen auf eine algebraische Form zu bringen, davon das Integral

schon bekannt ist oder wenigstens gefunden werden kann. Für solche Kunstgriffe lassen sich indefs keine allgemeinen Regeln aufstellen, sondern eigene Uebung und Gewandtheit müssen hierbei das Meiste thun; wir wollen hier nur ein paar Beispiele der Art hersetzen.

Beispiel.

Um das Integral

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n}$$

zu finden, setze man $a + b\cos. x = z$; so wird

$$-b\sin. x\,dx = dz \quad \text{oder} \quad dx = \frac{-dz}{b\sin. x}$$

und wegen

$$\sin. x = \sqrt{(1 - \cos.^2 x)} = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{z-a}{b}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{[(b^2 - a^2) + 2az - z^2]},$$

$$\text{auch } dx = \frac{-dz}{\sqrt{[(b^2 - a^2) + 2az - z^2]}},$$

also

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos. x)^n} = -\int \frac{dz}{z^n\sqrt{[(b^2 - a^2) + 2az - z^2]}};$$

und dieses Integral läfst sich sofort nach §. 138., (D', weiter behandeln und entwickeln.

a) Um einen einfachen Fall wirklich durchzuführen, sey $n = 1$; so ist

$$\int \frac{dx}{a + b\cos. x} = -\int \frac{dz}{z\sqrt{[(b^2 - a^2) + 2az - z^2]}}.$$

Setzt man also zur Bestimmung dieses letztern Integrals in §. 117. [Formeln (4, (4' und (5] $\alpha = b^2 - a^2$, $\beta = 2a$, $\gamma = -1$, und statt x: z; so erhält man, wenn Kürze halber $b^2 - a^2 + 2az - z^2 = Z$ gesetzt wird:

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{Z}} = \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}\, l\left[\frac{2\sqrt{(b^2 - a^2)}\sqrt{Z} - 2(b^2 - a^2 + az)}{z}\right] \text{ für } b > a$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\, arc.\cos.\left[\frac{2az - 2(a^2 - b^2)}{z\sqrt{[4(b^2 - a^2) + 4a^2]}}\right] \text{ für } b < a$$

$$= -\frac{2}{2az}\sqrt{(2az - z^2)} \quad \text{für } b = a \text{ oder } \alpha = 0.$$

Setzt man in diesen drei Ausdrücken wieder für z seinen Werth $a + b\,cos.\,x$, so erhält man aus dem ersten, nach einer einfachen Reduction, und wenn man den beständigen Theil $\frac{l.\,2b}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$ zur unbestimmten Constante C rechnet:

$$\int \frac{dx}{a+b\,cos\,x} = -\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\, l\left(\frac{sin.x\sqrt{(b^2-a^2)}-(b+a\,cos.\,x)}{a + b\,cos.\,x}\right) + C$$

oder wenn man den Logarithmus positiv, dann im entstehenden Bruche den Nenner rational macht und zugleich den Theil $\frac{l\,(-1)}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$ zur Constante zählt, auch:

$$\int \frac{dx}{a + b\,cos.x} = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\, l \left[\frac{sin.x\,\sqrt{(b^2-a^2)} + b + a\,cos.x}{a + b\,cos.\,x}\right] + C.$$

Der zweite Ausdruck gibt

$$\int \frac{dx}{a + b\,cos.\,x} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\, arc.\,cos.\left[\frac{b + a\,cos.\,x}{a + b\,cos.\,x}\right] + C$$

[nach Form. (n, Note zu (4′] *); so wie endlich der dritte:

$$\int \frac{dx}{a + a\,cos\,x} = \frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{1-cos\,x}{1+cos.x}\right)} = \frac{1}{a}\,tang.\tfrac{1}{2}x + C \text{ (Trig. S.34).}$$

Anmerk. Diese letztere Formel findet man auch unmittelbar auf folgende Art:

Es ist

$$\int \frac{dx}{a\,(1 + cos.\,x)} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{2\,cos.^2\,\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{d.\,\frac{1}{2}x}{cos.^2\,\frac{1}{2}x} = \frac{1}{a} tang\,\tfrac{1}{2}x + C \text{ [§. 105., 9)].}$$

*) Dieses Integral kann auch noch, wenn man die in der Note zu (4′, §. 117., stehenden Formeln berücksichtiget, folgender Maſsen ausgedrückt werden:

$$\int \frac{dx}{a + b\,cos.\,x} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\, arc\,tang.\left(\frac{sin\,x\,\sqrt{[a^2 - b^2]}}{b + a\,cos.\,x}\right) + C$$

[nach Form. (q]

$$= \frac{2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\, arc.\,tang.\left[\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\,tang.\,\tfrac{1}{2}x\right] + C$$

[nach Form. (r]

u. s. w.

Noch andere Methoden zur Entwicklung dieses Integrals findet man in einer Note des Herrn *Lobatto à la Haye*, in *Crelle's* Journ. für die reine u. angew. Mathem. 9. Bd. S. 259.

Mehrere dergleichen Ausdrücke, als z. B.

$$\frac{dx}{a + b\,cos.\,x + c\,sin.\,x},\quad \frac{sin.^n\,x\,dx}{(a + b\,cos.\,x + c\,sin.\,x)^m},\ \text{etc.}$$

werden auf algebraische integrable Functionen gebracht, wenn man $tang.\,\frac{1}{2}x = z$ setzt; dadurch wird

$$sin.\,x = \frac{2z}{1+z^2},\quad cos.\,x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\ \text{und}\ dx = \frac{2\,dz}{1+z^2};$$

also werden sowohl die in diesen Ausdrücken vorkommenden trigonom. Functionen, so wie auch dx selbst rational.

§. 151.

Um das Integral $\int X\,dx\,arc.\,sin.\,x$ zu finden, wenn X eine algebraische Function von x ist, setze man in der ursprünglichen Reductionsformel (α, §. 124.:

$$dv = X\,dx \ \text{und}\ u = arc.\,sin.\,x;$$

so wird $v = \int X\,dx = X'$, welches Integral nach dem vorhergehenden Capitel zu bestimmen ist, und $du = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ demnach

$$\int X\,dx\,arc.\,sin.\,x = X'\,arc.\,sin.\,x - \int \frac{X'\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

wobei das letztere Integral ebenfalls algebraisch, und wenn es bestimmbar ist, nach dem Vorhergehenden gefunden wird.

Beispiel.

Es sey

$$X = x^n,\ \text{also}\ X' = \int X\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

so ist

$$\int x^n\,dx\,arc.\,sin.\,x = \frac{x^{n+1}\,arc.\,sin.\,x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

wobei das letzte Integral, auf welches das gesuchte somit zurückgeführt wird, bereits in §. 132. behandelt ist.

Auf die nämliche Art werden auch die Integralausdrücke $\int X\,dx\,arc.\,cos\,x$, $\int X\,dx\,arc.\,tang.\,x$, u. s. f. auf algebraische Integrale zurückgeführt.

§. 152.

Um das Integral $\int x^n \cos. x\, dx$ zu bestimmen, setze man in der vorhin genannten Reductionsformel (α:

$$dv = \cos. x\, dx \text{ und } u = x^n;$$

so wird $v = \sin. x$, $du = n x^{n-1} dx$ und

$$\int x^n \cos. x\, dx = x^n \sin. x - n \int x^{n-1} \sin. x\, dx.$$

Setzt man weiters in der nämlichen Formel

$$u = x^{n-1} \text{ und } dv = \sin. x\, dx;$$

so wird wieder

$$\int x^{n-1} dx \sin. x = - x^{n-1} \cos. x + (n-1) \int x^{n-2} \cos. x\, dx$$

und dann eben so

$$\int x^{n-2} \cos. x\, dx = x^{n-2} \sin. x - (n-2) \int x^{n-3} \sin. x\, dx$$

u. s. w., so, dafs wenn man diese Substitutionen fortsetzt, endlich

$$\int x^n \cos. x\, dx = x^n \sin. x + n x^{n-1} \cos. x - n(n-1) x^{n-2} \sin. x$$
$$- n(n-1)(n-2) x^{n-3} \cos. x + \ldots$$

wird, wobei diese Reihe abbricht, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Genau eben so bestimmt man auch das Integral

$$\int x^n \sin. x\, dx = - x^n \cos. x + n x^{n-1} \sin. x + \ldots$$

Anmerk. Da die Differentialausdrücke, welche den Bogen unmittelbar enthalten, sehr selten vorkommen; so können wir die ausführliche Entwickelung der Integrale von der Form

$$\int x^n dx \sin. x,\ \int \frac{\sin. x\, dx}{x^n},\ \int e^{mx} \sin. x^n dx,\ \int e^{mx} \sin. x^n \cos x^p dx$$

n. s. w., welche immer mit Hilfe der Reductionsformel (α §. 124., theilweise integrirt werden können, als minder wichtig übergehen und uns sofort mit der blofsen Andeutung einiger derselben begnügen.

Es ist nämlich, wenn man in der genannten Reductionsformel (α $u = x^n$ und $dv = dx \sin. x$ setzt, wodurch $du = n x^{n-1} dx$ und $v = - \cos. x$ wird:

$$\int x^n dx \sin. x = - x^n \cos. x + n \int x^{n-1} dx \cos. x.$$

Setzt man ferner wieder in derselben Formel $u = x^{n-1}$ und $dv = dx \cos. x$, so folgt weiters:

$$\int x^{n-1} dx \cos. x = x^{n-1} \sin. x - (n-1) \int x^{n-2} dx \sin. x$$

also durch Substitution in den vorigen Ausdruck:

$$\int x^n\, dx\, \sin.x = -x^n \cos.x + n x^{n-1} \sin.x - n(n-1)\int x^{n-2}\, dx \sin.x$$

als passende Reductionsformel, deren Anwendung für sich klar ist.

Auf dieselbe Art folgt:

$$\int x^n\, dx\, \cos.x = x^n \sin.x + n x^{n-1} \cos.x - n(n-1)\int x^{n-2}\, dx\, \cos.x.$$

Nimmt man in diesen beiden Formeln n negativ, bestimmt daraus das Integral im zweiten Theil der Gleichung und setzt endlich statt n: $n-2$; so erhält man:

$$\int \frac{dx\, \sin.x}{x^n} = \frac{-\cos.x}{(n-1)(n-2)\, x^{n-2}} - \frac{\sin.x}{(n-1)\, x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{dx\, \sin.x}{x^{n-2}}$$

und

$$\int \frac{dx\, \cos.x}{x^n} = \frac{-\sin.x}{(n-1)(n-2)\, x^{n-2}} + \frac{\cos.x}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{dx\, \cos.x}{x^{n-2}}.$$

Mehreres hierüber findet man auch in den Integraltafeln von *Meier Hirsch* (Berlin 1810), S. 288 f. f.

Viertes Capitel.

Von der Integration mittelst Reihen und innerhalb bestimmter Grenzen; allgemeine Näherungsmethode.

Das Integriren mittelst *Reihen*.

§. 153.

Ist X eine Function von x und $X dx$ ein Differentialausdruck, welcher nach den vorhergehenden Capiteln nicht vollständig integrirt werden kann; so gibt es glücklicherweise noch Mittel, ein solches Integral approximativ oder näherungsweise zu bestimmen, und es ist dieses um so wichtiger, als diejenigen Fälle, in welchen sich eine gegebene Differentialformel genau integriren läſst, leider noch bei weitem den kleinsten Theil ausmachen.

Ein solches und zugleich vorzügliches Mittel besteht darin, die gesuchten Integrale durch Reihen auszudrücken, welche dann um so brauchbarer werden, je convergenter sie sind. Diese Methode ist äuſserst einfach; denn hat man X in eine endliche oder unendliche Reihe nach Potenzen von x entwickelt, so reducirt sich die Bestimmung des Integrals $\int X dx$ sofort auf die Integration einer Reihe von Monomen. Ist nämlich

$$X = A x^m + B x^{m+n} + C x^{m+2n} + \ldots$$

so wird

$$\int X dx = A \int x^m dx + B \int x^{m+n} dx + \ldots$$
$$= \frac{A x^{m+1}}{m+1} + \frac{B x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{C x^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \ldots$$

Diese Integrationsmethode führt zugleich, wie wir sehen werden, auf ein leichtes und bequemes Verfahren, gewisse transcendente Functionen in unendliche Reihen aufzulösen.

§. 154.

Beispiele.

1) Es sey das Integral $\int \frac{dx}{a+x}$ durch eine Reihe auszudrücken.

Hier ist

$$X = \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots \text{ (Bd. I. §. 110.)}$$

folglich

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int dx \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots \right)$$

$$= \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \ldots + C;$$

es ist also dieses Integral durch eine unendliche Reihe ausgedrückt, welche für alle Werthe von $x < a$ bis $x = a$ convergirt (Bd. I., §. 125., Beisp. 5).

Da man aber dieses Integral auch genau, und zwar logarithmisch bestimmen kann, indem (§. 108.)

$$\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C'$$

ist; so hat man zugleich auch, da $C - C'$ wieder eine unbestimmte Constante ist:

$$l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \ldots + C.$$

Zur Bestimmung der Constante C setze man $x = 0$, so wird aus dieser Gleichung: $la = C$, folglich, wenn man diesen Werth für C substituirt, auch

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \ldots$$

oder, wenn man transferirt und berücksichtiget, daſs $l(a+x) - la = l\left(\frac{a+x}{a}\right) = l\left(1 + \frac{x}{a}\right)$ ist, endlich

$$l\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \ldots$$

eine Reihe, welche mit jener [2)], die wir im ersten Bande, §. 129. (oder in diesem, §. 10., 3.) entwickelt haben, genau übereinstimmt.

2) Um eben so das Integral $\int \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2}$ zu bestimmen, hat man

$$\frac{a^2}{a^2 + x^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \ldots$$

demnach

$$\int \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} = \int dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \ldots\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \ldots + C$$

und diese Reihe convergirt für alle Werthe von $x < a$.

Von der andern Seite ist aber auch [§. 108., 4., Form. (*m*)]

$$\int \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} = a \, arc. tang. \left(\frac{x}{a}\right) + C;$$

folglich, wenn man gleich durch a dividirt:

$$arc. tang. \left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{a}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{x}{a}\right)^7 + \ldots$$

zu welcher Reihe keine Constante gehört, oder für welche $C = 0$ wird, wenn man (was immer stillschweigend verstanden wird) den kleinsten Bogen bestimmt, dessen Tangente $\frac{x}{a}$ ist; weil dann für $x = 0$ auch $arc. tang. \frac{x}{a} = 0$ wird. [M. vergl. Bd. I., §. 144., Form. 8), und in diesem Bande, §. 13., 2.]

3) Zur Bestimmung des Integrals $\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n}$ hat man

$$\frac{x^m}{a^n + x^n} = \frac{x^m}{a} - \frac{x^{m+n}}{a^{2n}} + \frac{x^{m+2n}}{a^{3n}} - \ldots$$

mithin

$$\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n} - \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}} + \frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}} - \ldots + C.$$

Diese Reihe, so wie überhaupt alle ähnlichen, welche nach steigenden Potenzen von x fortschreiten, convergirt um so mehr, je kleiner x ist, während nach fallenden Exponenten von x fortlaufende Reihen, die also zuletzt negative Exponenten von x erhalten, um so besser convergiren, je größer x ist. Um nun im ge-

genwärtigen Beispiel auch für den letzten Fall eine brauchbare Reihe zu erhalten, ist zugleich

$$\frac{x^m}{a^n + x^n} = \frac{x^m}{x^n + a^n} = x^{m-n} - a^n x^{m-2n} + a^{2n} x^{m-3n} - \ldots$$

folglich auch

$$\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n} = \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1} - \frac{a^n x^{m-2n+1}}{m-2n+1} + \frac{a^{2n} x^{m-3n+1}}{m-3n+1} - \ldots + C$$

$$= \frac{1}{(m-n+1)\, x^{n-m-1}} - \frac{a^n}{(m-2n+1)\, x^{2n-m-1}}$$

$$+ \frac{a^{2n}}{(m-3n+1)\, x^{3n-m-1}} - \ldots + C.$$

Anmerk. Ist $m+1$ ein Vielfaches von n, z. B. $m+1 = pn$; so erscheint in dieser Reihe ein Glied mit dem Nenner Null; in diesem Falle ist aber dieses Glied vor der Integration $= \pm\, a^{(p-1)n} \frac{dx}{x}$, folglich dessen Integral $= \pm\, a^{(p-1)n}\, l\, x$; was dann an die Stelle des genannten, Unendlich werdenden Gliedes zu setzen ist.

4) Setzt man im vorigen Beispiele, und zwar in der letzten Reihe, $m = 0$, $n = 2$ und $a = 1$; so erhält man

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots + C$$

oder [s. Beisp. 2)]

$$arc.\, tang.\, x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots$$

eine Reihe, welche nur für Werthe von $x > 1$ convergirt oder brauchbar ist. Um daher hier die Constante C zu bestimmen, kann man nicht [wie im Beisp. 2)] $x = 0$ setzen. Es ist aber für $x = \infty$: $arc.\, tang.\, x = \frac{\pi}{2}$, folglich, da die Reihe für diesen Werth von x verschwindet: $\frac{\pi}{2} = C$, und daher endlich:

$$arc.\, tang.\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots$$

eine Reihe, welche um so brauchbarer wird, je größser x ist.

5) Um das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ durch eine Reihe zu bestimmen, hat man

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

folglich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots + C.$$

Da nun aber auch (§. 105., Note) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = arc.sin.x$ ist, so hat man zugleich für diesen Bogen die Reihe:

$$arc.sin.x = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \ldots + C.$$

Will man daraus den kleinsten Bogen bestimmen, welcher dem Sinus x entspricht; so berücksichtige man, daſs für $x = 0$ auch $arc.sin.x = 0$, also aus der vorigen Gleichung, zufolge dieses Datums, $C = 0$ wird, so daſs man, in Uebereinstimmung mit § 144., 7), Bd. I. (oder mit §. 12., 4. des gegenwärtigen Bandes) endlich hat:

$$arc.sin.x = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

6) Zur Entwicklung des Integrals $\int dx \sqrt{(2ax - x^2)}$ hat man

$$\sqrt{(2ax - x^2)} = \sqrt{(2a)}.x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{(2a)}\left(x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{8a^3} + \ldots\right);$$

demnach

$$\int dx \sqrt{(2ax - x^2)}$$

$$= \sqrt{(2a)}\left(\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{5}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2a} - \frac{1.1}{2.4}.\tfrac{2}{7}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}.\tfrac{2}{9}\frac{x^{\frac{9}{2}}}{8a^3} - \ldots\right) + C$$

$$= 2x\sqrt{(2ax)}\left(\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2.5}\frac{x}{2a} - \frac{1.1}{2.4.7}\frac{x^2}{4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6.9}\frac{x^3}{8a^3} - \ldots\right) + C^{*)}$$

*) Wir finden aber auch [§. 135., Beisp. 2)]

$$\int dx \sqrt{(2ax - x^2)} = -\tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{(2ax - x^2)}$$
$$- \tfrac{1}{2}a^2\, arc.sin.\left(\frac{a-x}{a}\right) + C;$$

folglich ist

$$-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax - x^2)} - \tfrac{1}{2}a^2\, arc.sin.\left(\frac{a-x}{a}\right) =$$
$$2x\sqrt{(2ax)}\left(\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2.5}\frac{x}{2a} - \ldots\right) + C.$$

7) Um das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ zu bestimmen, hat man

$$\frac{1}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2a)}}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2a)}}\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{x}{2a} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{4a^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{8a^3} + ..\right);$$

es ist daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{(2a)}}\left(1 + \frac{1}{2.3}\frac{x}{2a} + \frac{1.3}{2.4.5}\frac{x^2}{4a^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\frac{x^3}{8a^3} + \ldots\right) + C.$$

8) Eben so findet man auch ganz leicht

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)}} = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots + C$$

und

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)}} =$$

$$lx - \frac{1}{2.2}\frac{1}{x^2} - \frac{1.3}{2.4.4}\frac{1}{x^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6.6}\frac{1}{x^6} - \ldots + C.$$

Setzt man in dieser Gleichung, zur Bestimmung der Constante C, $x = 0$; so erhält man wegen $arc.\,sin.\,1 = \frac{\pi}{2}$:

$$-\tfrac{1}{2}a^2\frac{\pi}{2} = 0 + C, \text{ und daraus } C = -\tfrac{1}{2}a^2\frac{\pi}{2};$$

also hat man auch mit diesem Werthe von C aus der vorigen Gleichung:

$$-\tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{(2ax - x^2)} + \tfrac{1}{2}a^2\left[\frac{\pi}{2} - arc\ sin.\left(\frac{a - x}{a}\right)\right] = 2x\sqrt{(2ax)}\left(\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2.5}\frac{x}{2a} - \ldots\right),$$

oder mit Berücksichtigung, daſs

$$\frac{\pi}{2} - arc.\,sin.\left(\frac{a - x}{a}\right) = arc.\,cos.\left(\frac{a - x}{a}\right)$$

ist, und wenn man auch noch durchaus $x = \frac{a}{2}$ setzt:

$$-\frac{a^2}{8}\sqrt{3} + \frac{a^2}{2}\frac{\pi}{3} = a^2\left(\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2.5.2^2} - \frac{1.1}{2.4.7.2^4}\ldots\right)$$

und daraus folgt sofort:

$$\pi = \tfrac{3}{4}\sqrt{3} + 6\left(\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2.5.2^2} - \frac{1.1}{2.4.7.2^4} - \frac{1.1.3}{2.4.6.9.2^6} - ..\right).$$

Um für das nämliche Integral noch eine Reihe zu finden, welche keine transcendente Gröſse enthält, setze man $x = 1 + u$; so wird

$$dx = du \text{ und } \sqrt{(x^2 - 1)} = \sqrt{(2u + u^2)},$$

folglich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)}} = \int \frac{du}{\sqrt{(2u + u^2)}} =$$

$$\sqrt{(2u)}\left(1 - \frac{1}{2.3}\frac{u}{2} + \frac{1.3}{2.4.5}\frac{u^2}{4} - \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\frac{u^3}{8} + \ldots\right)$$

[was man auch aus 7) findet, wenn man $a = 1$ und $x = -u$ setzt].

Anmerk. Da in dieser letztern Reihe $u = x - 1$ ist, so convergirt diese um so mehr, je weniger x von der Einheit verschieden ist; während bei der erstern, wenn sie dieselbe Eigenschaft besitzen soll, x die Einheit übersteigen muſs.

10) Um die binomische Differentialformel

$$x^n\,dx\,(a + bx^m)^p$$

in jenen Fällen, in welchen sie keiner der im zweiten Capitel aufgestellten Bedingungen der Integrabilität entspricht, in welchen also p jedenfalls eine gebrochene Zahl ist, mittelst Reihen zu integriren, hat man mit Berücksichtigung dieses letztern Umstandes, wenn $p = \frac{r}{s}$ gesetzt wird:

$$(a + bx^m)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}}\left(1 + \frac{b}{a}x^m\right)^{\frac{r}{s}}$$

$$= a^{\frac{r}{s}}\left[1 + \frac{r}{s}\frac{b}{a}x^m + \frac{r(r-s)}{2s^2}\frac{b^2}{a^2}x^{2m} + \ldots\right];$$

demnach

$$\int x^n\,dx\,(a + bx^m)^{\frac{r}{s}} =$$

$$a^{\frac{r}{s}}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{r}{s}\frac{b}{a}\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{r(r-s)}{2s^2}\frac{b^2}{a^2}\frac{x^{2m+n+1}}{2m+n+1}\right.$$

$$\left. + \frac{r(r-s)(r-2s)}{2.3s^3}\frac{b^3}{a^3}\frac{x^{3m+n+1}}{3m+n+1} + \ldots\right] + C.$$

Um für das nämliche Integral zugleich eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe zu erhalten, hat man auch

$$x^n\,dx\,(a+bx^m)^{\frac{r}{s}} = x^{n+\frac{rm}{s}}\,dx\,(b+ax^{-m})^{\frac{r}{s}} =$$

$$x^{n+\frac{rm}{s}}\,dx\,.\,b^{\frac{r}{s}}\left[1+\frac{r}{s}\,\frac{a}{b}\,x^{-m}+\frac{r(r-s)}{2s^2}\,\frac{a^2}{b^2}\,x^{-2m}+\ldots\right];$$

folglich ebenfalls, wenn man Kürze halber $n+1+\frac{rm}{s}=\alpha$ setzt:

$$\int x^n\,dx\,(a+bx^m)^{\frac{r}{s}} =$$

$$b^{\frac{r}{s}}\left[\frac{s\,x^\alpha}{rm+s(n+1)}+r\frac{a}{b}\,\frac{x^{\alpha-m}}{rm+s(n-m+1)}\right.$$
$$\left.+\frac{r(r-s)}{2s}\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{x^{\alpha-2m}}{rm+s(n-2m+1)}+\ldots\right]+C.$$

11) Für die Entwicklung des Integrals $\int X a^x\,dx$ setze man für a^x die bekannte Reihe (§. 10., 2. oder §. 12., Beisp. 1.) $1+\frac{la}{1}x+\frac{l^2a}{2}x^2+\ldots$, so wird:

$$\int Xa^x dx = \int X dx + la\int Xx dx + \frac{l^2a}{2}\int Xx^2 dx + \frac{l^3a}{2\,3}\int Xx^3 dx + \ldots$$

a) Für $X = x^n$ folgt also

$$\int x^n a^x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{la}{n+2}\,x^{n+2}+\frac{l^2a}{2(n+3)}\,x^{n+3}$$
$$+\frac{l^3a}{2\,.\,3(n+4)}\,x^{n+4}+\ldots+C.$$

b) Für $X=\frac{1}{x}$ hat man

$$\int\frac{a^x\,dx}{x} = lx + la\,.\,x+\frac{l^2a}{2}\,.\,\frac{x^2}{2}+\frac{l^3a}{2.3}\,.\,\frac{x^3}{3}+\ldots+C.$$

12) Setzt man in dieser letzten Integralformel $a^x = z$, so wird $x=\frac{lz}{la}$, $dx=\frac{dz}{z\,la}$ und $lx = llz - lla$; folglich ist, wenn man $-lla$ zur Constante C nimmt: $\int\frac{z\,dz}{z\,la}\,\frac{la}{lz}$, d. i.

$$\int\frac{dz}{lz} = llz + lz + \frac{l^2z}{2.2}+\frac{l^3z}{2.3.3}+\ldots+C;$$

und diefs ist die Integralformel, auf die wir oben (§. 140.) hingewiesen haben.

13) Setzt man endlich für $l.\cos.x$, $l.\sin.x$, ... die im ersten Bande, §. 143., gefundenen Reihen α), β), ...; so erhält man ganz einfach:

$$\int dx\, l.\cos.x = x\, l\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1.2}\sin.2x - \frac{1}{2.4}\sin.4x$$
$$+ \frac{1}{3.6}\sin.6x - \ldots + C;$$

$$\int dx\, l.\sin.x = x\, l\tfrac{1}{2} - \frac{1}{1.2}\sin.2x - \frac{1}{2.4}\sin.4x$$
$$- \frac{1}{3.6}\sin.6x - \ldots + C;$$

$$\int dx\, l.\cot.x = \sin.2x + \frac{1}{3^2}\sin.6x + \frac{1}{5^2}\sin.10x + \ldots + C;$$

$$\int dx\, l.\tang.x = -\sin.2x - \frac{1}{3^2}\sin.6x - \frac{1}{5^2}\sin.10x - \ldots + C.$$

§. 155.

Bei der Auflösung der Differentialausdrücke in Reihen ist es keineswegs nothwendig, daſs die Glieder derselben Monome sind, sondern es genügt zur Erreichung des beabsichtigten Zweckes, daſs diese Glieder überhaupt integrabel seyen; die nachstehenden Beispiele werden das Gesagte erläutern.

Beispiele.

1) Um das Integral $\int \frac{dx\,\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}$ zu entwickeln, hat man

$$\sqrt{(1-e^2x^2)} = (1-e^2x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1.1}{2.4}e^4x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6 - \ldots$$

folglich

$$\int \frac{dx\,\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1.1}{2.4}e^4x^4 - \ldots\right)$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \tfrac{1}{2}e^2 \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$- \frac{1.1}{2.4}e^4 \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$- \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6 \int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \ldots$$

Diese einzelnen Integrale sind aber sämmtlich in jenem $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, in welchem für n nach und nach die Werthe 0, 2, 4, 6, . . . zu setzen sind, und welches wir oben im §. 132. bereits behandelt haben, enthalten. Setzt man also dafür die im genannten Paragraphe gefundenen Werthe und läfst wieder A für $arc.\,sin.\,x$ stehen; so erhält man:

$$\int \frac{dx\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}} = A + \tfrac{1}{2}e^2\left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)} - \tfrac{1}{2}A\right]$$
$$+ \frac{1.1}{2.4}e^4\left[\left(\frac{x^3}{4} + \frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{(1-x^2)} - \frac{1.3}{2.4}A\right]$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\left[\left(\frac{x^5}{6} + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{(1-x^2)}\right.$$
$$\left. - \frac{1.3.5}{2.4.6}A\right] + \ldots + C.$$

Diese Reihe convergirt sehr gut, wenn e bedeutend klein ist, weil zugleich auch, wenn nämlich die gegebene Differentialformel reell ist, $x^2 < 1$ seyn mufs.

2) Eben so bestimmt man das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(a+x)]}};$$

denn es ist

$$\frac{1}{\sqrt{[(1-x^2)(a+x)]}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}(a+x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-x^2)}}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{x}{a} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{a^2} - \ldots\right)$$

und daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(a+x)]}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1}{2a\sqrt{a}}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4a^2\sqrt{a}}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \ldots$$

so, dafs man wieder nur für diese Integrale die Werthe aus dem genannten 132sten Paragr. substituiren darf, um das gesuchte Integral zu erhalten.

Die *Bernoullische* Reihe.

§. 156.

Die Methode der theilweisen Integration (§. 124.) führt noch auf ein anderes Verfahren, Integrale durch Reihen auszudrücken, welches um so merkwürdiger ist, als man dadurch das Integral $\int X dx$ in eine Reihe entwickeln kann, bevor noch die Form der Function X gegeben ist.

Setzt man nämlich in der ursprünglichen Reductionsformel [(α, §. 124.] $\int X dx = Xx - \int x dX$ der Reihe nach $dX = X' dx$, $dX' = X'' dx$, $dX'' = X''' dx$ etc. .. (m; so erhält man auch aus der erwähnten Reductionsformel, wenn man $u = X'$, $dv = x dx$, also $v = \frac{1}{2} x^2$ setzt:

$$\int x dX = \int X' x dx = X' \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 dX';$$

ferner, wenn man wieder $u = X''$ und $dv = x^2 dx$ setzt, wodurch $v = \frac{1}{3} x^3$ wird:

$$\int x^2 dX' = \int X'' x^2 dx = X'' \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^3 dX'';$$

dann, für $u = X'''$ und $dv = x^3 dx$:

$$\int x^3 dX'' = \int X''' x^3 dx = X''' \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} \int x^4 dX'''$$

u. s. w.

Diese Werthe nach und nach von unten hinauf substituirt, geben endlich

$$\int X dx = Xx - \frac{X' x^2}{2} + \frac{X'' x^3}{2 \cdot 3} - \frac{X''' x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

oder, da aus der obigen Relation (m folgt:

$$X' = \frac{dX}{dx}, \quad X'' = \frac{dX'}{dx} = \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad X''' = \frac{d^3 X}{dx^3} \text{ u. s. w.,}$$

so ist auch

$$\int X dx = Xx - \frac{dX}{dx} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{d^2 X}{dx^2} \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \frac{d^3 X}{dx^3} \cdot \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + C$$

und diese Reihe hat zuerst *Joh. Bernoulli* (*Joh. Bern. Opera omnia. Lausannae et Genevae* 1742. *T.* I. S. 125) aufgestellt.

Beispiel.

Um nach dieser Reihe das Integral $\int \frac{dx}{1+x}$ zu bestimmen, ist $X = \frac{1}{1+x}$, also

$$\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2},\quad \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1.2}{(1+x)^3},\quad \frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-1.2.3}{(1+x)^4} \text{ etc.}$$

und daher

$$\int \frac{dx}{1+x} = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} + \frac{x^4}{4(1+x)^4} + \ldots + C\ {}^{*)}.$$

Anmerk. Da die Quotienten $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, . . . in manchen Fällen ziemlich verwickelt werden können; so hat *Taylor* in seiner *Methodus incrementorum* **) zur Vereinfachung dieses Verfahrens noch eine andere Reihe gegeben, in welcher statt der vorigen Quotienten jene: $\frac{dX}{dw}$, $\frac{d^2X}{dw^2}$, . . . stehen, und wobei w eine willkürliche Function von x bezeichnet. Diese Reihe wird auf folgende Weise gefunden:

Es ist nach der ursprünglichen Reductionsformel: $\int X dx = Xx - \int x\,dX$; ferner

$$\int x\,dX = \int \frac{dX}{dw}\,x\,dw = \frac{dX}{dw}\,p - \int p\,\frac{d^2X}{dw};$$

dann eben so

$$\int p\,\frac{d^2X}{dw} = \int \frac{d^2X}{dw^2}\,p\,dw = \frac{d^2X}{dw^2}\,q - \int q\,\frac{d^3X}{dw^2}$$

u. s. w., wobei $p = \int x\,dw$, $q = \int p\,dw$, $r = \int q\,dw$ etc. ist, so, daſs, wenn man diese Werthe nach und nach substituirt, sofort die Reihe entsteht:

$$\int X dx = Xx - p\,\frac{dX}{dw} + q\,\frac{d^2X}{dw^2} - r\,\frac{d^3X}{dw^3} + \ldots + C,$$

bei deren Anwendung man w, als willkürliche Function von x,

*) Zugleich ist auch $\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) + C'$, folglich erhält man noch nebenher:

$$l(1+x) = \left(\frac{x}{1+x}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \ldots$$

zu welcher Reihe keine Constante hinzugefügt werden darf, weil für $x = 0$ auch $l(1+x) = l\,1 = 0$ wird.

**) Der vollständige Titel dieses merkwürdigen Buches (dasselbe, in welchem *Taylor* seinen berühmten Satz entwickelt) ist: *Methodus incrementorum directa et inversa, auctore Brook Taylor. Londini* 1715.

immer so wählen wird, dafs die Quotienten $\frac{dX}{dw}, \frac{d^2X}{dw^2}, \ldots$ so einfach als möglich ausfallen.

Beispiel. Um z. B. das Integral $\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ nach dieser letztern Reihe zu entwickeln, hat man

$$X = \sqrt{(a^2 - x^2)} \text{ und } dX = -\frac{x\,dx}{X};$$

man setze also $dw = x\,dx$, so wird ganz einfach

$$\frac{dX}{dw} = -\frac{1}{X}, \quad \frac{d^2X}{dw^2} = \frac{dX}{dw} \cdot \frac{1}{X^2} = -\frac{1}{X^3},$$

$$\frac{d^3X}{dw^3} = \frac{dX}{dw} \cdot \frac{3}{X^4} = -\frac{3}{X^5}, \quad \frac{d^4X}{dw^4} = \frac{dX}{dw}\,\frac{3.5}{X^6} = -\frac{3.5}{X^7} \text{ etc.}$$

Da ferner $p = \int x\,dw = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$, $q = \int p\,dw = \frac{1}{3}\int x^4\,dx = \frac{1}{3.5}x^5$, $r = \int q\,dw = \frac{1}{3.5}\int x^6\,dx = \frac{1}{3.5.7}x^7$ etc. ist; so hat man endlich nach der genannten Reihe, wenn man X für $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ stehen läfst:

$$\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = Xx + \frac{1}{3}\frac{x^3}{X} - \frac{1.1}{3.5}\frac{x^5}{X^3} + \frac{1.1.3}{3.5.7}\frac{x^7}{X^5} - \ldots + C.$$

Die Entwicklung dieses Integrals wäre nach der obigen *Bernoulli*'schen Reihe bei weitem beschwerlicher.

Von der Integration innerhalb bestimmter Grenzen.

§. 157.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, dafs jedem gefundenen Integrale, um demselben die nöthige Allgemeinheit zu geben, eine willkürliche Constante beigefügt werden mufs; ein solches mit dieser Constante versehenes Integral wird defshalb auch ein vollständiges oder allgemeines Integral genannt, und heifst dieses überdiefs noch ein unbestimmtes, wenn die Constante noch völlig unbestimmt ist; dagegen ein besonderes oder partikuläres Integral, wenn die Constante C dabei einen gewissen bestimmten Werth erhalten hat *). In der Regel

*) Es können demnach aus einem unbestimmten oder allgemeinen Integrale unzählige partikuläre abgeleitet werden, je nach den verschiedenen Hypothesen, die man über die Verbindung des Integrals mit den Variablen annimmt, oder den verschiedenen Werthen, die man der Constante C beilegt.

wird diese, wie wir auch bereits schon oben an mehreren Beispielen gesehen haben, dadurch bestimmt, daſs man der Variablen (z. B. x) einen solchen Werth gibt, für welchen dat Integral verschwindet (im Allgemeinen aber wird dieses $=b$ für $x=a$, wo a und b bekannte oder bestimmte Gröſsen bedeuten). Wird aber endlich einem Integralausdruck gar keine Constante beigesetzt, so heiſst ein solches Integral dann ein unvollständiges oder incompletes.

Ist nämlich $f(x)$ die durch die Integration des Differentialausdruckes $X\,dx$ entstehende Function, so ist

1) $\int X\,dx = f(x) + C$ ein vollständiges, unbestimmtes, oder auch nur geradezu ein unbestimmtes Integral, wenn C die willkürliche, noch unbestimmte Constante bezeichnet.

2) $\int X\,dx = f(x) + c$ ein besonderes oder particuläres Integral, wenn c ein bestimmter Werth der Constante C ist.

3) $\int X\,dx = f(x)$ ein unvollständiges oder incompletes Integral (wenn nicht etwa $c=0$ war).

Es ist übrigens leicht zu sehen, daſs das erste oder unbestimmte Integral aus einem doppelten Grunde unbestimmt ist: einmal, weil die Constante C noch nicht bestimmt ist, und dann, weil in $f(x)$ die Variable x selbst auch unzählig viele Werthe erhalten kann. Weiſs man aber aus der Natur des in Untersuchung oder Frage stehenden Gegenstandes, daſs für $x=a$ das Integral $\int X\,dx = A$ ist; so hat man zur Bestimmung von C die Bedingungsgleichung $A = f(a) + C$, und daraus die Constante:

$$C = A - f(a);$$

es ist demnach, wenn dieser Werth für C in dem allgemeinen Integral substituirt wird, das daraus abgeleitete particuläre:

$$\int X\,dx = f(x) - f(a) + A.$$

Wird dann noch der Werth dieses Integrals für $x = b$ durch B bezeichnet, so hat man daraus:

$$B = f(b) - f(a) + A \text{ oder } B - A = f(b) - f(a) \ldots (4$$

das vollkommen bestimmte Integral.

Ist $A = 0$, d. h. verschwindet das Integral $\int X dx$ für $x = a$; so ist dieser Werth $x = a$ der Ursprung oder Anfang des Integrals, oder man sagt: dieses Integral fange bei dem Werthe von $x = a$ an. Soll sich ferner das Integral bis zu dem Werthe von $x = b$ erstrecken, so sagt man: es sey für diesen Werth von x complet oder vollständig. Die beiden Werthe $x = a$ und $x = b$, für welche das Integral beziehungsweise anfängt und endet, heifsen Grenzen des Integrals; sind diese Grenzen gegeben, so wird das Integral ebenfalls ein bestimmtes genannt, und man sagt: das Integral sey innerhalb $x = a$ und $x = b$, oder von $x = a$ bis $x = b$ genommen. Wie die Gleichung (4 zeigt, wird dieses bestimmte innerhalb gegebener Grenzen zu entwickelnde Integral, ohne dafs man erst die willkürliche Constante C zu bestimmen nöthig hat, auch gefunden, indem man in dem allgemeinen Integral 1) zuerst $x = b$, dann auch $x = a$ setzt und das letztere Resultat vom erstern abzieht; denn man erhält dadurch für das gesuchte Integral:

$$[f(b) + C] - [f(a) + C] = f(b) - f(a)$$

denselben Ausdruck, wie in (4.

Da sich also bei diesem Verfahren die Constante C aufhebt, so kann offenbar dasselbe Resultat zugleich auch aus dem besondern Integral 2) oder dem unvollständigen 3) erhalten werden, so, dafs es bei einem Integrale, welches innerhalb bestimmter Grenzen genommen werden soll, nicht nothwendig ist, eine Constante beizufügen.

Um kurz anzudeuten, dafs das Integral $\int X dx$ innerhalb der Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ genommen werden soll, schreibt man: $\int_a^b X dx$ *), woraus sofort, wegen

*) *Euler* bediente sich dafür der weniger einfachen Bezeich-

$\int X dx = f(x)$, wie wir oben angenommen haben, folgt:

$$\int_a^b X dx = f(b) - f(a) \ldots (5\ {}^*);$$

dabei leuchtet zugleich auch die Richtigkeit der Ausdrücke

nungsart: $\int X dx \begin{bmatrix} x = a \\ x = b \end{bmatrix}$. Die obige, nun beinahe allgemein angenommene Bezeichnung rührt von *Fourier* her. (*Joh. Bapt. F.*, geb. 1768 zu Auperre in Frankreich, wurde im J. 1817 Mitglied und beständiger Secretair der Akademie der Wissenschaften zu Paris, und im J. 1827 — nach *Laplace's* Tod — Präsident des *Conseil de perfectionnement* in der polytechnischen Schule; er starb bald nachher.)

*) Stellt man sich vor, daſs in der Function X, die wir hier durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, die Variable x successive unzählige Werthe erhält, welche nach unendlich kleinen (gleichen oder ungleichen) Differenzen oder Intervallen von $x = a$ bis $x = b$ wachsen, und nimmt man diese Differenzen für die auf einander folgenden Werthe von dx; so kann man das obige bestimmte Integral $\int_a^b \varphi(x)\, dx = f(b) - f(a)$ auch als die Summe aller der auf diese Weise für das Differential $\varphi(x)\, dx$ entstehenden Werthe ansehen.

Denn es ist zuerst, zufolge der ursprünglichen Definition des Differentials einer Function:

$$f(x + dx) - f(x) = d . f(x),$$

oder wegen $f(x) = \int \varphi(x)\, dx$ [obige Gl. 1)] auch:

$$f(x + dx) - f(x) = \varphi(x)\, dx \ldots (m.$$

Bezeichnen nun $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Gröſsen von der Beschaffenheit, daſs ihre Summe

$$n) \ldots \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n = b - a$$

wird, und nimmt man nach und nach für x und dx beziehungsweise die Werthe:

a und δ_1, $a + \delta_1$ und δ_2, $a + \delta_1 + \delta_2$ und $\delta_3, \ldots b - \delta_n$ und δ_n;

so erhält man der Reihe nach aus der obigen Gleichung (m:

$$f(a + \delta_1) - f(a) = \varphi(a)\, \delta_1$$
$$f(a + \delta_1 + \delta_2) - f(a + \delta_1) = \varphi(a + \delta_1)\, \delta_2$$
$$f(a + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) - f(a + \delta_1 + \delta_2) = \varphi(a + \delta_1 + \delta_2)\, \delta_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(b - \delta_n + \delta_n) - f(b - \delta_n) = \varphi(b - \delta_n)\, \delta_n$$

und wenn man diese Gleichungen summirt, sofort den besagten Ausdruck: $f(b) - f(a)$, d. i.

$$p) \int_a^b \varphi(x)\, dx = \varphi(a)\, \delta_1 + \varphi(a + \delta_1)\, \delta_2 + \varphi(a + \delta_1 + \delta_2)\, \delta_3 + \ldots + \varphi(b - \delta_n)\, \delta_n.$$

(M. s. *S. D. Poisson: Traité de Mécanique*, 2. *Édit. Paris* 1833; *Tome* 1. S. 17.)

$$6)\ \int_a^c X\,dx = \int_a^b X\,dx + \int_b^c X\,dx,$$

$$\int_a^d X\,dx = \int_a^b X\,dx + \int_b^c X\,dx + \int_c^d X\,dx, \text{ u. s. w.}$$

von selbst ein; man kann nämlich das Intervall, zwischen welchem ein bestimmtes Integral zu nehmen ist, in eine beliebige Anzahl (gleicher oder ungleicher) Theile theilen und die Summe der Integrale innerhalb dieser kleineren Intervallen genommen, für das erste oder gesuchte Integral nehmen.

Da die bestimmten Integrale mehrere besondere Eigenschaften darbieten, und da man überhaupt in der Anwendung die zu bestimmenden Integrale nur innerhalb bestimmter oder gegebener Grenzen nöthig hat; so wollen wir uns im nächsten Paragraphe noch mit einigen solchen Integralen beispielsweise beschäftigen.

§. 158.

Beispiele über die *bestimmten* Integrale.

1) Um das Integral $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}}$ innerhalb der Grenzen von $x = 0$ bis $x = b$, d. i. das bestimmte Integral $\int_0^b \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}}$ zu finden, hat man zuerst nach Formel (b, §. 135., wenn man in dieser $2a = b$ setzt:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{-x^{n-1}\sqrt{(bx - x^2)}}{n} + \frac{(2n-1)b}{2n} \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}};$$

da nun der algebraische oder integrirte Theil sowohl für $x = 0$ als auch für $x = b$ verschwindet, so wird

$$\int_0^b \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{(2n-1)b}{2n} \int_0^b \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} \ldots (p.$$

Setzt man nun in dieser Formel (p der Reihe nach $n = 1$, 2, 3, ... und bemerkt, daſs wegen $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = arc.sinv.\left(\frac{2x}{b}\right)$ [§. 105., Note, 16)]:

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = arc.sinv.\,2 - arc.sinv.\,0 = \pi - 0 = \pi$$

ist, so hat man:

$$\int_0^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(b\,x - x^2)}} = \frac{b}{2}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b\,x - x^2)}} = \frac{b}{2}\,\pi$$

$$\int_0^b \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(b\,x - x^2)}} = \tfrac{3}{4}\,b\int_0^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1.3}{2.4}\,b^2\,\pi$$

$$\int_0^b \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(b\,x - x^2)}} = \tfrac{5}{6}\,b\int_0^b \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,b^3\,\pi$$

. .

$$\int_0^b \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(b\,x - x^2)}} = \frac{2\,m - 1}{2\,m}\,b\int_0^b \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(b\,x - x^2)}}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2\,m - 1)}{2.4.6\ldots\ldots 2\,m}\,b^m\,\pi.$$

2) Um die Differentialgleichung

$$dt = \frac{-r\,d\,x}{2\sqrt{[g\,(b - x)(2\,r\,x - x^2)]}}$$

von $x = 0$ bis $x = b$ zu integriren *), hat man

$$t = -\int_0^b \frac{r\,d\,x}{2\sqrt{[g(b - x)(2rx - x^2)]}} = -\frac{r}{2\sqrt{g}}\int_0^b \frac{d\,x}{\sqrt{(bx - x^2)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2r - x)}}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\sqrt{(2\,r - x)}} = (2\,r - x)^{-\frac{1}{2}} = (2\,r)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{2\,r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\,r)}}\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{x}{2\,r} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^2}{4\,r^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^3}{8\,r^3} + \ldots\right)$$

folglich auch

$$t = -\frac{r}{2\sqrt{(2\,r\,g)}}\int_0^b \frac{d\,x}{\sqrt{(bx - x^2)}}\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{x}{2\,r} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^2}{4r^2} + \ldots\right)$$

$$= -\frac{r}{2\sqrt{(2\,r\,g)}}\left[\int_0^b \frac{d\,x}{\sqrt{(bx - x^2)}} + \frac{1}{2.2\,r}\int_0^b \frac{x\,d\,x}{\sqrt{(bx - x^2)}}\right.$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4r^2}\int_0^b \frac{x^2\,d\,x}{\sqrt{(bx - x^2)}}$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{8\,r^3}\int_0^b \frac{x^3\,d\,x}{\sqrt{(bx - x^2)}} + \ldots\right]$$

und wenn man die im vorigen Beispiele für diese bestimmten Integrale gefundenen Werthe substituirt und den gemeinschaftl. Factor π gleich herausnimmt, endlich:

*) Ein Fall, der in der Mechanik bei der Lehre vom Pendel vorkömmt.

$$t = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{2g}\right)}\left[1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\frac{b}{2r}\right)^1 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2r}\right)^3 + \ldots\right].$$

3) Setzt man in der Formel (p des ersten Beispiels $x = z^2$ und $b = 1$, so erhält man

$$\int_0^b \frac{z^{2n}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{2n-1}{2n}\int_0^b \frac{z^{2n-2}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

und wenn man in dieser letztern Formel statt $2n$: $2n+1$ setzt:

$$\int_0^b \frac{z^{2n+1}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{2n}{2n+1}\int_0^b \frac{z_{2n-1}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}.$$

Da nun

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = arc.\,sin.\,z \text{ und } \int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\sqrt{(1-z^2)} \text{ (§. 132.)},$$

folglich

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = arc.\,sin.\,1 - arc.\,sin.\,0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{und } \int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = 0 - (-1) = +1$$

ist; so folgt, wenn man in den vorigen beiden Formeln nach und nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt,

aus der erstern:
$$\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \tfrac{3}{4}\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

.

$$\int_0^1 \frac{z^{2n}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2};$$

aus der letztern:
$$\int_0^1 \frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \tfrac{2}{3}\int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \tfrac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{z^5\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \tfrac{4}{5}\int_0^1 \frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{2.4}{3.5}$$

.

$$\int_0^1 \frac{z^{2n+1}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$$

Dividirt man das letzte Integral der erstern dieser beider Gruppen durch das letzte Integral der zweiten Gruppe

und setzt $n = \infty$; so erhält man, mit Berücksichtigung, daſs für diesen Werth von n die beiden genannten Integrale einander gleich werden:

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5.7\ldots \times 3.5.7.9\ldots}{2.4.6.8\ldots \times 2.4.6.8\ldots}$$

und daraus

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots} \; *).$$

Allgemeine Methode, ein Integral durch *Näherung* zu finden.

§. 159.

Die Integration innerhalb bestimmter Grenzen führt uns zugleich zu einer allgemeinen Annäherungsmethode für solche Integrale, die sich nicht genau angeben lassen und welche auch noch dann anwendbar ist, wenn sich das gesuchte Integral nach §§. 153.—155. in keine convergirende Reihe auflösen oder entwickeln läſst. Wir können hier nur ganz kurz das Nöthigste hierüber mittheilen.

Es sey das zu bestimmende Integral $\int X\,dx = y$, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2X}{dx^2}, \ldots$$

und man könnte sofort y nach der *Maclaurin*'schen Reihe (§. 12.) bestimmen, wenn auch noch der Werth von y für $x = 0$ bekannt wäre. Die *Taylor*'sche Reihe dagegen gibt, ohne daſs dieser Werth von y bekannt zu seyn braucht (§. 8.) $y' - y$, oder

$$f(x+h) - f(x) = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \ldots$$

*) Dieser durch eine unendliche Factorenfolge ausgedrückte und zuerst von *Wallis* (m. s. die im ersten Bande auf S. 238. stehende Note) durch eine künstliche Einschaltung gefundene Werth von π läſst sich noch auf verschiedene Formen bringen; so kann man z. B. schreiben:

$$\pi = 4 \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{24}{25} \cdot \tfrac{48}{49} \cdot \tfrac{80}{81} \cdot \tfrac{120}{121} \cdots,$$

oder $\pi = 4(1-\tfrac{1}{9})(1-\tfrac{1}{25})(1-\tfrac{1}{49})(1-\tfrac{1}{81})\ldots,$

oder $\pi = 2 \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{16}{15} \cdot \tfrac{36}{35} \cdot \tfrac{64}{63} \ldots$ u. s. w.

d. i. den Werth für $\int X dx$, von einem gewissen Werth von x, bis zu einem andern genommen.

Setzt man nun $x = a$, $h = b - a$ und bezeichnet die Quotienten $\frac{dy}{dx} = X$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}$, ... für diesen besondern Werth von $x = a$ der Reihe nach durch $A, A', A'', \ldots$; so erhält man:

$$f(b) - f(a) = \frac{A(b-a)}{1} + \frac{A'(b-a)^2}{1.2} + \frac{A''(b-a)^3}{1.2.3} + \ldots$$

oder mit Berücksichtigung der Gleich. (5 im §. 157., auch:

$$\int_a^b X dx = A(b-a) + \frac{A'(b-a)^2}{2} + \frac{A''(b-a)^3}{2.3} + \ldots \text{ (m.}$$

Diese Reihe nun, welche das bestimmte Integral von $x = a$ bis $x = b$ (vorausgesetzt, dafs dasselbe innerhalb dieser Grenzen nicht Unendlich wird) ausdrückt, ist offenbar um so convergenter, je kleiner das Intervall $b - a$ selbst ist; ist dasselbe in dieser Hinsicht zu grofs, so kann man dieser Reihe dennoch jeden beliebigen Grad der Convergenz verschaffen, wenn man das Intervall $b - a$ in mehrere Theile zerlegt und dann [Relat. 6), §. 157.] die Summe der Integrale, welche innerhalb der entstehenden kleinen Intervallen genommen werden, bestimmt. Theilt man z. B dieses Intervall $b - a$ in n und zwar gleiche Theile, deren jeder $= \alpha$ seyn soll, so, dafs $b - a = n\alpha$ wird, und bezeichnet die Werthe, welche die obigen Gröfsen A, A', A'', ... für $x = a$ (im ersten Intervall von $x = a$ bis $x = a + \alpha$) erhalten, durch A, A', A'', ... selbst; für $x = a + \alpha$ (im zweiten Intervall von $x = a + \alpha$ bis $x = a + 2\alpha$) durch A_1, A'_1, A''_1, ...; für $x = a + 2\alpha$ (im dritten Intervall von $x = a + 2\alpha$ bis $x = a + 3\alpha$), durch A_2, A'_2, A''_2, ... u. s. w., und endlich für $x = a + (n-1)\alpha$ (im letzten oder n^{ten} Intervall von $x = a + (n-1)\alpha$ bis $x = a + n\alpha$), durch A_{n-1}, A'_{n-1}, A''_{n-1}, ...; so folgt aus (m und dem Gesagten:

$$\int_a^b X\,dx = A\alpha + A'\frac{\alpha^2}{2} + A''\frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots$$
$$+ A_1\alpha + A'_1\frac{\alpha^2}{2} + A''_1\frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots$$
$$+ A_2\alpha + A'_2\frac{\alpha^2}{2} + A''_2\frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ A_{n-1}\alpha + A'_{n-1}\frac{\alpha^2}{2} + A''_{n-1}\frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots$$

d. i. $$\left.\begin{aligned}\int_a^b X\,dx &= (A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})\,\alpha \\ &+ (A' + A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_{n-1})\frac{\alpha^2}{2} \\ &+ (A'' + A''_1 + A''_2 + \ldots + A''_{n-1})\frac{\alpha^3}{2.3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(\nu.$$

Je gröſser nun n wird, d. h. in je mehr gleiche Theile das Intervall $b-a$ getheilt wird, desto kleiner fällt α aus und desto besser convergirt also unter übrigens gleichen Umständen die vorstehende Reihe (ν, welche das gesuchte Integral approximativ darstellt. Wird n hinreichend groſs, also α hinlänglich klein genommen, so, daſs man sich mit dem ersten Gliede dieser Reihe begnügen kann; so wird annähernd:

$$\int_a^b X\,dx = (A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})\,\alpha.$$

§. 160.

So wie man zur Entwickelung dieser Formel (ν von $x=a$ aufwärts bis $x=b$ gegangen ist, oder die Differenz $f(x+h)-f(x)$ angewendet hat, eben so kann man auch umgekehrt von $x=b$ nach $x=a$ zurück-, oder von der Differenz $f(x)-f(x-h)$ ausgehen. Es ist nämlich, wegen (§. 8.) $f(x-h) = f(x) - \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} - \ldots$:

$$f(x) - f(x-h) = \frac{dy}{dx}h - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} - \ldots$$

Setzt man in dieser Reihe $x=b$, $h=b-a$ und bezeichnet die Werthe, welche die Quotienten

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \ldots$$

für $x = b$ annehmen oder erhalten, beziehungsweise durch $B, B', B'', \ldots$; so ist auch $f(b) - f(a)$, d. i.

$$\int_a^b X\,dx = \frac{B(b-a)}{1} - \frac{B'(b-a)^2}{1.2} + \frac{B''(b-a)^3}{1.2.3} - \ldots (m'.$$

Theilt man nun ebenfalls wieder das Intervall $b - a$ in n Theile, jeden $= \alpha$, so wird man hier eben so, wie man von $x = b$ bis $x = a$ zurückgeht, in den einzelnen Intervallen von $x = a + \alpha$ nach $x = a$, von $x = a + 2\alpha$ nach $x = a + \alpha$ u. s. f. zurückgehen müssen, wenn man diese Formel (m' dabei anwenden will.

Man erhält aber nach dieser Formel (m' für das erste Intervall $a + \alpha$ bis a (weil im vorigen Paragraphe die Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ für $x = a + \alpha$ durch $A_1, A'_1, A''_1, \ldots$ bezeichnet worden sind) den Werth:

$$A_1\alpha - A'_1\frac{\alpha^2}{2} + A''_1\frac{\alpha^3}{2.3} - \ldots$$

für das zweite Intervall, von $a + 2\alpha$ bis $a + \alpha$:

$$A_2\alpha - A'_2\frac{\alpha^2}{2} + A''_2\frac{\alpha^3}{2.3} - \ldots$$

für das dritte Intervall, von $a + 3\alpha$ bis $a + 2\alpha$:

$$A_3\alpha - A'_3\frac{\alpha^2}{2} + A''_3\frac{\alpha^3}{2.3} - \ldots$$

u. s. w., endlich für das letzte oder n^{te} Intervall, von $a + n\alpha$ bis $a + (n-1)\alpha$:

$$A_n\alpha - A'_n\frac{\alpha^2}{2} + A''_n\frac{\alpha^3}{2.3} - \ldots$$

Nimmt man also wieder die Summe von allen diesen Integralen, so erhält man auch

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b X\,dx = {} & (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n)\alpha \\ & - (A'_1 + A'_2 + A'_3 + \ldots + A'_n)\frac{\alpha^2}{2} \\ & + (A''_1 + A''_2 + A''_3 + \ldots + A''_n)\frac{\alpha^3}{2.3} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}(v';$$

dabei gilt von dieser Formel genau das, was wir von der vorigen (v bemerkt haben.

Anmerk. Mit Hilfe dieser beiden entwickelten Formeln (v und (v' lassen sich auch leicht die Grenzen der Annäherung für das Integral $\int_a^b X\,dx$ bestimmen.

Denn werden die auf einander folgenden Werthe der Function X von $x = a$ bis $x = b$ fortwährend gröſser, so sind die entsprechenden Werthe des Quotienten $\frac{dX}{dx}$ (§. 45., Anmerk.) durchaus positiv, d. h. bilden die Glieder A, A_1, A_2, ... A_n eine steigende Reihe, so sind die Gröſsen A', A'_1, A'_2, ... A'_{n-1} sämmtlich positiv, und man hat sofort, zufolge dieser Formeln (v, (v':

$$\int_a^b X\,dx \begin{array}{l} > (A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})\,a \\ < (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n)\,a. \end{array}$$

Bilden dagegen zweitens die auf einander folgenden Werthe der Function X von $x = a$ bis $x = b$ eine fallende Reihe, so werden die Gröſsen A', A'_1, A'_2, ... sämmtlich negativ, und man hat sofort:

$$\int_a^b X\,dx \begin{array}{l} < (A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})\,a \\ > (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n)\,a, \end{array}$$

so, daſs der wahre Werth des Integrals immer zwischen diesen beiden Reihen, deren Differenz $= (A_n - A)\,a$ ist, eingeschlossen bleibt.

Diese Grenzen rücken aber um so näher zusammen, je kleiner a, je gröſser also n ist. Da indeſs in jedem Falle die eine der beiden Formeln (v und (v' gegen den wahren Werth des gesuchten Integrals zu groſs, und die andere zu klein ist; so ist es am besten, aus beiden das Mittel zu nehmen. Dadurch erhält man:

$$w)\quad \int_a^b X\,dx = \left\{ \begin{array}{r} [A_1 + A_2 \ldots + A_{n-1} + \tfrac{1}{2}(A + A_n)]\,\frac{a}{1} \\ + \tfrac{1}{2}(A' - A'_n)\,\frac{a^2}{1.2} \\ + [A''_1 + A''_2 + \ldots + A''_{n-1} + \tfrac{1}{2}(A'' + A''_n)]\,\frac{a^3}{1.2.3} \\ + \tfrac{1}{2}(A''' - A'''_n)\,\frac{a^4}{1.2.3.4} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Da endlich z. B. die erste Reihe $(A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})\alpha$ dem wahren Werth des Integrals $\int_a^b X dx$ um so näher kommt, je kleiner α wird, und diesem endlich, wenn α unendlich klein oder $= dx$ ist, vollkommen gleich wird; so kann das Integral innerhalb dieser Grenzen als die Summe von unendlich vielen Differentialen angesehen werden, indem $A\alpha$, $A_1\alpha$, $A_2\alpha$, ... dann nichts anderes, als die Werthe von $X dx$ für $x = a$, $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, ... bezeichnen, wobei α an der Stelle von dx steht. (M. s. die Note zu §. 104. in der Einleitung, und jene auf S. 392.)

Es ist ferner leicht zu sehen, daſs bei dieser Entwickelung oder näherungsweisen Bestimmung des fraglichen Integrals keiner der Quotienten X, $\frac{dX}{dx}$, ... in keinem der erwähnten Intervallen Unendlich werden darf, widrigenfalls man ein solches Intervall für sich besonders wieder zerlegen und dessen Werth bestimmen müſste *).

*) M. s. das siebente Capitel von *Euler's* vollständ. Anleitung zur Integralrechnung.

Mit der Entwicklung von allgemeinen Integrationsmethoden haben sich die meisten Analysten beschäftiget, und wir verdanken hierüber das Vorzüglichste den Leistungen und Bemühungen eines *Newton, Cotes, Taylor, Kramp (Gergonne's* Annalen d. Math., Bd. 6 u. 9), *Bérard* (*Gerg.* Ann., Bd. 7), *Gauſs* (im dritten Bande der neuern Abhandl. der Göttinger Universität vom J. 1816) u. s. w. Im ersten Bande der von Dr. *Crelle* herausgegebenen »Sammlung mathemat. Aufsätze und Bemerk. (Berlin 1821)«, findet man (von S. 218 an) dreizehn solcher Näherungsmethoden, von denen einige ihm selbst angehören, zusammengestellt.

Schon *Newton* hatte eine allgemeine Integrationsmethode, oder wie er es nannte: eine Methode, jede Curve zu quadriren, angegeben; diese beruht auf der Interpolation einer beliebigen Reihe von Gröſsen, wozu er in der im J. 1711 herausgekommenen *Methodus differentialis* eine Anleitung gibt. Er zeigt darin, wie man aus einer Anzahl gegebener Gröſsen, die als Ordinaten einer parabolischen Curve höherer Ordnung angesehen werden, die Gleichung dieser Curve: $y = A + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$ bestimmen könne. Stellt nun X die Ordinate einer solchen Curve vor, so bezeichnet (§. 46., 2.) das Integral $\int X dx$ die Fläche derselben. (M. s. z. B. *Lacroix*, *Traité etc.*, in 4., *Tome second, p.* 138, oder dessen *Traité élémentaire*, in 8., *p.* 331).

Ueber *Gauſs's* Methode zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale, kann man auch eine von Prof. v. *Ettingshausen* in der Zeitschrift für Physik und Mathematik (Wien, Bd. 7) eingerückte Abhandlung nachsehen.

Poisson (im ersten Bande seiner neuen Ausgabe der *Traité*

§. 161.

Beispiel.

Um die Anwendung der im vorigen Paragraphe entwickelten Näherungsformeln wenigstens durch Ein Beispiel zu erläutern, sey das Integral $\int \frac{dx}{x}$ innerhalb der Grenzen von $x = a$ bis $x = a + z$ zu bestimmen.

Hier ist $X = \frac{1}{x}$ und $b = a + z$, also wegen $\int \frac{dx}{x} = lx$:

$$\int_a^{a+z} \frac{dx}{x} = l(a+z) - la = l\left(\frac{a+z}{a}\right) \ldots (p.$$

Wären nun keine Tafeln für die Logarithmen berechnet, aus welchen man die gefundene transcendente Gröſse $l\left(\frac{a+z}{a}\right)$ numerisch herausschreiben könnte, wenn a und z in Zahlen gegeben sind; so könnte man das gesuchte Integral nach den Formeln des vorigen Paragraphes näherungsweise, und zwar auf folgende Art berechnen:

Da hier das Intervall $b - a = z$ ist, so wird, wenn man dieses in n gleiche Theile theilt, jedes Zwischenintervall $\alpha = \frac{z}{n}$. Es ist ferner, wegen $X = \frac{1}{x}$:

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{2.3}{x^4}, \ldots$$

de Mécanique, S. 22) entwickelt für das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ folgende Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta\left[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f[a+(n-1)\delta] + \tfrac{1}{2}f(b)\right] - \tfrac{1}{12}\delta^2[f'(b) - f'(a)],$$

wobei

$$\frac{d.f(x)}{dx} = f'(x) \text{ und } \delta = \frac{1}{n}(b-a),$$

also diese Formel um so genauer ist, je kleiner δ angenommen wird, und je weniger schnell sich die Function $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b ändert.

Er bemerkt, daſs man in den meisten Fällen noch das Glied in δ^2 vernachlässigen kann, wo dann die Formel nichts weiter als Werthe von $f(x)$ enthält, die in Zahlen gegeben seyn können, ohne daſs die Form dieser Function bekannt zu seyn braucht.

folglich:

$$A = \frac{1}{a},\ A' = -\frac{1}{a^2},\ A'' = \frac{2}{a^3},\ A''' = -\frac{2.3}{a^4},\ \ldots$$

$$A_1 = \frac{1}{a+\alpha},\ A'_1 = -\frac{1}{(a+\alpha)^2},\ A''_1 = \frac{2}{(a+\alpha)^3},\ \ldots$$

$$A_2 = \frac{1}{a+2\alpha},\ A'_2 = -\frac{1}{(a+2\alpha)^2},\ A''_2 = \frac{2}{(a+2\alpha)^3},\ \ldots$$

. .

$$A_{n-1} = \frac{1}{a+(n-1)\alpha},\ A'_{n-1} = -\frac{1}{[a+(n-1)\alpha]^2},$$

$$A''_{n-1} = \frac{2}{[a+(n-1)\alpha]^3},\ \ldots$$

und demnach nach der ersten Formel (ν, wenn man auch gleich für α seinen Werth $\frac{z}{n}$ setzt:

$$\int_a^{a+z} \frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+z} + \frac{1}{na+2z} + \ldots + \frac{1}{na+(n-1)z}\right] z$$

$$- \left[\frac{1}{n^2a^2} + \frac{1}{(na+z)^2} + \frac{1}{(na+2z)^2} + \ldots + \frac{1}{[na+(n-1)z]^2}\right] \frac{z^2}{2}$$

$$+ \left[\frac{1}{n^3a^3} + \frac{1}{(na+z)^3} + \frac{1}{(na+2z)^3} + \ldots + \frac{1}{[na+(n-1)z]^3}\right] \frac{z^3}{3}$$

$$- \left[\frac{1}{n^4a^4} + \frac{1}{(na+z)^4} + \frac{1}{(na+2z)^4} + \ldots + \frac{1}{[na+(n-1)z]^4}\right] \frac{z^4}{4}$$

u. s. f.

Die zweite Formel (ν' gibt (da $A_n = \frac{1}{a+n\alpha}$, $A'_n = -\frac{1}{(a+n\alpha)^2}$ u. s. w. ist):

$$\int_a^{a+z} \frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{na+z} + \frac{1}{na+2z} + \ldots + \frac{1}{n(a+z)}\right] z$$

$$+ \left[\frac{1}{(na+z)^2} + \frac{1}{(na+2z)^2} + \ldots + \frac{1}{[n(a+z)]^2}\right] \frac{z^2}{2}$$

$$+ \left[\frac{1}{(na+z)^3} + \frac{1}{(na+2z)^3} + \ldots + \frac{1}{[n(a+z)]^3}\right]\frac{z^3}{3}$$

+ u. s. w.

Die dritte Formel (*w* endlich gibt:

$$\int_a^{a+z} \frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{na+z} + \frac{1}{na+2z} + \ldots + \frac{1}{na+(n-1)z} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{na} + \frac{1}{n(a+z)}\right)\right] z$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2a^2} - \frac{1}{[n(a+z)]^2}\right]\frac{z^2}{2}$$

$$+ \left[\frac{1}{(na+z)^3} + \frac{1}{(na+2z)^3} + \ldots + \frac{1}{[na+(n-1)z]^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{[na]^3} + \frac{1}{[n(a+z)]^3}\right)\right]\frac{z^3}{3}$$

— etc.

Da nun n beliebig angenommen werden kann, so hat man die Convergenz dieser Reihen gänzlich in seiner Gewalt.

Fünftes Capitel.

Von der Integration der *höhern* Differentialausdrücke *Einer*, und der *Partialdifferentiale mehrerer* Variablen.

§. 162.

Bisher war immer der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = X$ oder die Differentialgleichung der ersten Ordnung $dy = X dx$ bekannt oder gegeben, aus der wir durch Zurückleitung oder Integration y, d. i. $\int X dx$ bestimmt haben. Nehmen wir nun an, daſs bloſs der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 y}{dx^2} = X$ oder die Gleichung zweiter Ordnung $d^2 y = X dx^2$ bekannt sey, aus welcher man die ursprüngliche Function herleiten soll; so ist klar, daſs dieses nur durch eine zweimalige Integration möglich sey. Es ist nämlich $\frac{d^2 y}{dx} = X dx$ und wegen $\frac{d^2 y}{dx} = d.\frac{dy}{dx}$, wenn nämlich dx wieder als beständig angenommen wird, auch $d.\frac{dy}{dx} = X dx$; also, wenn man integrirt:

$$\frac{dy}{dx} = \int X dx = f(x) + C.$$

Daraus ist weiters $dy = f(x) dx + C dx$, und wenn man abermals integrirt:

$$y = \int f(x) dx + Cx + C',$$

wo C' die willkürliche Constante der zweiten Integration bezeichnet. Es ist also auch, wegen $f(x) = \int X dx$:

$$y = \int dx \int X dx + Cx + C',$$

wobei $\int dx \int X dx$ zwei auf einander folgende Integrationen andeutet.

§. 163.

Ist eben so das **dritte** Differential, oder die Differentialgleichung der **dritten** Ordnung gegeben, und soll daraus die ursprüngliche Function zurückgeleitet oder gefunden werden; so sey

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = X, \text{ also } \frac{d^3 y}{d x^2} = X d x, \text{ oder } d.\frac{d^2 y}{d x^2} = X d x;$$

daraus erhält man, durch eine erste Integration, wenn man $\int X d x = f(x)$ setzt:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f(x) + C.$$

Ferner ist daraus

$$\frac{d^2 y}{d x} = f(x) d x + C d x \text{ oder } d.\frac{d y}{d x} = f(x) d x + C d x,$$

und wenn man wieder integrirt und $\int f(x) d x = f'(x)$ setzt:

$$\frac{d y}{d x} = f'(x) + C x + C'.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt weiters:

$$d y = f'(x) d x + C x d x + C' d x,$$

und wenn man endlich zum dritten Mal integrirt:

$$y = \int d x f'(x) + \tfrac{1}{2} C x^2 + C' x + C'',$$

wo C'' die dritte unbestimmte Constante, durch die dritte Integration eingeführt, bezeichnet.

Geht man auf die Bedeutung von $f'(x)$ und $f(x)$ zurück, so erhält man endlich, da man auch statt $\frac{1}{2} C$: C setzen kann, indem C noch unbestimmt ist:

$$y = \int d x \int d x \int X d x + C x^2 + C' x + C'';$$

dabei müssen die drei auf einander folgenden Integrationen, welche hier im ersten Gliede des zweiten Theils der Gleichung angedeutet sind, so verstanden werden, daſs die durch Integration von $X d x$ gefundene Function $f(x)$ mit $d x$ multiplicirt, dieses Product $f(x) d x$ neuerdings integrirt, die entstehende Function $f'(x)$ wieder mit $d x$ multiplicirt, und endlich das Product $f'(x) d x$ abermals integrirt werden soll.

Diese wiederholten Integrationen deutet man, von den

Constanten abstrahirt, auf folgende Art einfacher und bestimmter an:

Aus $d^2y = X dx^2$ hat man $y = \int\int X dx^2 = \int^2 X dx^2$; aus $d^3y = X dx^3$: $y = \int\int\int X dx^3 = \int^3 X dx^3$, und so allgemein, aus $d^n y = X dx^n$: $y = \int^n X dx^n$.

B e i s p i e l.

Um z. B. aus dem vierten Differentialquotienten $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{x^4}$ die ursprüngliche Function y zu finden, hat man auch $d^4 y = \frac{dx^4}{x^4}$, und daraus:

$$y = \int dx \int dx \int dx \int \frac{dx}{x^4} + Cx^3 + C'x^2 + C''x + C'''.$$

Nun ist

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3x^3}, \text{ also } \int dx \int \frac{dx}{x^4} = \int -\frac{dx}{3x^3} = \frac{1}{3.2x^2};$$

daher

$$\int dx \int dx \int \frac{dx}{x^4} = \int \frac{dx}{3.2x^2} = -\frac{1}{3.2.1x};$$

mithin endlich

$$\int dx \int dx \int dx \int \frac{dx}{x^4} = \int \frac{-dx}{3.2.1x} = -\frac{1}{1.2.3} \int \frac{dx}{x} = \frac{-1}{1.2.3} lx.$$

Es ist also

$$y = \int^4 \frac{dx^4}{x^4} = -\frac{lx}{1.2.3} + Cx^3 + C'x^2 + C''x + C''',$$

welcher Ausdruck sofort vier unbestimmte Constante enthält.

§. 164.

Mit Hilfe der ursprünglichen Reductionsformel (α, §. 124), oder mittelst der theilweisen Integrationsmethode lassen sich die h ö h e r n Integrale $\int^2 X dx^2$, $\int^3 X dx^3$, u. s. w auf lauter e i n f a c h e Integrale zurückführen. Es ist nämlich

$$\int^2 X dx^2 = \int dx \int X dx = x \int X dx - \int X x dx,$$

wenn man in (α (§. 124.) $u = \int X dx$ und $dv = dx$ setzt;

$$\int^3 X dx^3 = \int dx \int^2 X dx^2 = \int x dx \int X dx - \int dx \int X x dx,$$

wenn man für $\int^2 X dx^2$ den eben gefundenen Werth setzt. Nun ist aber, wenn in der genannten Formel (α, $u = \int X dx$ und $x dx = dv$ gesetzt wird:

$$\int x\,dx \int X\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \int X\,dx - \tfrac{1}{2}\int X x^2\,dx,$$

und wenn man in derselben Formel $u = \int X x\,dx$ und $dv = dx$ nimmt:

$$\int dx \int X x\,dx = x \int X x\,dx - \int X x^2\,dx;$$

folglich erhält man durch Substitution dieser Werthe in den vorigen Ausdruck von $\int^3 X\,dx^3$ sofort:

$$\int^3 X\,dx^3 = \tfrac{1}{2}x^2 \int X\,dx - x\int X x\,dx + \tfrac{1}{2}\int X x^2\,dx.$$

Fährt man nun auf diese Weise fort, so erhält man der Reihe nach:

$$\int X\,dx = \int X\,dx$$

$$\int^2 X\,dx^2 = \tfrac{1}{1}\left[x\int X\,dx - \int X x\,dx\right]$$

$$\int^3 X\,dx^3 = \frac{1}{1\,.\,2}\left[x^2\int X\,dx - 2x\int X x\,dx + \int X x^2\,dx\right]$$

$$\int^4 X\,dx^4 = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left[x^3\int X\,dx - 3x^2\int X x\,dx + 3x\int X x^2\,dx - \int X x^3\,dx\right]$$

u. s. w.

Die in diesen Formeln, wovon das Gesetz klar ist, ausgelassenen unbestimmten Constanten kann man hineinbringen, indem man statt $\int X\,dx$: $\int X dx + C$, statt $\int X x dx$: $\int X x dx + C'$ u. s. w. setzt. Da sich diese Constanten nicht mit einander verbinden oder reduciren lassen, indem jede mit einer andern Potenz von x multiplicirt wird; so erscheinen in jedem höhern Integrale eben so viele willkürliche oder unbestimmte Constanten, als der Ordnungsexponent Einheiten hat.

So erhält man z. B. durch diese Substitution oder Ergänzung aus der letzten hier noch angeführten Formel:

$$\int^4 X\,dx^4 = \frac{1}{2\,.\,3}\left[x^3\int X\,dx + Cx^3 - 3x^2\int X x\,dx - 3C'x^2 + 3x\int X x^2 dx + 3C''x - \int X x^3 dx - C'''\right]$$

oder, da man statt $\frac{C}{2\,.\,3}$, $-\frac{C'}{2}$, $\frac{C''}{2}$ und $-\frac{C'''}{2\,.\,3}$ schlechtweg C, C', C'', C''' schreiben kann, auch:

$$\int^4 X dx^4 = \frac{1}{2\,.\,3}\left[x^3\int X dx - 3x^2\int X x dx + 3x\int X x^2 dx - \int X x^3 dx\right] + Cx^3 + C'x^2 + C''x + C'''.$$

Auf die nämliche Art verfährt man mit den übrigen Formeln dieses Paragraphes.

Beispiel.

Setzt man in dieser letzten Formel wieder $X = \frac{1}{x^4}$, so erhält man ganz einfach wie im vorigen Paragraphe:

$$\int^4 \frac{dx^4}{x^2} = \frac{1}{2.3}\left[-\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} - 3 - lx\right] + Cx^3 + Cx^2 + C'x + C'',$$

$$= -\frac{lx}{2.3} + Cx^3 + C'x^2 + C''x + C''',$$

wenn man nämlich den Bruch $-\frac{11}{36}$ zur unbestimmten Constante C''' nimmt.

Integration der *partiellen* Differentiale.

§. 165.

Bezeichnet u eine Function der beiden von einander unabhängigen Variablen x und y, und ist der zweite partielle Differentialquotient $\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) = z$, also (§. 18.) $z = f(x, y)$; so läſst sich, obschon hier zwei veränderliche Gröſsen x, y erscheinen, die ursprüngliche Function u aus $z\, dx\, dy$ dennoch nach denselben Regeln, die wir für die Integration von Differentialformeln von Einer Variablen entwickelt haben, herleiten; weil nach dem Sinne dieses Differentialquotienten, der Reihe nach nur immer eine der beiden Gröſsen x, y als variabel, die andere aber als constant angesehen wird. Es ist nämlich, wenn man das Integral nach x durch $\int_x$ und jenes nach y durch $\int_y$ bezeichnet, wegen

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) = \left(\frac{d.\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\right) \text{ auch: } \left(\frac{d.\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\right) dy = z\, dy;$$

folglich, wenn man beiderseits nach y, d. i. so integrirt, als ob in z (als Function von x und y) bloſs y variabel wäre:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \int_y z\, dy;$$

daraus folgt ferner $\left(\frac{du}{dx}\right) dx = dx \int_y z\, dy$, und wenn man abermals, und zwar bloſs nach x integrirt, endlich:

$$u = \int_x dx \int_y z\, dy;$$

dabei ist, wegen $\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) = \left(\frac{d^2 u}{dy\, dx}\right)$ [§. 20., β)], die Ord-

nung der Integration im Allgemeinen willkürlich, und es ist daher auch $u = \int_y dy \int_x z\,dx$ *).

Kürzer und gewöhnlicher ist die Bezeichnung:

$$u = \int\int z\,dx\,dy \text{ oder } u = \int\int z\,dy\,dx,$$

wobei sich jedes der beiden Integralzeichen nur immer auf eine der beiden Variablen x oder y bezieht; ein solches Integral wird auch ein doppeltes oder zweifaches (duplicirtes) Integral genannt.

Hinsichtlich der willkürlichen Constanten muſs noch bemerkt werden, daſs man der nöthigen Allgemeinheit wegen, dem nach y integrirten Differential eine unbestimmte Function von x, z. B. X, und nach der in Bezug auf x vorgenommenen Integration eine willkürliche Function von y, z. B. Y, als solche beifügen muſs (analog mit dem Verfahren im Bd. I., §. 185.), weil nur gefordert wird, daſs das Differential der willkürlichen Constante Null sey; was auch für die erstere oder X der Fall ist, wenn man nach y, und bei der letztern oder Y geschieht, wenn man nach x (in demselben Sinne, in welchem man integrirt hat) differentiirt. Da indeſs in der Anwendung auf Geometrie oder Mechanik diese Integrale immer innerhalb bestimmter Grenzen genom-

*) Für bestimmte Integrale, welche innerhalb gegebener Grenzen genommen werden (§. 157.), ist dieses jedoch nicht allgemein der Fall, und es leidet diese Regel immer dort eine Ausnahme, wo $z = f(x, y)$ für gewisse innerhalb der gegebenen Grenzen liegenden Werthe von x und y die Form $\frac{0}{0}$ annimmt und dabei Unendlich ist. *Cauchy* hat zuerst diese Bemerkung in Bezug auf die Function

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = z,$$

wofür $u = arc.\,tang. \left(\frac{y}{x}\right)$ ist, gemacht nnd gezeigt, daſs man für das bestimmte Integral, welches von $x = -1$ bis $x = +1$ und von $y = -1$ bis $y = +1$ genommen wird, nach Verschiedenheit der Ordnung, in welcher man die doppelte Integration vornimmt, auch verschiedene Resultate erhält; weil die angeführten Grenzen die Werthe $x = 0$ und $y = 0$ einschlieſsen, für welche $\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = z$ unbestimmt wird und dabei, wie man sich leicht überzeugt, durch Unendlich geht. Mehreres hierüber findet man im ersten Bande der: »*Nouveaux Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, par divers Savans.*«

men werden, so sind (§. 157.) diese willkürlichen Constanten, die nun die eine als Function von x, die andere als Function von y auftreten, überflüssig.

§. 166.

Beispiele.

1) Es sey $u = \int\int \frac{dx\,dy}{x+y}$ zu bestimmen. Löst man den Bruch $\frac{1}{x+y}$ in eine Reihe auf, so erhält man:

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} - \frac{y^3}{x^4} + \ldots {}^{*})$$

und wenn diese mit dy multiplicirt und dann nach y integrirt wird:

$$\int \frac{dy}{x+y} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^3}{3x^3} - \frac{y^4}{4x^4} + \ldots + X;$$

wo X eine willkürliche oder unbestimmte Function von x bezeichnet.

Multiplicirt man dieses letztere Integral mit dx und integrirt nach x, d. i. so, als ob y beständig wäre; so erhält man

$$\int dx \int \frac{dy}{x+y} = u = y\,lx + \frac{y^2}{2x} - \frac{y^3}{6x^2} + \frac{y^4}{12x^3} - \ldots + \int X dx + Y;$$

wobei Y eine willkürliche Function von y ist.

Kehrt man die Ordnung der beiden Integrationen um, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{x+y} = dx \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} - \ldots\right)$$

$$= lx + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^3}{3x^3} - \ldots + Y'$$

und ferner

$$\int dy \int \frac{dx}{x+y} = y\,lx + \frac{y^2}{2x} - \frac{y^3}{6x^2} + \frac{y^4}{12x^3} - \ldots + \int Y' dy + X';$$

ein Resultat, welches mit dem vorigen identisch ist, wenn man, was offenbar erlaubt ist, $\int X dx = X'$ und $\int Y' dy = Y$ setzt.

*) Diese Reihe ist brauchbar für $x > y$. Wäre umgekehrt $x < y$, so würde man die folgende nehmen:

$$\frac{1}{y+x} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} - \frac{x^3}{y^4} + \ldots$$

2) Es sey $\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right) dx\,dy = \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$, also

$$u = \iint \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \int dx \int \frac{dy}{x^2+y^2} = \int dy \int \frac{dx}{x^2+y^2}.$$

Nach der ersten Darstellung ist, da x als constant angesehen wird [§. 108., (m)]:

$$\int \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}\, arc.tang.\left(\frac{y}{x}\right) + X',$$

wobei X' die beliebige Function von x bezeichnet; und wenn man neuerdings, und zwar nach x integrirt und $\int X'\,dx = X$ setzt:

$$\int dx \int \frac{dy}{x^2+y^2} = \int dx \left[\frac{1}{x}\, arc.tang.\left(\frac{y}{x}\right) + X'\right]$$

$$= \int \frac{dx}{x}\, arc.tang.\left(\frac{y}{x}\right) + X.$$

Setzt man endlich, um die noch angezeigte Integration durch Näherung zu finden, für $arc.tang.\left(\frac{y}{x}\right)$ die Reihe (§. 13., 2.):

$$\frac{y}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{y}{x}\right)^7 + \ldots;$$

so erhält man, mit Hinzufügung einer willkürlichen Function von y:

$$\iint \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = X + Y - \frac{y}{x} + \frac{1}{9}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{1}{25}\left(\frac{y}{x}\right)^5 + \frac{1}{49}\left(\frac{y}{x}\right)^7 - \text{etc.}$$

Kehrt man die Ordnung dieser beiden Integrationen um, oder nimmt den zweiten Ausdruck von u; so erhält man:

$$\int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y}\, arc.tang.\left(\frac{x}{y}\right) + Y'$$

und

$$\int dy \int \frac{dx}{x^2+y^2} = \int dy \left[\frac{1}{y}\, arc.tang.\left(\frac{x}{y}\right) + Y'\right]$$

$$= \int \frac{dy}{y}\, arc.tang.\left(\frac{x}{y}\right) + Y,$$

wenn man nämlich $\int Y'\,dy = Y$ setzt.

Bemerkt man, daſs

$$arc.tang.\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - arc.cot.\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - arc.tang.\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist; so erhält man auch, wenn sogleich die willkürliche Function in x beigefügt wird:

$$\int\int\frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}ly - \int\frac{dy}{y}\,arc.\,tang.\left(\frac{y}{x}\right) + Y + X$$

$$= X + Y - \frac{y}{x} + \frac{1}{9}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{1}{25}\left(\frac{y}{x}\right)^5 + \ldots$$

wenn man nämlich wieder für $arc.\,tang.\left(\frac{y}{x}\right)$ die vorige Reihe setzt und das Glied $\frac{\pi}{2}ly$ mit der willkürlichen Function Y vereinigt.

Anmerk. Beispiele über zweifache Integrale, welche innerhalb bestimmter Grenzen zu nehmen sind, werden im siebenten Capitel bei der Quadratur und Cubatur der Flächen und Körper (§. 183.) vorkommen.

§. 167.

Man wird nun auch leicht die Bedeutung des bei Anwendung der Analyse auf die Mechanik öfters vorkommenden dreifachen (triplicirten) Integrals $\int\int\int v\,dx\,dy\,dz$, wobei v im Allgemeinen eine Function der drei von einander unabhängigen veränderlichen Gröfsen x, y, z bezeichnet, verstehen und von selbst bemerken, dafs sich von den drei Integralzeichen jedes auf eine andere der drei Variablen x, y, z bezieht. Ist nämlich der partielle Differentialcoefficient $\left(\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz}\right) = v$ gegeben, so findet man daraus mittelst der angezeigten dreifachen Integration die ursprüngliche Function u; oder es ist, wenn man z. B. zuerst nach z, dann nach y und endlich nach x integrirt (im Allgemeinen ist die Ordnung wieder willkürlich):

$$u = \int_x dx \int_y dy \int_z v\,dz.$$

In Bezug auf die willkürlichen Constanten ist zu bemerken, dafs man nach der ersten, oder Integration in Absicht auf z, eine willkürliche Function von x und y; nach der zweiten, oder Integration nach y, eine Function von x und z; und endlich nach der dritten, oder Integration nach x, eine willkürliche Function von y und z, wie sich schon aus dem, was über die willkürlichen Constanten der zweifachen Inte-

grale bemerkt wurde, folgern läſst, beifügen muſs. Man hat nämlich nach der ersten Integration:

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) = \int v\, dz + U'',$$

wo U'' eine willkürliche Function von x und y bezeichnet.

Daraus folgt weiters

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) dy = \left(\frac{d.\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\right) dy = dy \int v\, dz + U'' dy,$$

und wenn man jetzt nach y integrirt und $\int U'' dy = U'$ setzt, wo also immer noch U' eine willkürliche oder unbestimmte Function von x und y ist:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \int dy \int v\, dz + U' + V',$$

wobei V' eine willkürliche Function von x und z bezeichnet.

Daraus erhält man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx = dx \int dy \int v\, dz + U' dx + V' dx,$$

und wenn man endlich nach x integrirt und $\int U' dx = U$, $\int V' dx = V$ setzt:

$$u = \int dx \int dy \int v\, dz + U + V + W,$$

wobei also U eine willkürliche Function von x und y, V eine solche Function von x und z, und W eine willkürliche oder beliebige Function von y und z bezeichnet, und woraus sofort folgt, daſs jedes vollständige oder allgemeine Integral dieser Art drei solche willkürliche Functionen enthalten muſs. In der Regel werden aber auch solche Integrale nur innerhalb bestimmter Grenzen, und zwar am häufigsten: in Bezug auf z, von $z = F(x, y)$ bis $z = f(x, y)$; in Beziehung auf y, von $y = F_1(x)$ bis $y = f_1(x)$; und in Hinsicht auf x, von $x = A$ bis $x = a$ genommen, wo F, f, F_1 und f_1 gegebene Functionen bezeichnen.

Man sieht endlich leicht, daſs man auf dieselbe Art die vier-, fünf-, . . . nfachen Integrale bestimmen könnte, wenn sie irgend eine Anwendung fänden.

Sechstes Capitel.

Von der Integration der *vollständigen*, dann *homogenen* Differentiale zweier oder mehrerer Variablen der *ersten* Ordnung

Integration der *vollständigen* Differentialformeln.

§. 168.

Da jede Function mehrerer von einander unabhängigen veränderlichen Gröſsen zweierlei Differentialen: partielle und vollständige, hat (§. 16.); so kann auch umgekehrt verlangt werden, diese Function entweder aus einem gegebenen Partial-, oder aus ihrem vollständigen Differential zu finden oder zurück zu leiten. Das erstere ist, wie wir im vorigen Capitel gesehen haben, immer (wenigstens näherungsweise) möglich, indem sich die ganze Aufgabe auf die Integration eines Differentials Einer Variablen reducirt; die Auflösung der zweiten Aufgabe, die schon schwieriger ist, soll uns im gegenwärtigen Capitel beschäftigen.

Indem wir uns auf die Integration der vollständigen Differentialausdrücke der ersten Ordnung beschränken, nehmen wir zuerst eine Function von zwei Variablen x und y an.

Ist also $u = f(x, y)$ irgend eine Function von x und y, so ist [§. 16., (1]

$$du = P dx + Q dy \;...\; (1$$

das vollständige Differential derselben, wobei im Allgemeinen P und Q ebenfalls wieder gewisse Functionen von x und y sind und für welche noch insbesondere [§. 21., 1)] die Bedingungsgleichung Statt findet:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \;...\; (2.$$

Um nun aus der Differentialformel (1 die Function u zurück zu leiten, bemerke man, dafs P das partielle Differential von u nach x ist, indem man hat (§. 16.) $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$. Integrirt man daher dieses partielle Differential ebenfalls nach x, so erhält man

$$u = \int_x P\,dx + Y \ldots (3,$$

wobei Y als eine unbestimmte Function von y die Stelle der willkürlichen Constante vertritt (s. das vorige Capitel). Diese willkürliche Function Y wird aber hier durch die Bedingung bestimmt, dafs auch [was aus (1 folgt] $\left(\frac{du}{dy}\right) = Q$ seyn mufs. Differentiirt man demnach diese Gleichung (3 nach y und setzt das Integral:

$$\int_x P\,dx = v \ldots (4;$$

so erhält man

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{dY}{dy},$$

folglich auch nach der vorigen Bedingungsgleichung:

$$Q = \left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{dY}{dy} \text{ *)},$$

und daraus folgt:

$$\frac{dY}{dy} = Q - \left(\frac{dv}{dy}\right) \text{ oder } dY = \left[Q - \left(\frac{dv}{dy}\right)\right] dy.$$

Diese Gleichung integrirt, gibt

$$Y = \int \left[Q - \left(\frac{dv}{dy}\right)\right] dy,$$

so, dafs man endlich zufolge der Gleichung (3, mit Berücksichtigung der Relation (4 hat:

$$u = v + \int \left[Q - \left(\frac{dv}{dy}\right)\right] dy \ldots \text{I.};$$

ein Ausdruck, welcher offenbar vollständig bestimmt wer-

*) Hier ist es wesentlich zu bemerken, dafs $\frac{dY}{dy}$ kein partielles, sondern ein totales oder vollständiges Differential bezeichnet (aus diesem Grunde haben wir auch diesen Bruch nicht eingeklammert).

den kann, wenn $\left[Q - \left(\frac{dv}{dy}\right)\right]$ bloſs eine Function von y ist und sofort kein x enthält. Daſs aber dieses letztere wirklich der Fall ist, kann mit Hilfe der obigen Bedingungsgleichung (2 auf folgende Art gezeigt werden:

Setzt man der Kürze wegen $Q - \left(\frac{dv}{dy}\right) = S$, so ist, wenn man nach x differentiirt:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{d^2v}{dy\,dx}\right).$$

Nun ist aber (§. 20.)

$$\left(\frac{d^2v}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d.\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dy}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right),$$

wenn man nämlich für $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ den aus (4 folgenden Werth P setzt; man hat also:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right);$$

also mit Rücksicht auf die genannte Bedingungsgleichung (2, endlich:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = 0;$$

zum Beweise, daſs S oder die genannte Differenz kein x enthält, und diese demnach entweder bloſs eine Function von y, oder gänzlich constant ist *).

*) Der Gang dieser Entwicklung kann selbst dazu dienen, die obige Bedingungsgleichung (2, wenn man diese nicht als bekannt voraussetzen will, abzuleiten. Ist man nämlich in der Entwicklung bis zur Gleichung I. gekommen, so schlieſst man: daſs $Q - \left(\frac{dv}{dy}\right)$ kein x enthalten kann, weil sonst nicht, was doch aus der vorausgesetzten Gleichung (1 folgt, $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$ seyn könnte, wovon man sich überzeugt, wenn man die Gl. I. nach x differentiirt und dabei die Relation (4 berücksichtiget. Enthält aber diese Differenz kein x, so ist ihr Differential nach x Null, d. i.

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{d^2v}{dy\,dx}\right) = 0,$$

Es ist endlich leicht zu sehen, dafs man auf die nämliche Art, nach welcher man bei dieser Entwicklung vom Differentialcoefficienten P ausgegangen und auf die Gleichung I. gekommen ist, auch mit dem Coefficienten Q anfangen kann, wodurch man bei derselben oder ganz ähnlichen Entwickelung, wenn man $\int_y Q\,dy = v'$ setzt, auf die Gleichung

$$u = v' + \int\left[P - \left(\frac{dv'}{dx}\right)\right] dx \ldots \text{II.},$$

und wobei jetzt die Differenz $P - \left(\frac{dv'}{dx}\right)$ kein y enthält, kommt. Auch versteht es sich von selbst, dafs man in beiden Formeln nach der angezeigten Integration noch die willkürliche Constante C hinzufügen mufs.

Anmerk. Da oben das Partialdifferential

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(\frac{d\int_x P\,dx}{dy}\right)$$

vorkommt, so wollen wir davon Anlafs nehmen zu zeigen, wie man Gröfsen unter dem Integralzeichen, nach einer andern Variablen, als auf welche sich das Zeichen $\int$ bezieht, differentiirt.

Es war $\left(\frac{dv}{dx}\right) = P$, also ist

$$\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right), \text{ oder auch } \left(\frac{d.\left(\frac{dv}{dy}\right)}{dx}\right) dx = \left(\frac{dP}{dy}\right) dx$$

folglich, wenn man beiderseits nach x integrirt:

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \int_x \left(\frac{dP}{dy}\right) dx,$$

so, dafs man also durch Vergleichung endlich hat:

$$\left(\frac{d.\int_x P\,dx}{dy}\right) = \int_x \left(\frac{dP}{dy}\right) dx.$$

Diese Relation drückt ein von *Leibnitz* herrührendes Theorem

oder da man wie oben $\left(\frac{d^2v}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right)$ findet, auch

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right) = 0;$$

und dieses ist die genannte Bedingungsgleichung (2, welche bestehen mufs, wenn der Ausdruck $P\,dx + Q\,dy$ ein vollständiges Differential einer Function von x und y seyn soll.

aus, welches er *differentiatio de curva in curvam* nannte, und welches jetzt kurz: das Differentiiren unter dem Integralzeichen heifst *).

*) Nimmt man diese Differentiation mit dem bestimmten Integral $\int_a^b P\,dx$ vor, so können erstens die beiden Grenzen a und b von der Variablen y unabhängig, oder zweitens von dieser Gröfse auf irgend eine Art abhängig seyn.

Im ersten Falle bleibt offenbar Alles wie oben, d. h. man hat

$$\left(\frac{d\int_a^b P\,dx}{dy}\right) = \int_a^b \left(\frac{dP}{dy}\right) dx.$$

Im zweiten Falle hingegen, in welchem $a = f(y)$ und $b = F(y)$ seyn mag, gehen diese Grenzen, während in $P = \varphi(x, y)$ y in $y + dy$ übergeht, beziehungsweise in $f(y + dy)$ und $F(y + dy)$, nämlich (nach dem *Taylor*'schen Satze, wobei die höhern Potenzen der Zunahme dy wegfallen) in

$$a + \frac{da}{dy}dy = a' \text{ und } b + \frac{db}{dy}dy = b'$$

über. Durch das Hinausrücken der Grenze b um $\frac{db}{dy}dy$ wird das Integral $\int_a^b P\,dx$ vergröfsert um den Werth von $\int_b^{b'} P\,dx$; dagegen wird es, durch das Hineinrücken der Grenze a um $\frac{da}{dy}dy$ vermindert um den Werth $\int_a^{a'} P\,dx$. Da nun beides gleichzeitig geschieht, so beträgt die eigentliche Vermehrung des obigen Integrals die Gröfse:

$$\int_b^{b'} P\,dx - \int_a^{a'} P\,dx \ldots (\alpha.$$

Nun ist aber [wenn man $P = \varphi(x, y)$ setzt] zufolge des in der Note auf S. 392 angeführten Ausdruckes p), wenn man darin statt a: b, und statt b: $b' = b + \frac{db}{dy}dy$, folglich [zufolge der Relation n) in ders. Note] $\delta_1 = \delta_n = \frac{db}{dy}dy$ setzt:

$$\int_b^{b'} \varphi(x, y)\,dx = \varphi(b, y)\frac{db}{dy}dy.$$

Und auf dieselbe Weise:

$$\int_a^{a'} \varphi(x, y)\,dx = \varphi(a, y)\frac{da}{dy}dy;$$

die oben in (α ausgedrückte Vermehrung des Integrals $\int_a^b P\,dx$ ist also auch gleich

§. 169.

Beispiele.

1) Es sey die Differentialformel

$$du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

zu integriren. Hier ist $P = \frac{y}{x^2+y^2}$ und $Q = \frac{-x}{x^2+y^2}$, folglich

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

so, daſs in der That die obige Bedingungsgleichung (2 erfüllt ist. Man hat nun,

$$v = \int_x P\,dx = \int_x \frac{y\,dx}{y^2+x^2} = arc.\,tang. \left(\frac{x}{y}\right) \quad [\S.\ 108,\ (m]$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2},\ Q - \left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = 0,$$

also endlich nach I:

$$u = v = arc.\,tang.\left(\frac{x}{y}\right) + C.$$

2) Für den Differentialausdruck

$$\frac{dx}{x} + \frac{dx + dy}{2(x+y)} - \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

welchen wir Kürze halber wieder durch du bezeichnen wollen, wird, wie die Vergleichung mit der Differentialgleichung (1 (im vorigen Paragr.) zeigt:

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+y)} - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \text{ und } Q = \frac{1}{2(x+y)} - \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

$$\left[\varphi(b,y)\frac{db}{dy} - \varphi(a,y)\frac{da}{dy}\right] dy,$$

und es ist sofort in diesem zweiten Falle der vollständige Differentialquotient:

$$\left(\frac{d\int_a^b P\,dx}{dy}\right) = \int_a^b \left(\frac{dP}{dy}\right) dx + \varphi(b,y)\frac{db}{dy} - \varphi(a,y)\frac{da}{dy}.$$

Aus diesem Ausdrucke folgt auch, wenn y in P nicht vorkömmt und die beiden Grenzen a und b von einander unabhängig sind, indem man nach und nach $y = a$ und $y = b$ setzt:

$$\left(\frac{d\int_a^b \varphi(x)dx}{da}\right) = -\varphi(a) \text{ und } \left(\frac{d\int_a^b \varphi(x)dx}{db}\right) = \varphi(b).$$

dafür ist

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2(x+y)^2} = \left(\frac{dQ}{dx}\right);$$

also auch hier du ein vollständiges Differential oder die Bedingung der Integrabilität erfüllt. Da wir in diesem Beispiel die Formel II. anwenden wollen, so wird

$$v' = \int_y Q\,dy = \tfrac{1}{2}\int_y \frac{dy}{x+y} - \int_y \frac{y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$\text{d. i.}\quad v' = \tfrac{1}{2}l(x+y) - \sqrt{(x^2+y^2)},$$

folglich

$$\left(\frac{dv'}{dx}\right) = \frac{1}{2(x+y)} - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \text{ und daher } P - \left(\frac{dv'}{dx}\right) = \frac{1}{x}$$

(in der That blofs eine Function von x). Es ist also endlich nach II. des vorigen Paragraphes:

$$u = v' + \int\frac{dx}{x} = v' + lx + C,$$

oder für v' substituirt:

$$u = \tfrac{1}{2}l(x+y) + lx - \sqrt{(x^2+y^2)} + C;$$

welches Ergebnifs natürlich auch nach der Formel I. erhalten wird.

§. 170.

Um aus einem vollständigen Differentiale einer Function von mehr als zwei veränderlichen Gröfsen die ursprüngliche Function zu finden, darf das in den beiden letzten Paragraphen entwickelte Verfahren nur wiederholt angewendet werden; es reicht daher hin, wenn wir das Gesagte durch die Zurückleitung einer Function von drei Variablen erläutern.

Es sey zu diesem Ende

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

das vollständige Differential einer Function u der drei Variablen x, y, z, wobei P, Q, R im Allgemeinen ebenfalls Functionen dieser drei veränderlichen Gröfsen seyn werden (§. 16.); so findet man bekanntlich (§. 21.) die für die Vollständigkeit des Differentials zeugenden drei Bedingungsgleichungen, welche zugleich hier die Integrabilität des

gegebenen Differentials bedingen, indem man nach der Reihe jede der drei Variablen als constant ansieht und aus dem gegebenen Differential die drei vollständigen Differentialausdrücke von zwei Variablen: $P\,dx + Q\,dy$, $P\,dx + R\,dz$ und $Q\,dy + R\,dz$ erhält, die sofort [§. 168., (2] der Reihe nach die Bedingungsgleichungen geben [§. 21., 2)]:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Nachdem man sich also bei einem gegebenen Differential du der obigen Form, von dem Bestehen dieser drei Bedingungsgleichungen überzeugt hat, beginnt man die Integration mit einem der drei vorigen vollständigen Differentialausdrücke zweier Variablen, z. B. gleich mit dem ersten $P\,dx + Q\,dy$, und sucht davon nach §. 168. das Integral, welches wir durch w bezeichnen wollen; so kann man setzen:

$$l)\quad u = \int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = w + Z,$$

wobei offenbar Z bloſs eine Function von z seyn, also weder x noch y enthalten kann.

Nimmt man nun das vollständige Differential dieses letzten Ausdrucks, so erhält man, da w eine Function von x, y und z ist:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \left(\frac{dw}{dx}\right)dx + \left(\frac{dw}{dy}\right)dy + \left(\frac{dw}{dz}\right)dz + dZ,$$

und daraus, wenn man je zwei der drei Variablen als constant ansieht:

$$m)\quad P = \left(\frac{dw}{dx}\right);\ Q = \left(\frac{dw}{dy}\right) \text{ und } R = \left(\frac{dw}{dz}\right) + \frac{dZ}{dz}.$$

Aus der letztern Relation folgt:

$$dZ = \left[R - \left(\frac{dw}{dz}\right)\right]dz,$$

und daraus

$$Z = \int\left[R - \left(\frac{dw}{dz}\right)\right]dz.$$

Diese Function Z kann aber offenbar nach dem Frühern bestimmt werden, wenn die Differenz $R - \left(\frac{dw}{dz}\right)$ bloſs

eine Function von z ist und also weder x noch y enthält; daſs dieses aber wirklich der Fall ist, läſst sich auf folgende Art zeigen:

Setzt man Kürze halber $R - \left(\frac{dw}{dz}\right) = S$, so wird, wenn man einmal nach x und einmal nach y differentiirt:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) - \left(\frac{d^2w}{dz\,dx}\right) \text{ und } \left(\frac{dS}{dy}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{d^2w}{dz\,dy}\right);$$

es ist aber

$$\left(\frac{d^2w}{dz\,dx}\right) = \left(\frac{d.\left(\frac{dw}{dx}\right)}{dz}\right) = \left(\frac{dP}{dz}\right)$$

[mit Berücksichtigung der Relation m)]; und eben so

$$\left(\frac{d^2w}{dz\,dy}\right) = \left(\frac{d.\left(\frac{dw}{dy}\right)}{dz}\right) = \left(\frac{dQ}{dz}\right),$$

folglich wenn man diese Werthe substituirt, auch:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0$$

$$\text{und } \left(\frac{dS}{dy}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0$$

(zufolge der obigen drei Bedingungsgleichungen) zum offenbaren Beweis, daſs S weder x noch y enthält.

Es ist also endlich nach der Gleichung l):

$$n)\quad u = w + \int\left[R - \left(\frac{dw}{dz}\right)\right]dz.$$

§. 171.

Beispiel.

Es sey zur Erläuterung des eben Vorgetragenen, aus dem Differentialausdruck

$$du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} + \frac{z\,dx - x\,dz}{x^2 + z^2} + z\,dz$$

die Function u zu bestimmen.

Hier ist, wie leicht zu sehen:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2} = \left(\frac{dR}{dx}\right)$$

und $$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{dR}{dy}\right),$$

so, daſs hier du in der That ein vollständiges Differential einer Function u von drei veränderlichen Gröſsen x, y, z ist.

Setzt man nun $Pdx + Qdy = dw$, so wird nach I., §. 168.:

$$w = \int_x \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} + \int_x \frac{z\,dx}{z^2+x^2} \quad \left[= v, \text{ wegen } Q - \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0\right]$$

$$= \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} + arc.\,tang.\left(\frac{x}{z}\right);$$

folglich ist $$\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} - \frac{x}{x^2+z^2}$$

und daher $R - \left(\frac{dw}{dz}\right) = z$ (bloſs eine Function von z); also endlich nach der Formel n) des vorigen Paragraphes, wegen $\int\left[R - \left(\frac{dw}{dz}\right)\right]dz = \int z\,dz = \frac{1}{2}z^2$:

$$u = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} + arc.\,tang.\left(\frac{x}{z}\right) + \tfrac{1}{2}z^2 + C.$$

Integration der *homogenen* Differentialausdrücke der *ersten* Ordnung.

§. 172.

Die bereits in §. 22. entwickelte merkwürdige Relation, welche zwischen einer homogenen Function und den Differentialcoefficienten ihres vollständigen Differentials Statt findet, biethet ein äuſserst einfaches Verfahren zur Integration homogener Differentialausdrücke von mehreren Variablen dar. Denn es sey

$$Pdx + Qdy + Rdz + \ldots = du$$

ein vollständiges Differential einer Function u von den Variablen x, y, z, . . . und zugleich so beschaffen, daſs P, Q, R, . . . homogene Functionen dieser Variablen von einem und demselben Grade m sind, wodurch also u

eine homogene Function vom $(m+1)^{\text{sten}}$ Grade wird; so hat man zufolge dieser Relation [q), §. 22.]:

$$Px + Qy + Rz + \ldots = (m+1)u,$$

also

$$A)\ u = \int(Pdx + Qdy + Rdz + ..) = \frac{Px + Qy + Rz + ..}{m+1} + C.$$

§. 173.

B e i s p i e l e.

1) Für das Integral $\int(y\,dx + x\,dy)$ hat man $P = y$, $Q = x$, $m = 1$ und $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, so, dafs die Bedingung für die Integrabilität vorhanden ist. Nach der vorigen Formel A) ist daher

$$\int(y\,dx + x\,dy) = \frac{yx + xy}{2} = xy + C.$$

2) Um den Differentialausdruck

$$(3x^2 + 2ay^2)\,dx + (4axy + 3by^2)\,dy\ (= du)$$

zu integriren, für welchen

$$P = 3x^2 + 2ay^2 \text{ und } Q = 4axy + 3by^2$$

homogene Functionen des $m = 2^{\text{ten}}$ Grades sind, hat man wieder nach der genannten Formel A):

$$u = \frac{(3x^2 + 2ay^2)x + (4axy + 3by^2)y}{3} = x^3 + 2axy^2 + by^3 + C$$

und es ist hier u eine homogene Function von x und y des dritten Grades.

Anmerk. 1. Dieses Verfahren ist selbst dann noch anwendbar, wenn aufser den algebraischen homogenen Functionen noch transcendente vorkommen, vorausgesetzt, dafs diese in Bezug auf die Variablen $x, y, \ldots$ vom Grade 0, also nur wie constante Factoren mitzuzählen sind.

B e i s p i e l.

So ist z. B. für

$$du = \left[x - \frac{y^3}{x^2 + (x+y)^2} + 2x\,l\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx$$
$$+ \left[\frac{xy^2}{x^2 + (x+y)^2} - \frac{x^2}{y} + 2y\,arc.tang.\left(\frac{x+y}{x}\right)\right]dy$$

$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ und $m = 1$, also nach A):

$$2u = x^2 - \frac{xy^3}{x^2 + (x+y)^2} + 2x^2\, l\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+ \frac{xy^3}{x^2 + (x+y)^2} - x^2 + 2y^2 arc.\, tang.\left(\frac{x+y}{x}\right)$$

oder $u = x^2\, l\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 arc.\, tang.\left(\frac{x+y}{x}\right) + C.$

Anmerk. 2. Für den Fall von $m = -1$ ist dieses Verfahren oder die Formel A) des vorigen Paragraphes unbrauchbar, indem diese dann auf die identische Gleichung $0 = 0$ führt. So ist z. B. für das Differential $\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$

$$P = \frac{y}{x^2 + y^2},\quad Q = \frac{-x}{x^2 + y^2},$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \text{ und } m = -1;$$

also nach der Formel A):

$$\frac{y}{x^2 + y^2}\,x - \frac{x}{x^2 + y^2}\,y = 0\,u = 0$$

eine zwar richtige Gleichung, die aber, da sie identisch ist, nichts nützt.

In einem solchen Falle, in welchem durch die Formel $\frac{Px + Qy + \ldots}{0}$ fast immer angezeigt wird, daſs das gesuchte Integral nicht algebraisch ist, muſs man wieder zur allgemeinen Integrationsmethode §. 170. seine Zuflucht nehmen. So ist für das gegenwärtige Beispiel nach §. 169.:

$$u = arc.\, tang.\left(\frac{x}{y}\right) + C.$$

Siebentes Capitel.

Anwendung der bisher entwickelten Integralformeln auf die *Rectification* und *Quadratur* der ebenen Curven; *Quadratur* oder *Complanation* der krummen Oberflächen; und *Cubatur* der von solchen Flächen begrenzten Körper.

Rectification der Curven.

§. 174.

Erklärung.

Eine Curve rectificiren, heifst: eine gerade Linie finden, welche mit einem bestimmten Bogen der Curve einerlei Länge besitzt, oder auch: den Bogen durch die seinen Endpuncten entsprechenden Abscissen ausdrücken.

Im §. 46., (1, haben wir für das Element oder Differential des Bogens einer ebenen Curve, diese auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen, den Ausdruck gefunden:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = dy\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)};$$

setzt man in diese Formel für dy oder $\frac{dy}{dx}$ den aus der Gleichung der Curve hervorgehenden Werth, welcher immer als Function von x erscheint; so hat man nach der Integration für den gesuchten Bogen:

$$a)\quad s = \int dx\sqrt{\left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)} = \int dx\sqrt{[1 + \varphi(x)]} = \int X dx,$$

welches Integral nach den vorhergehenden Capiteln dieses Abschnittes, je nach Beschaffenheit von X, entweder genau, oder näherungsweise bestimmt werden kann; im ersten Falle heifst auch die Curve rectificabel.

§. 175.

Beispiele.

1) Es sey als erstes uad einfachstes Beispiel die zu rectificirende Curve die Evolvente des Kreises, für welche wir bereits das Curvenelement im §. 74. entwickelt und [Anmerk., (n] dafür $ds = R\varphi d\varphi$ gefunden haben. Aus dieser Gleichung ist also

$$s = \int R\varphi d\varphi = \tfrac{1}{2} R\varphi^2 + C,$$

und da für $\varphi = 0$ auch $s = 0$ seyn mufs, so wird hier die Constante C ebenfalls Null, so, dafs man für einen beliebigen Abwicklungswinkel φ hat: $s = \frac{1}{2} R\varphi^2$.

2) Für die gemeine Kettenlinie hat man [S. 322, 3)] $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$, folglich:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{(a+x)\,dx}{\sqrt{(2ax + x^2)}}.$$

Es ist daher die Länge des Bogens

$$s = \int \frac{(a+x)\,dx}{\sqrt{(2ax + x^2)}} = \sqrt{(2ax + x^2)},$$

welchem Integral keine Constante beizufügen ist, wenn man den Bogen vom Anfangspunct der Abscisse x aus zählt; diese Curve ist also rectificabel.

3) Aus der Gleichung der cubischen oder *Neil*'schen Parabel [§. 55., (b'] : $y^2 = p'x^3$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}\sqrt{p'}.x^{\frac{1}{2}};$$

mithin ist für diese Curve:

$$s = \int dx \sqrt{(1 + \tfrac{9}{4}p'x)} = \frac{8}{27p'}(1 + \tfrac{9}{4}p'x)^{\frac{3}{2}} + C \quad (\text{§. 107., 7.})$$

und da der Scheitel dieser Curve im Ursprung der Coordinaten liegt, folglich für $x = 0$ auch $s = 0$ wird; so hat man zur Bestimmung von C die Bedingungsgleichung: $0 = \frac{8}{27p'} + C$, woraus sofort $C = -\frac{8}{27p'}$, also endlich

$$s = \frac{8}{27p'}\left[(1 + \tfrac{9}{4}p'x)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

folgt.

Anmerk. Nimmt man für die Gleichung dieser Parabel: $y^2 = \frac{16}{27p} x^3$, wie wir sie in §. 55. (b' als Evolute der Apollonischen Parabel $y^2 = px$ wirklich gefunden haben; so wird, wegen $p' = \frac{16}{27p}$:

$$s = \tfrac{1}{2}p\left[\left(1 + \frac{4x}{3p}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] \text{*)}.$$

4) Nehmen wir gleich die allgemeine Gleichung für die Familie der Parabeln, d. i. (§. 55., Note)

$$y^n = px^m \text{ oder } y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} = qx^r,$$

wenn man nämlich der gröfseren Einfachheit wegen, $p^{\frac{1}{n}} = q$ und $\frac{m}{n} = r$ setzt; so wird

$$\frac{dy}{dx} = qrx^{r-1} \text{ und } \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{(1 + q^2 r^2 x^{2r-2})},$$

folglich nach der Formel α):

$$s = \int dx (1 + q^2 r^2 x^{2r-2})^{\frac{1}{2}}.$$

Dieses Integral, welches sofort zu den binomischen gehört, läfst sich durch einen geschlossenen algebraischen Ausdruck darstellen, wenn (§. 122., Regel 1.) $2r - 2$ in der Einheit enthalten, d. h. wenn $\frac{1}{2r-2}$ eine ganze positive Zahl ist. Wird diese Zahl durch k bezeichnet, so folgt, dafs alle Parabeln rectificabel sind, für welche $\frac{1}{2r-2} = k$,

*) Dafs diese Curve, welche gewöhnlich die semicubische Parabel genannt wurde (unter der cubischen verstand man jene, deren Gleichung $y^3 = a^2 x$ ist), unter allen Curven zuerst, und zwar von *Neil* (*Wilh. N.*, geb. zu Yorkshire 1637; gest. 1670) rectificirt worden ist, so wie auch den Umstand, dafs die Evolute einer jeden algebraischen Curve rectificabel sey, haben wir schon im §. 55. (Note) bemerkt. Hier soll noch hinzugefügt werden, dafs diese *Paraboloides semicubicalis* (oder *Parabola cubicalis secunda*) aufserdem noch diejenige Linie ist, auf welcher ein schwerer, beweglicher Punct, in gleichen Zeittheilchen in der lothrechten Richtung gleich tief fällt und die sogenannte *curva descensus aequabilis* bildet.

also $r = \frac{1+2k}{2k}$ ist; deren gibt es demnach unzählig viele. Für die übrigen kann der Bogen entweder nur durch transcendente Functionen oder approximativ ausgedrückt werden.

a) Für $k = 1$ wird $r = \frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, oder am einfachsten $m = 3$ und $n = 2$, folglich $y^2 = p x^3$; welches die Gleichung der bereits im vorigen Beispiele rectificirten *Neil*'schen Parabel ist.

b) Für die gemeine oder Apollonische Parabel ist $n = 2$ und $m = 1$, folglich $r = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ und $q^2 = p$, also

$$s = \int dx \left(1 + \frac{p}{4} x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \int \frac{dx \sqrt{(a+x)}}{\sqrt{x}},$$

wenn man zur gröſsern Einfachheit $\frac{p}{4} = a$ setzt. Nun ist aber

$$\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{x}} = \frac{a+x}{\sqrt{(ax+x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{(ax+x^2)}} + \frac{a}{\sqrt{(ax+x^2)}};$$

folglich auch

$$s = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax+x^2)}} + a \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+x^2)}}.$$

Da nun (§. 138., Beisp. 1.)

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax+x^2)}} = \sqrt{(ax+x^2)} - \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+x^2)}}$$

und (§. 120., Beisp. 1.)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+x^2)}} = l\,[a + 2x + 2\sqrt{(ax+x^2)}]$$

ist; so hat man:

$$s = \sqrt{(ax+x^2)} + \frac{a}{2}\, l\,[a + 2x + 2\sqrt{(ax+x^2)}] + C,$$

oder, wenn man wieder für a den Werth $\frac{p}{4}$ zurück substituirt und den Bogen vom Scheitel an zählt, wodurch für $x = 0$ auch $s = 0$, also wegen $0 = \frac{a}{2}\, l a + C$ die Constante $C = -\frac{a}{2}\, l a$ wird, endlich:

$$s = \sqrt{(\tfrac{1}{4} p x + x^2)} + \frac{p}{8}\, l \left[\frac{\tfrac{1}{4} p + 2x + 2\sqrt{(\tfrac{1}{4} p x + x^2)}}{\tfrac{1}{4} p}\right].$$

Anmerk. In jenen Fällen, in welchen die Gleichung der Curve die Form $x = \varphi(y)$ hat, oder in welchen überhaupt bei dieser Form der Gleichung die Rectification einfacher ausfällt, gibt man der obigen Formel α) (§. 174.) die Gestalt:

$$s = \int dy \sqrt{\left(1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2\right)}.$$

So ist z. B. hier, wenn man $x = p'y^2$ für die Gleichung der gemeinen Parabel nimmt, $\frac{dx}{dy} = 2p'y$, und daher

δ) $s = \int dy \sqrt{(1 + 4p'^2y^2)}$, oder [§. 136., ($r$]:

$$= \frac{1}{4p'} l[2p'y + \sqrt{(1 + 4p'y^2)}] + \tfrac{1}{2} y \sqrt{(1 + 4p'y^2)},$$

zu welchem Integral keine Constante kommt, wenn man dasselbe mit $y = 0$ anfangen läſst.

5) Ist die gegebene Curve ein Kreis vom Halbmesser a, also ihre Gleichung, je nachdem die Abscissen vom Mittelpunct oder Endpunct des Durchmessers gezählt werden (Bd. II., §. 16.),

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)} \text{ oder } y = \sqrt{(2ax - x^2)};$$

so erhält man aus der erstern:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \text{ und aus der letztern } \frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

Im ersten Falle ist also nach α) (§. 174.)

$$s = a\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \text{ und im zweiten } s = a\int\frac{dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}};$$

beide diese Integrale, die wir bereits im §. 154. (Beisp. 5, wo nur statt x: $\frac{x}{a}$ zu setzen ist, und Beisp. 7) mittelst Reihen ausgedrückt haben, lassen sich aber nur näherungsweise bestimmen.

6) Für die Rectification der Ellipse hat man, wenn die Abscissen vom Mittelpunct gezählt werden, §. 46., Beispiel [Form. (m]:

$$ds = \frac{dx\sqrt{(a^4 - c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} \quad . . . (p;$$

wobei a die halbe groſse, b die halbe kleine Axe und $c^2 = a^2 - b^2$ das Quadrat der Excentricität ist. Setzt man $a = 1$, oder was vorzuziehen ist, um die Gröſse a in der

Rechnung zu behalten,

$$\frac{c^2}{a^2} = e^2 \text{ und } \frac{x^2}{a^2} = z^2 \text{ oder } \frac{x}{a} = z;$$

so erhält man, wegen $dx = adz$:

$$s = a\int\frac{dz\sqrt{(1-e^2z^2)}}{\sqrt{(1-z^2)}},$$

ein Integral, welches wir bereits im §. 155., Beisp. 1), näherungsweise entwickelt haben. Es ist nämlich, wenn man (a. a. O.) sogleich wieder für z und e^2 die Werthe $\frac{x}{a}$ und $\frac{c^2}{a^2}$ herstellt:

$$s = aA + \frac{c^2}{2a}\left[\frac{x}{2a}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} - \tfrac{1}{2}A\right]$$
$$+\frac{1.1}{2.4}\frac{c^4}{a^3}\left[\left(\frac{x^3}{4a^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x}{a}\right)\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}-\frac{1.3}{2.4}A\right]+\ldots+C,$$

wobei A für *arc. sin.* $\left(\frac{x}{a}\right)$ steht.

Läfst man den Bogen oder das Integral mit $x = 0$ anfangen, so wird, da auch $A = arc. sin. 0 = 0$ ist: $0 = 0 + C$, also die Constante ebenfalls Null. Soll sich ferner das Integral bis $x = a$ erstrecken, so wird, wenn man den Umfang der Ellipse durch u bezeichnet, der Bogen $s = \frac{1}{4}u$, und aus der vorigen Reihe, wegen

$$A = arc. sin. \frac{a}{a} = \frac{\pi}{2} \text{ und } \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 0,$$

wenn man auch gleich mit 4 multiplicirt:

$$u = 2a\pi\left[1 - \tfrac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\frac{c}{a}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\frac{c^2}{a^2}\right)^2\right.$$
$$\left.- \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{c^3}{a^3}\right)^2 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{c^4}{a^4}\right)^2 - \ldots\right]\text{*)}.$$

Diese Reihe convergirt um so besser, je kleiner die Excentricität $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$ ist.

Für $a = b$ oder $c = 0$ verwandelt sich die Ellipse in

*) Man bemerkt von selbst, dafs dieser Ausdruck nichts anderes, als das bestimmte Integral $\int_0^a \frac{dx\sqrt{(a^4-c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$ ist.

einen Kreis vom Halbmesser a, und man hat dann, wie es seyn soll:

$$u = 2 a \pi.$$

Der elliptische Bogen läſst sich ferner sehr einfach durch den entsprechenden Bogen des über der groſsen Axe beschriebenen Kreises ausdrücken. Ist nämlich (Fig. 60) ABA' die Halbellipse, ADA' der über $AA' = 2a$ beschriebene Halbkreis, und für einen beliebigen Punct m desselben W. $DCm = \varphi$; so ist, wenn man die Ordinate mMP zieht, $CP = x$ $(= mp) = a \sin. \varphi$, folglich Fig. 60.

$$\varphi = arc. \sin. \left(\frac{x}{a}\right) \text{ und } d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Setzt man diese Werthe in der obigen Gleichung (p und zugleich wieder $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, so erhält man:

$$q) \quad s = a \int d\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin.^2 \varphi)},$$

ein Integral, welches sich ebenfalls nur durch eine unendliche Reihe bestimmen läſst *) (m. s. die Ausführung desselben in der Anmerk. am Schlusse dieses Capitels, S. 470).

Anmerk. Es ist $\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ um so kleiner, je weniger b von a verschieden ist; der Natur der Sache nach bleibt zwar immer $\frac{c^2}{a^2} < 1$, es nähert sich aber dieser Bruch der Einheit um so mehr, je kleiner b gegen a, d. i. je gestreckter die Ellipse wird. Da in diesem Falle die obigen Reihen nicht sehr schnell convergiren, so hat man noch auf andern Wegen die elliptischen Bogen zu berechnen gesucht **). Ein vorzügliches Hilfsmittel hiezu hat *Giulio Fagnani* in dem (im J. 1718 von ihm entdeckten) Umstande gefunden, daſs sich sowohl auf der Ellipse, wie auf der Hyperbel Bogen angeben lassen, deren Unterschied eine algebraische Function ist (vergl. die Anmerk. am Schlusse des achten Capitels des

*) Vergl. die hieher gehörige Anmerk. 2) über die elliptischen Functionen oder Transcendenten am Ende des gegenwärt. Capitels, S. 472.

**) Auch *Euler* hat zur Berechnung der Bögen von sehr gestreckten Ellipsen eigene Reihen entwickelt (m. s. im zweiten Theile seiner *Opusculorum varii argumenti*, den Artikel: *de rectificatione ellipseos*).

ersten Abschnitts); er stellte in seinen »*Produzioni Matematiche*«, T. II., wo er aufser dem berühmten Problem: »*Nuovo metodo per rettificare le differenze di due archi (uno dei quali è dato) in infinite specie di parabole irrettificabili*« auch ein hierauf Bezug habendes Theorem auf, welches (S. 336) unter der Aufschrift zu finden ist: »*Nella sua nuova misura degli Archi Ellittici ed Iperbolici,*« auf das wir aber hier nicht eingehen können und sofort auf den dritten Theil des mehr erwähnten Werkes: *Brunacci Corso di Matematica Sublime* (S. 31) verweisen müssen.

Diese Entdeckung veranlafste den scharfsinnigen *Euler*, die Sache weiter zu verfolgen, und man findet über diesen Gegenstand in den neuen Petersburger Commentarien (T. VI., VII., XII. u. s. w.) und in den *Actis Acad. Petrop.*, *T.* V. *P.* II. u. s. w. (m. s. auch dessen Integralrechnung) mehrere, diesem grofsen Analysten würdige, Abhandlungen. M s. auch das von *A. M. Le Gendre* herausgegebene treffliche Werk: »*Exercices de Calcul intégral sur divers ordres de Transcendantes et sur les Quadratures.*« *Paris* 1811 — 1817.

Auch kann man in der obigen Formel (p $x = a\, sin.\, z$ setzen, wodurch $dx = a\, cos.\, z\, dz$, und $\surd(a^2 - x^2) = a\, cos.\, z$ und

$$\surd[a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2] = a \surd[a^2 - (a^2 - b^2)\, sin.^2 z]$$
$$= a \surd(a^2 cos.^2 z + b^2 sin.^2 z);$$

also nach einer einfachen Reduction:

$$s = \int dz \surd[a^2 cos.^2 z + b^2 sin.^2 z] = \int \frac{(a^2 cos.^2 z + b^2 sin.^2 z)\, dz}{\surd(a^2 cos.^2 z + b^2 sin.^2 z)},$$

oder wegen $cos.^2 z = \frac{1}{2}(1 + cos.\, 2z)$ und $sin.^2 z = \frac{1}{2}(1 - cos.\, 2z)$ endlich

$$s = \frac{(a^2 + b^2)}{2} \int \frac{dz}{\surd(a^2 cos.^2 z + b^2 sin.^2 z)}$$
$$+ \frac{(a^2 - b^2)}{2} \int \frac{dz\, cos.\, 2z}{\surd(a^2 cos.^2 z + b^2 sin.^2 z)},$$

welche beiden Integrale am besten nach einer von *Gaufs* in dem vierten Bande der neuern Abhandlungen der Göttinger gelehrten Gesellschaft*) vorgetragenen Methode behandelt werden können.

7) Aus der Gleichung der Hyperbel $y = \frac{b}{a} \surd(x^2 - a^2)$ (Bd. II., §. 62.) folgt:

*) *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis Recentiores Vol.* IV. *Ad A.* 1816 — 18.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{(x^2 - a^2)}},$$

mithin nach der Formel a), §. 174., wenn man $a^2 + b^2 = c^2$ setzt:

$$s = \int \frac{l\,x\,\sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}{a\,\sqrt{(x^2 - a^2)}}.$$

Nimmt man a zur Einheit und entwickelt $\sqrt{(c^2 x^2 - 1)}$ in eine Reihe, so erhält man

$$s = c\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)}} - \frac{1}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} - \frac{1.1}{2.4\,c^3}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(x^2-1)}} - \text{etc.}$$

und wenn man für diese Integrale, da das erste ohnehin bekannt und $= \sqrt{(x^2 - 1)}$ ist, vom zweiten angefangen, die im §. 134., b) gefundenen Werthe setzt und die Constante so bestimmt, dafs für $x = 1$: $s = 0$ (also das dortige $A' = arc.\,sin.\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$) wird, endlich:

$$s = [c - \frac{1.1}{2.4\,c^3}\cdot\frac{1}{2x^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6\,c^5}\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{1.3}{2.4\,x^2}\right) - ..]\sqrt{(x^2-1)}$$
$$- \left(\frac{\pi}{2} - arc.\,sin.\frac{1}{x}\right) \times$$
$$\left[\frac{1}{2c} + \frac{1.1}{2.4c^3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1.1.3}{2.4.6c^5}\cdot\frac{1.3}{2.4} + \ldots\right].$$

Anmerk. Will man die Gröfse a wieder sichtbar machen und in diese Formel hineinbringen, so darf man nur statt s, c und x setzen: $\frac{s}{a}$, $\frac{c}{a}$ und $\frac{x}{a}$; dadurch erhält man:

$$s = \left[\frac{c}{a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{a^2}{2x^2} - \text{etc.}\right]\sqrt{(x^2 - a^2)}$$
$$- a\left(\frac{\pi}{2} - arc.\,sin.\frac{a}{x}\right)\left[\frac{a}{2c} + \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{c^3} + \ldots\right]$$

wobei $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ ist.

Denkt man sich durch den Punct x, y der Hyperbel mit der Asymptote eine Parallele gezogen, so ist, wie leicht zu sehen, die Länge dieser Parallelen vom genannten Punct der Curve bis zum Durchschnitt der ersten Axe:

$$l = \frac{y}{b}\sqrt{(a^2 + b^2)} = \frac{c}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)};$$

man hat also, wenn der Bogen s bis zu demselben Punct der Curve genommen wird, nach der vorigen Formel:

$$s = l - \left[\frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{a^3}{c^3} \cdot \frac{a^2}{2x^2} + \ldots\right] \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

$$- a\left(\frac{\pi}{2} - arc.sin.\frac{a}{x}\right)\left[\frac{a}{2c} + \frac{1.1}{2.4}\frac{1}{3}.\frac{a^3}{c^3} + \ldots\right].$$

Für $x = \infty$ fällt die betreffende Parallele mit der Asymptote zusammen, und man hat, da alle mit x verbundenen Glieder dieser Reihe verschwinden und auch $arc. sin. \frac{a}{x} = 0$ wird, für die Differenz zwischen der Länge der Asymptote l und dem ganzen unendlichen Ast s der Hyperbel:

$$l - s = \frac{a^2\pi}{4c}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\frac{a^2}{c^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{a^3}{c^3}\right)^2 + \ldots\right].$$

8) Die Differentialgleichung der gemeinen **Cycloide** ist [§. 71., (3)]:

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}},\ \text{folglich}\ \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(2a)}.\frac{dy}{\sqrt{(2a - y)}}$$

und daher für diese Curve:

$$s = \sqrt{(2a)}\int\frac{dy}{\sqrt{(2a - y)}} = -\sqrt{(2a)}.2\sqrt{(2a - y)} + C$$

oder

$$s = C - 2\sqrt{[2a(2a - y)]}.$$

Zählt man den Bogen vom Ursprung der Coordinaten A
Fig. 38. an (Fig. 38), so wird für $x = y = 0$ auch $s = 0$; es ist also $0 = C - 2\sqrt{(4a^2)}$ und daraus die unbestimmte Constante $C = 4a$, so, daſs

$$s = 4a - 2\sqrt{[2a(2a - y)]}$$

die Länge eines Bogens AM bezeichnet, dessen Endpunct M die Ordinate $PM = y$ entspricht. Für die Länge des halben cycloidischen Bogens AD hat man daher, wegen $y = 2a$:

$$\text{Bog.}\,AD = 4a,\ \text{folglich auch Bog.}\,ADB = 8a;$$

es ist also der ganze cycloidische Bogen dem vierfachen Durchmesser des Erzeugungskreises gleich, und wir haben hier sofort wieder ein Beispiel von einer Curve, die sich genau rectificiren läſst *).

*) Zählt man den Bogen vom Scheitel D, oder läſst man das obige Integral in diesem Punct anfangen; so wird für $y = 2a$:

9) Um auch noch ein paar Beispiele für die Rectification der Polarcurven aufzustellen, wollen wir nach der im §. 68. entwickelten Formel (5:

$$ds = d\varphi \sqrt{\left(u^2 + \frac{du^2}{d\varphi^2}\right)}$$

zuerst den Bogen der Archimedischen Spirale suchen. Da ihre Gleichung §. 78., (α, $u = \frac{\varphi}{2\pi}$ ist; so folgt

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi} \text{ und daher } ds = \frac{d\varphi}{2\pi} \sqrt{(1+\varphi^2)},$$

$$\text{oder } s = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi \sqrt{(1+\varphi^2)}.$$

Wird die Integration ausgeführt (was am einfachsten geschieht, indem man in der Formel δ), S. 431, Beispiel 4), Anmerk., $p' = \frac{1}{2}$ und $y = \varphi$ setzt), so erhält man

$$\int d\varphi \sqrt{(1+\varphi^2)} = \tfrac{1}{2} \varphi \sqrt{(1+\varphi^2)} + \tfrac{1}{2} l[\varphi + \sqrt{(1+\varphi^2)}] + C,$$

und da endlich für $\varphi = 0$ auch $s = 0$ ist, so hat man auch $C = 0$, also

$$s = \frac{1}{4\pi} \{\varphi \sqrt{(1+\varphi^2)} + l[\varphi + \sqrt{(1+\varphi^2)}]\}.$$

10) Nimmt man schliefslich noch die logarithmische Spirale, deren Gleichung (§. 81.) $u = a^\varphi$ ist; so folgt dafür $\frac{du}{d\varphi} = a^\varphi la$, also $ds = a^\varphi d\varphi \sqrt{(1 + l^2 a)}$ und

$$s = \sqrt{(1 + l^2 a)} \int a^\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{(1 + l^2 a)}}{la} a^\varphi = u \frac{\sqrt{(1 + l^2 a)}}{la};$$

$s = 0$, folglich auch $C = 0$; da aber jetzt mit einer Zunahme von y eine Abnahme von s verbunden, also s negativ zu nehmen ist (weil ds und dy verschiedene Zeichen erhalten), so erhält man nach der obigen Formel: $s = 2\sqrt{[2a(2a - y)]}$; und da man, um den Bogen DA oder DB zu erhalten, $y = 0$ setzen muss, so wird, wie vorhin: Bog. $DA = 4a$.

Es kann noch bemerkt werden, dafs auch

$$\sqrt{[2a(2a - y)]} = Dm$$

ist, welche Sehne, wenn sich der beschreibende Punct M in A und D befindet, beziehungsweise $= 2a$ und $= 0$ wird.

Setzt man $DG = 2a - y = y'$ und $2a = a'$, so wird nach der vorigen Formel für s:

$$\text{Bog } DM \text{ oder } s = 2\sqrt{(a'y')} \text{ oder } s^2 = 4a'y';$$

ein Ausdruck, der in der Mechanik vorkömmt.

wozu keine Constante kommt, weil für $u = o$ auch $s = o$ seyn soll.

Für $a = e$ wird wegen $la = le = 1$: $s = u\sqrt{2}$, gleich der Diagonale des über dem Leitstrahl construirten Quadrates *).

11) Um endlich auch ein Beispiel für die Curven von doppelter Krümmung auszuführen, wofür wir (§. 98.) die Formel $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ gefunden haben, wollen wir die sphärische Loxodrome rectificiren.

Die Differentialgleichung dieser Curve ist [S. 287., (1)]

$$dv = - tang.\, a \frac{dw}{sin.\, w} \; **),$$

wobei die Coordinaten v und w auf der Kugelfläche liegende gröfste Kreisbogen sind.

Um aber die obige Formel hierauf anwenden zu können, beziehe man die Loxodrome auf drei rechtwinkelige Coordinatenaxen, die sich im Mittelpunct der Kugel schneiden, von denen die Axe der z die Erdaxe ist, die Axe der x aber in der Ebene des Aequators liegt und zu jenen Punct desselben gezogen seyn soll, für welchen die Länge Null ist; so hat man, wie leicht zu sehen:

*) Die übrigen Curven, deren Gleichungen wir noch im vorigen Abschnitte entwickelt haben, wird der Studirende nun leicht selbst rectificiren können.

**) Also, wie wir a. a. O. [(2] gefunden haben, ihre endliche Gleichung: $v = C + tang.\, a\; l\, cot. \frac{1}{2} w$. Will man die Loxodrome nicht, wie es dort geschehen, von dem Punct auslaufen lassen, in welchem die Länge $v = o$ ist, sondern nimmt man, was allgemeiner ist, an, dafs die Gröfsen v (die Länge) und w (das Complement der Breite) für die Oerter der Abfahrt und Ankunft des Schiffes beziehungsweise die Werthe v', w' und v'', w'' haben; so hat man zur Bestimmung der Constante die Gleichung $v' = C + tang.\, a\; l\, cot. \frac{1}{2} w'$, folglich auch:

$$v - v' = tang.\, a\; l \left[\frac{cot. \frac{1}{2} w}{cot. \frac{1}{2} w'}\right] = tang.\, a\; l \left\{\frac{tang.\, (45 + \frac{1}{2}\varphi)}{tang.\, (45 + \frac{1}{2}\varphi')}\right\}$$

und zur Bestimmung des Winkels a jene:

$$v'' - v' = tang.\, a\; l \left[\frac{cot. \frac{1}{2} w''}{cot. \frac{1}{2} w'}\right] = tang.\, a\; l \left\{\frac{tang.(45 + \frac{1}{2}\varphi'')}{tang.(45 + \frac{1}{2}\varphi')}\right\}$$

wenn man nämlich die Breite $(90 - w) = \varphi$ setzt.

$x = \sin. w \cos. v$, $y = \sin. w \sin. v$ und $z = \cos. w$;
also, wenn man differentiirt:

$$dx = \cos. v \cos. w\, dw - \sin. w \sin. v\, dv$$
$$dy = \sin. v \cos. w\, dw + \sin. w \cos. v\, dv$$
$$dz = - \sin. w\, dw$$

und daher

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dw^2 + \sin.^2 w\, dv^2,$$

oder, wenn man für dv den Werth aus der obigen Gleichung der Curve setzt:

$$ds^2 = dw^2 (1 + \tang.^2 \alpha) = \frac{dw^2}{\cos^2 \alpha};$$

mithin endlich

$$ds = - \frac{dw}{\cos. \alpha}, \text{ also } s = C - \frac{w}{\cos. \alpha}.$$

Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel, auf welcher die Loxodrome liegt, statt mit 1 durch r, setzt ferner $w = 90 - \varphi$, wo φ die geographische Breite oder Polhöhe des Schiffes bezeichnet, und nimmt endlich dieses Integral von $\varphi = \varphi'$ (der Breite des Orts der Abfahrt) bis $\varphi = \varphi''$ (der Br. des Orts der Ankunft); so erhält man für die ganze Länge des vom Schiff zurückgelegten Weges:

$$s = r \frac{\varphi'' - \varphi'}{\cos. \alpha} = r (\varphi'' - \varphi') \sec. \alpha \text{ *)}.$$

Quadratur der Curven.

§. 176.

Erklärung.

Eine ebene, auf Parallel-Coordinaten bezogene Curve quadriren, heifst im Allgemeinen die Fläche bestimmen, welche zwischen einem beliebigen Bogen der Curve, den

*) Für $\varphi'' = \varphi'$, in welchem Falle (S. 288) das Schiff in dem in der Breite φ' liegenden Parallelkreis segelt, hat man (da die obige Formel wegen $\varphi'' - \varphi' = 0$ und $\sec. \alpha = \infty$ unbrauchbar wird) offenbar:

$$s = r \cos. \varphi' . (v'' - v');$$

wo v' und v'' die geogr. Längen der Oerter der Abfahrt und Ankunft sind.

Ordinaten der Endpuncte dieses Bogens und der entsprechenden Abscisse liegt. Gewöhnlich nimmt man die Fläche vom Scheitel der Curve an.

Da wir §. 46., (2, bei der Voraussetzung von rechtwinkeligen Coordinaten, für das Flächenelement oder Differential der Fläche gefunden haben: $dz = y\,dx$ *); so reducirt sich, wenn $y = \varphi(x) = X$ die Gleichung der Curve ist, das Problem der Quadraturen auf die Bestimmung des Integrals:

$$\int X\,dx,$$

wo X irgend eine Function von x ist.

§. 177.

Beispiele.

1) Nehmen wir zuerst die Parabeln, deren Gleichung also $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$ ist; so erhalten wir dafür

$$\alpha) \quad z = p^{\frac{1}{n}} \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}} + C;$$

dabei mufs die Constante weggelassen werden, wenn man die Fläche z vom Ursprung der Coordinaten an zählt, weil für $x = 0$ zugleich $y = 0$, und folglich auch $z = 0$ ist.

Man sieht, dafs alle diese Curven quadrirbar sind.

a) Für die gemeine Parabel, für welche $m = 1$ und $n = 2$ ist, hat man

$$z = \tfrac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} x \sqrt{(px)} = \tfrac{2}{3} xy;$$

Fig. 49′ d. h. die Fläche des Segmentes APM (Fig. 49′) beträgt $\frac{2}{3}$ des Rechteckes aus der Abscisse AP und zugehörigen Ordinate PM **).

*) Es ist schon im angeführten Paragraphe bemerkt worden, dafs dieses Rechteck $y\,dx$ noch mit $\sin.\alpha$ multiplicirt werden mufs, wenn der Coordinatenwinkel kein Rechter, sondern $= \alpha$ ist.

**) Die Parabel wurde unter allen Curven zuerst, und zwar von *Archimedes* nach der sogenannten Exhaustionsmethode der Alten quadrirt; dabei beurkundete er ebenfalls seinen ungewöhnlichen Scharfsinn.

Soll aber die zwischen den beiden Ordinaten PM und $P'M'$, deren Abscissen $AP = a$ und $AP' = b$ sind, liegende Fläche $PP'M'M$ ausgedrückt werden; so bestimmt man entweder aus der Formel $z = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$ die Constante so, dafs für $x = a$: $z = 0$ wird, wofür man

$$C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \text{ und also } z = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$$

findet, und nimmt das Integral bis $x = b$, wodurch man für die gesuchte Fläche: $z = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$ erhält; oder man nimmt, was kürzer ist, sogleich (§. 157.) das bestimmte Integral $\int_a^b p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$.

Eben so wird man, wenn in α) die von den beiden bestimmten Ordinaten PM und $P'M'$, deren Abscissen $AP = a$ und $AP' = b$ sind, eingeschlossene Fläche z gefunden werden soll, aus dem unbestimmten Integral (α das bestimmte folgern:

$$\int_a^b p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} [b^{\frac{m+n}{n}} - a^{\frac{m+n}{n}}].$$

Anmerk. Da in a) nach der Gleichung der Curve $y = \pm \sqrt{(px)}$, y ein doppeltes Zeichen besitzt; so erhält auch der Ausdruck für die Fläche: $z = \frac{2}{3} xy$ dieses doppelte Zeichen, und so wie für die positive Ordinate PM (Fig. 49′) die Fläche positiv wird und das obere Segment APM ausdrückt, so erhält man für $-y$ oder PM'' die negative Fläche oder das untere Segment APM''. Fig. 49′

Um aber den Sinn oder Begriff von positiven und negativen Flächen noch bestimmter festzusetzen, wollen wir folgende Betrachtung anstellen.

Ist in der obigen Gleichung der Curve $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$ n eine gerade Zahl, so erhält sowohl y wie auch $z = Ax^{\frac{m+n}{n}}$ doppelte Zeichen, und es tritt der eben erwähnte Fall ein, dafs man zwei Segmente hat, wovon das obere der positiven und das untere der negativen Ordinate entspricht; es ist nämlich für $+x$ und $+y$: z positiv, und für $+x$ und $-y$: z negativ.

Sind n und m ungerad, so erhält sowohl y wie z nur

ein Zeichen; es wird aber y mit x zugleich positiv oder negativ, während z, es mag x positiv oder negativ seyn, immer (da $m + n$ gerad ist) positiv bleibt, so, daſs für $+x$ y und z positiv, für $-x$ aber y negativ und z positiv werden.

Ist endlich n ungerad und m gerad, so erhalten zwar y und z wieder nur ein Zeichen, es bleibt aber jetzt y positiv, es mag x positiv oder negativ genommen werden, während z (da $m + n$ ungerad ist) sein Zeichen mit jenem von x ändert; es wird nämlich für $+x$: y und z positiv und für $-x$: y positiv und z negativ. Alles dieses zusammengefaſst führt zu dem Schluſs: daſs die Flächen der Parabeln als *positiv* oder *negativ* anzusehen sind, je nachdem die Coordinaten x, y *gleiche* oder *ungleiche* Zeichen besitzen.

2) Für den Kreis, dessen Gleichung, die rechtw. Coordinaten vom Mittelpunct gezählt, $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ist, hat man $z = \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$, d. i. [§. 131., 2)]:

$$\alpha) \quad z = \frac{x}{2}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{a^2}{2}\, arc. sin. \left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

wobei die Constante wegfällt, wenn die Fläche von der im Mittelpunct errichteten Ordinate (für welche also $x = 0$ ist) gezählt wird; nimmt man dann das Integral bis $x = a$, so ergibt sich für die Fläche des Viertelkreises:

$$z = \tfrac{1}{2} a^2\, arc. sin. 1 = \tfrac{1}{2} a^2 . \frac{\pi}{2},$$

folglich ist, wie es seyn soll, die ganze Kreisfläche:

$$F = a^2 \pi.$$

Geht man von der Gleichung $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$ aus, bei welcher der Ursprung der Abscisse im Endpuncte des Durchmessers liegt; so wird, wenn man die Integration gleich ausführt [§. 135., 2)]:

$$z = \int dx \sqrt{(2ax - x^2)}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{(2ax - x^2)} - \frac{a^2}{2}\, arc. sin. \left(\frac{a - x}{a}\right) + C,$$

oder wegen $arc. sin. \alpha = \frac{\pi}{2} - arc. cos. \alpha$, wenn man $\frac{\pi}{2}$ zur Constante C nimmt:

$$\beta) \quad z = -\tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{(2ax - x^2)} + \tfrac{1}{2} a^2\, arc. cos. \left(\frac{a - x}{a}\right).$$

Zu diesem Integral kommt keine Constante, weil für $x = 0$ auch die Fläche $z = 0$ werden muſs; für $x = a$ erhält man dann $\frac{1}{4} F = \frac{1}{2} a^2 \, arc. cos. 0 = \frac{1}{2} a^2 \frac{\pi}{2}$, also wieder

$$F = a^2 \pi.$$

Wollte man π durch eine unendliche Reihe ausdrücken, so dürfte man für das vorige Integral $\int dx \sqrt{(2ax - x^2)}$ nur die im §. 154., 6), gefundene Reihe setzen und dasselbe von $x = 0$ bis $x = a$ nehmen.

Anmerk. Man erkennt in dem vorigen Ausdrucke β) leicht die Fläche des Dreieckes $CP'M'$ (Fig. 60), welche wegen $CP' = a - x$ und $M'P' = \sqrt{(2ax - x^2)}$, gleich $\frac{1}{2}(a - x)\sqrt{(2ax - x^2)}$ ist, und den Sector Fig. 60.

$$AC'M' = \frac{1}{2} a \, arc. AM' = \frac{1}{2} a \,.\, a \, arc. cos. \frac{CP'}{a}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \, arc. cos. \left(\frac{a - x}{a}\right).$$

Eben so zeigt sich im ersten Ausdruck der Fläche α) das Dreieck Cpm, dessen Fläche, wegen $CP = mp = x$, gleich $\frac{1}{2} xy = \frac{x}{2} \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ist, und der Sector

$$DCp = \frac{1}{2} a \, \text{Bog.} \, Dm = \frac{1}{2} a \,.\, a \, \text{Bog.} \, sin. \frac{x}{a} = \frac{1}{2} a^2 \, arc. sin. \frac{x}{a}.$$

3) Werden die Abscissen vom Scheitel gezählt, so hat man für die Ellipse:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(2ax - x^2)},$$

folglich für das elliptische Segment $Am'P'$ (Fig. 60): Fig. 60.

$$z = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{(2ax - x^2)}.$$

Da nun nach dem vorigen Beispiel das Integral $\int dx \sqrt{(2ax - x^2)}$ das Kreissegment $AP'M'$ darstellt und beide Segmente $AP'M'$ und $AP'm'$ zu gleicher Zeit Null werden, d. i. das Integral in beiden Flächen einerlei Anfang hat; so ist, wenn man $\int dx \sqrt{(2ax - x^2)} = X$ setzt:

$$AP'm' : AP'M' = \frac{b}{a} X : X = b : a.$$

Dieses constante Verhältniſs gilt nun für jede Abscisse

AP', so, dafs für $AP' = 2a$ die halbe Ellipse $\frac{1}{2}f$ mit dem, über der grofsen Axe $2a$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreis $\frac{1}{2}F$ in Vergleichung kommt und wofür man sofort hat:

$$\tfrac{1}{2}f : \tfrac{1}{2}F = b : a, \text{ oder auch } f : F = b : a;$$

es ist also $f = \frac{b}{a}F = \frac{b}{a}a^2\pi = ab\pi$.

Wird die Fläche des über der kleinen Axe beschriebenen Kreises durch F' bezeichnet, so hat man eben so (indem man nur a mit b verwechseln darf):

$f : F = a : b$, und daraus wieder $f = \frac{a}{b}F' = \frac{a}{b}.b^2\pi = ab\pi$.

Da $r = \sqrt{(ab)}$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und b, und die Fläche eines mit diesem Halbmesser beschriebenen Kreises ebenfalls $= r^2\pi = ab\pi$ ist; so folgt: dafs die Fläche einer Ellipse der Fläche eines Kreises gleich ist, dessen Halbmesser die mittlere geometrische Proportionalgröfse zwischen den beiden Halbaxen der Ellipse bildet.

4) Um die Fläche des elliptischen Sectors $A'nC$ (Fig. 60) zu bestimmen, dürfte man nur die bereits im §. 46. dafür gefundene Differentialformel [(p)

Fig. 60.

$$d.A'nC = -\tfrac{1}{2}\frac{ab\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

[§. 116., (d)] integriren. Wir ziehen es indefs vor, die genannte Fläche durch Vergleichung des elliptischen Sectors $A'Cn$ mit dem correspondirenden Kreissector $A'Cm$ zu gewinnen. Setzt man in der vorigen Differentialformel $b = a$, so geht offenbar der erstere in den letztern über, und man hat

$$d.A'Cm = -\tfrac{1}{2}\frac{a^2\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \tfrac{1}{2}a.\frac{-a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}};$$

dabei ist, wie man sieht [vergl. §. 175., 5), wo für ds das Zeichen — gesetzt werden mufs, weil hier der Bogen s von A', und nicht wie dort, von D aus gezählt wird], $-\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ das Differential des Bogens $A'm$; folglich ist (wie in der

That schon aus den Elementen bekannt)

Kreissector $A'Cm = \frac{1}{2} A'C.\text{Bog}.A'm.$

Da nun die beiden Sectoren $A'Cn$ uud $A'Cm$ wieder denselben Ursprung C haben, also gleichzeitig entstehen und verschwinden; so hat man, wenn $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ durch X bezeichnet wird:

ellipt.Sect.$A'Cn$: Kreissect.$A'Cm = -\frac{1}{2}abX : -\frac{1}{2}a^2X = b : a$,

also ellipt.Sect. $A'Cn = \frac{b}{a}$ Kreissect. $A'Cm = \frac{b}{a} . \frac{1}{2} a\,\text{Bog}.A'm.$

d. i.

ellipt. Sector $A'Cn = \frac{1}{2} CB.arc.A'm.$

Für $arc.A'm = arc.A'mA = a\pi$ wird Sect. $A'Cn = \frac{1}{2}f$, also wie oben:

$$\frac{1}{2}f = \frac{1}{2}b.a\pi \text{ oder } f = ab\pi.$$

5) Für die Hyperbel hat man, wenn die Abscissen vom Scheitel gezählt werden [Bd. II., §. 65., (2'],

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax + x^2)},$$

folglich $z = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{(2ax + x^2)}.$

Dieses Integral nach §. 136., Form. (r, entwickelt, gibt:

$$z = \frac{b}{a}\left\{\tfrac{1}{2}(a+x)\sqrt{(2ax+x^2)} + \tfrac{1}{2}a^2 l[\sqrt{(2ax+x^2)} - (a+x)]\right\} + C,$$

wobei, da für $x = o$ auch $z = o$ wird, die Constante C den Werth $-\frac{1}{2}abl(-a)$ erhält; auch kann dieses Integral nach §. 154. in eine unendliche Reihe aufgelöst werden.

Geht man dagegen von der Gleichung $y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$ [Bd. II., §. 62., (1] aus, so erhält man für die hyperbolische Fläche [§. 131., 1)]:

$$z = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{(x^2 - a^2)}$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{(x^2 - a^2)} - \frac{a^2}{2} l[x + \sqrt{(x^2 - a^2)}]\right] + C.$$

Zur Bestimmung der Constante C dienet die Bemerkung, daſs für $x = a$: $z = o$ wird; daraus folgt $o = -\frac{ab}{2} l a + C$,

also $C = \frac{ab}{2} la$, so, daſs endlich

$$z = \frac{bx}{2a} \sqrt{(x^2 - a^2)} - \frac{ab}{2} l \left(\frac{x + \sqrt{[x^2 - a^2]}}{a}\right)$$

wird.

Fig. 60. *a*) Für den hyperbolischen Sector $A'CM''$(Fig. 60) erhält man, da aus $y = \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$, $dy = \frac{bx}{a\sqrt{(x^2 - a^2)}}$ folgt (§. 46., 3.):

$$d.A'CM'' = \tfrac{1}{2}(xdy - ydx) = \tfrac{1}{2}\left[\frac{bx^2}{a\sqrt{(x^2 - a^2)}} - \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 \, dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}};$$

es ist nämlich (vergl. das vorige Beisp.) bis auf das Zeichen, das Differential des hyperbolischen Sectors jenem des elliptischen gleich. Aus dieser Formel folgt [§. 116., (*c*]:

$$\text{Sect. } A'CM'' = \frac{ab}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \frac{ab}{2} l [x + \sqrt{(x^2 - a^2)}] + C.$$

b) Die Gleichung der Hyperbel auf ihre Asymptoten bezogen, ist [Bd. II., §. 124., (3]:

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

und da für rechtwinkel. Coordinaten der Asymptotenwinkel ein Rechter, oder die Hyperbel (Bd. II., §. 62., 7.) gleichseitig, d. i. $b = a$ seyn muſs; so ist für diesen Fall:

$$xy = \tfrac{1}{2} a^2, \text{ oder } y = \frac{a^2}{2x}.$$

Mit diesem Werthe erhält man für die Fläche:

$$z = \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{x} = \frac{a^2}{2} lx + C.$$

Da nun sowohl für $x = 0$ als auch für $x = \infty$, lx Unendlich wird; so sind beide asymptotische Räume $CADX$, Fig. 61. $CAEY$ (Fig. 61) ebenfalls Unendlich, und man kann hier die Fläche z nicht von den Asymptoten an zählen. Rechnet man daher die Fläche, welche von der Asymptote CX begrenzt wird, nicht von der Asymptote CY, sondern von der dem Scheitel A entsprechenden Ordinate AB an,

für welche also $CB = BA = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ ist; so erhält man aus der vorigen Formel die Fläche:

$$BAMP = \frac{a^2}{2}(lx - l.CB),$$

oder wenn man $CB = 1$ setzt, wodurch auch $\frac{a^2}{2} = 1$ wird:

$$\text{Fläche } BAMP = lx \text{ *)}.$$

Für die ungleichseitige Hyperbel, deren Asymptotenwinkel α heifsen mag, hat man schiefwinkelige Coordinaten vom Winkel α; dafür ist also das Differential der Fläche [vergl. die Anmerk. in §. 46. (S. 154)]:

$$dz = y\,dx\,.\,sin.\,\alpha, \text{ also } z = sin.\,\alpha \int y\,dx;$$

folglich ist, wegen $y = \frac{a^2 + b^2}{4x} = \frac{e^2}{x}$:

$$z = e^2\, sin.\,\alpha \int \frac{dx}{x} = e^2\, sin.\,\alpha\, lx + C.$$

Setzt man, wie vorhin, die Abscisse des Scheitels A (Fig. 62), nämlich $CB = e = 1$; so wird, wenn man die Fig. 62. Fläche von AB aus rechnet, für $x = 1$: $z = 0$, also wegen $l\,1 = 0$ auch $C = 0$, und sofort

$$\text{Fl. } AMPB = sin.\,\alpha\, lx \text{ **)}.$$

Setzt man $sin.\,\alpha\, lx = log.\,x$, so, dafs also (Bd. I., §. 130.) $sin.\,\alpha$ den Modul jenes Systems darstellt, dessen Logarithmen durch $Log.$ bezeichnet werden; so folgt auch:

$$\text{Fl. } BAMP = log.\,x,$$

wobei nun, je nach den verschiedenen Werthen des Mo-

*) Es stellen also die natürlichen Logarithmen die asymptotischen Räume der gleichseitigen Hyperbel dar; und diefs ist der Grund, warum man diese Logarithmen auch hyperbolische genannt hat (vergl. Bd. I., §. 129.).

**) Hier tritt der besondere Fall ein, dafs diese Formel nicht auch zugleich die asymptotischen Räume der entgegengesetzten Hyperbel enthält, weil für negative Werthe von x, lx imaginär wird. Die Ursache liegt in dem Umstande, dafs die Fläche oder Function $sin.\,\alpha\, lx$ für $x = 0$ discontinuirlich wird und durch Unendlich geht.

Abgesondert hingegen findet man die asymptotische Fläche dieser entgegengesetzten Hyperbel, gerade so wie die vorige.

duls *sin. α*, *Log.* den Logarithmus aus jedem Systeme bezeichnen kann. Für den Asymptotenwinkel $\alpha = 45^\circ, 44', 25''$ wird nahe $sin.\alpha = \cdot 434294$, also (Bd. I., §. 136.)

$$log.x = logbrig.x.$$

6) Für die Cycloide fanden wir [§. 71., Gl. (3], die Gleichung

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}},$$

Fig. 38. folglich ist die Fläche *AMP* (Fig. 38)

$$z = \int y\,dx = \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}},$$

welches Integral sofort nach §. 135., Form. (*b*, bestimmt und durch Kreisbögen ausgedrückt werden kann.

Man erhält indefs dasselbe Resultat auf eine einfachere Art, indem man das Segment *AMIH* (Fig. 38) bestimmt und von dem Rechtecke *AI* abzieht.

Sieht man nun *HD* als die Abscissenlinie an, so ist für irgend einen Punct der Curve *M*, die Ordinate $IM = 2a - y$, und wenn man diese durch y' bezeichnet, das Element der Fläche *AHDMA*: $dz' = y'dx$, oder wenn man auch für dx seinen Werth setzt:

$$dz' = \frac{(2a - y)\,y\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} = dy\sqrt{(2ay - y^2)},$$

folglich $z' = \int dy\sqrt{(2ay - y^2)}$.

Da nun aber dieses Integral [Beisp. 2)] die Fläche eines Kreissegmentes vom Halbmesser a und der Abscisse y ausdrückt, so ist auch $z' =$ Kreissegm. *CmG*, welches letztere gleichzeitig mit der Fläche z' oder *AHDA*, und zwar für $y = 0$ verschwindet, so, dafs man sofort hat:

$$\text{Fl. } AMIHA = \text{Kreissegm. } CmG.$$

Für den Punct *D*, für welchen $y = 2a$ wird, folgt daher Segm. $AHD =$ dem halben Erzeugungskreis $CmDC = \frac{a^2\pi}{2}$, so, dafs also endlich

$$\text{Fl.}\,ADC = AC\,.\,CD - \tfrac{1}{2}a^2\pi = a\pi\,.\,2a - \tfrac{1}{2}a^2\pi = \tfrac{3}{2}a^2\pi,$$

und sonach die ganze Fläche der Cycloide

$$ADBA = 3a^2\pi,$$

nämlich der dreifachen Fläche des Erzeugungskreises gleich wird.

7) Suchen wir noch die Fläche jener Curve, deren Gleichung $y = x^x$ ist; so erhalten wir

$$z = \int x^x dx,$$

und wenn man x^x in eine unendliche Reihe entwickelt (Bd. I., §. 127.) auch

$$z = \int dx \left(1 + x\,lx + \frac{x^2 l^2 x}{2} + \frac{x^3 l^3 x}{2 \cdot 3} + \ldots\right),$$

so, daſs sofort die Integration offenbar von dem bereits im §. 140., 1) entwickelten Integral $\int x^m dx\, l^n x$ abhängt. Setzt man also dort [Reihe (1] nach und nach $m = n = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man

$$z = x + (lx - \tfrac{1}{2})\frac{x^2}{2} + \left(l^2 x - \tfrac{2}{3} lx + \frac{2 \cdot 1}{3^2}\right)\frac{x^3}{2 \cdot 3}$$
$$+ \left(l^3 x - \tfrac{3}{4} l^2 x + \frac{3 \cdot 2}{4^2} lx - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{4^3}\right)\frac{x^4}{2.3.4} + \ldots + C.$$

Soll dieses Integral für $x = 0$ verschwinden und für $x = 1$ geschlossen seyn, so wird $C = 0$, und die gesuchte vollständige Fläche:

$$z = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.};$$

ein merkwürdiges, zuerst von *Joh. Bernoulli* gefundenes Resultat.

8) Um schlüſslich auch noch die in §. 68. [(6] für die Quadratur der Polarcurven, die in der Bestimmung des Segments MAm (Fig. 37) besteht, entwickelte Formel Fig. 37.

$$dz = \tfrac{1}{2} u^2 d\varphi$$

auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir die Spirallinien wählen, deren allgemeine Gleichung (§. 79.) $u = a\varphi^n$ ist.

Dafür hat man $dz = \frac{1}{2} a^2 \varphi^{2n} d\varphi$, also

$$z = \frac{a^2}{2}\int \varphi^{2n} d\varphi = \frac{a^2 \varphi^{2n+1}}{2(2n+1)} + C.$$

Ist n positiv und wird die Fläche von der unveränderlichen oder festen Geraden AB (Fig. 47) gezählt, so wird Fig. 47.

für $\varphi = 0$ auch $z = 0$, mithin auch die Constante $C = 0$, und man hat sofort für die Spirallinien:

$$z = \frac{a^2 \varphi^{2n+1}}{4n+2}.$$

Für die Archimedische Spirale ist (§. 78.) $n = 1$ und $a = \frac{1}{2\pi}$, also die Fläche $z = \frac{\varphi^3}{24\pi^2}$. Nach einer vollen Umdrehung des Leitstrahls oder für $\varphi = 2\pi$, wird die Fläche

$$z_1 = \frac{8\pi^3}{24\pi^2} = \frac{1^2 . \pi}{3};$$

nämlich gleich dem dritten Theil der Kreisfläche, dessen Halbmesser AN die Einheit ist.

Nach zwei Umdrehungen ist

$$\varphi = 4\pi \text{ und } z_2 = \frac{64\pi^3}{24\pi^2} = \frac{8\pi}{3};$$

folglich ist $z_2 - z_1 = \frac{7}{3}\pi$ die Zunahme der Fläche durch die zweite Umdrehung; demnach die Fläche, welche zwischen der ersten und zweiten Windung liegt:

$$\tfrac{7}{3}\pi - \tfrac{1}{3}\pi = 2\pi.$$

Ueberhaupt muſs man, um die Fläche zu bestimmen, welche durch die n^{te} Umdrehung hinzukommt, das obige Integral, welches für die Archimedische Spirale

$$= \frac{1}{8\pi^2} \int \varphi^2 \, d\varphi = \frac{\varphi^3}{24\pi^2}$$

ist, innerhalb der Grenzen $\varphi = (n-1)\, 2\pi$ und $\varphi = n . 2\pi$ nehmen; dieses bestimmte Integral wird aber (§. 157.):

$$\tfrac{1}{24}\left[8n^3 - 8(n-1)^3\right]\frac{\pi^3}{\pi^2} = \tfrac{1}{3}\left[n^3 - (n-1)^3\right]\pi.$$

Eben so erhält man den aus der $n + 1^{sten}$ Umdrehung erzeugten Zuwachs der Fläche, indem man in diesem letztern Ausdrucke statt n: $n + 1$ schreibt

$$= \tfrac{1}{3}\left[(n+1)^3 - n^3\right]\pi.$$

Diese Fläche um die vorige vermindert, gibt aber für die von der n^{ten} und $n + 1^{sten}$ Windung eingeschlossene Fläche:

$$\tfrac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 2n^3 + (n-1)^3\right]\pi = 2n\pi.$$

Für $n = 1$ erhält man, wie zuvor, die zwischen der ersten und zweiten Windung liegende Fläche $= 2\pi$. Man sieht hieraus, dafs die vorhergehende Fläche n Mal so grofs, als diese letztere ist; was auch schon *Archimedes* gefunden hatte.

Anmerk. Weil die Quadratur der ebenen Curven bei rechtwinkeligen Coordinaten auf der Integration der Differentialformel $y\,dx$ oder, da y eine Function von x ist, jener $X\,dx$ beruht; so hat man auch umgekehrt alle Aufgaben, welche zuletzt von der Integration von Differentialformeln mit einer Unbekannten, d. i. von der Bestimmung der Integrale von der Form $\int X\,dx$ abhängen, Quadraturen genannt; und es wird noch jetzt eine solche Aufgabe als gelöst angesehen, sobald diese auf eine oder mehrere Quadraturen zurückgeführt worden.

Complanation und *Cubatur* der durch Umdrehung erzeugten Flächen und Körper.

§. 178.

Bei der Quadratur oder Complanation, d. i. bei Berechnung der krummen Oberflächen, dann Cubirung oder Bestimmung des Inhalts der von solchen Flächen begrenzten Körper, wollen wir jenen Fall, in welchem Oberfläche und Körper durch die Umdrehung einer Curve um eine Axe entstehen, als den einfachern, zuerst behandeln.

Es sey daher AS (Fig. 63) die Curve, durch deren Fig. 63.
Umdrehung um die Abscissenaxe AX die zu bestimmende krumme Oberfläche erzeugt wird. Man ziehe zu den beliebigen Abscissen $AP = x$ und $AP' = x + h$ rechtwinkelig die Ordinaten PM, $P'M'$ und die Sehne MM'; bezeichne die der Abscisse $AP = x$ entsprechende (durch AM erzeugte) krumme Oberfläche mit $w = f(x)$ [wo $f(x)$ die zu bestimmende Function ist], also die der Abscisse $AP' = x + h$ correspondirende Fläche durch $w' = f(x + h)$ und daher die von dem Bogen MM' erzeugte Zone, durch $v = w' - w = f(x + h) - f(x)$; so folgt nach der *Taylor'*-

schen Reihe auch:

$$v = \frac{dw}{dx} h + \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots$$

Wird ferner die durch Umdrehung der Sehne MM' um die nämliche Axe AX entstehende Oberfläche des abgestutzten Kegels durch v' bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$v' = \pi (MP + M'P') MM',$$

oder wegen $M'P' = y' = y + \frac{dy}{dx} h + \ldots$ [wenn $y = \varphi(x)$ die Gleich. der Curve AS ist] und $MM' = \sqrt{[h^2 + (y'-y)^2]} = h\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ph + \ldots)}$ (wenn man nämlich für y' substituirt) auch:

$$v' = \pi \left(2y + \frac{dy}{dx} h + ph^2 + \ldots\right) h \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ph + \ldots\right)}.$$

Es ist daher, wenn man gleich durch h abkürzt:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\pi \left(2y + \frac{dy}{dx} h + \ldots\right) \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ph + \ldots\right)}}{\frac{dw}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{h}{2} + \ldots}$$

und da sich das Verhältniſs $\frac{v'}{v}$ der Einheit um so mehr nähert, je kleiner h wird, und endlich für $h = 0$ vollkommen $\frac{v'}{v} = 1$ ist, auch, wenn man gleich mit $\frac{dw}{dx}$ multiplicirt:

$$\frac{dw}{dx} = 2\pi y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)};$$

folglich ist das Differential der Oberfläche:

$$dw = 2\pi y \, dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

und endlich die krumme Oberfläche selbst:

$$w = 2\pi \int y \, dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = 2\pi \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \ldots (1.$$

§. 179.

Bezeichnet man ferner den Körper, welcher durch Umdrehung des Segments APM um die Axe AX erzeugt

(also von der vorigen krummen Fläche umschlossen) wird, durch u; jenen, der dem Segment $AP'M'$ entspricht, durch u', und endlich jenen, welcher bei dieser Umdrehung von dem Segmente PM' erzeugt wird, durch v; so ist, wenn man $u = f(x)$ setzt, wo f die zu bestimmende Function ist, auch $u' = f(x+h)$ und

$$v = u' - u = f(x+h) - f(x) = \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Das Trapez PM' beschreibt bei dieser Umdrehung einen abgestutzten Kegel:

$$v' = \tfrac{1}{3}\pi PP'(MP^2 + M'P'^2 + MP.M'P'),$$

oder, wenn man substituirt:

$$v' = \tfrac{1}{3}h\pi(y^2 + y'^2 + yy')$$
$$= \tfrac{1}{3}h\pi(3y^2 + 3y\frac{dy}{dx}h + mh^2 + \ldots).$$

Es ist also, wenn man sogleich wieder durch h abkürzt:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\tfrac{1}{3}\pi(3y^2 + 3y\frac{dy}{dx}h + mh^2 + \ldots)}{\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h}{2} + \gamma h^2 + \ldots}$$

und da wieder für $h = 0$ das Verhältniſs $\frac{v'}{v} = 1$ wird:

$$\frac{du}{dx} = \pi y^2,$$

also das Differential des Körpers: $du = \pi y^2 dx$,

und das Volumen des erzeugten Körpers:

$$u = \pi \int y^2 dx \ldots (2\text{ *}).$$

*) Nach *Leibnitzens*, oder der Methode des unendlich Kleinen, werden diese beiden Formeln (1 und (2 wieder äuſserst einfach, und zwar auf folgende Art gefunden:

Nimmt man in der obigen Figur (63) die Zunahme PP' unendlich klein oder $= dx$ an, so fällt der Bogen MM' mit seiner Sehne zusammen (d. i. der Unterschied ist ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung) und ist $= ds$. Durch die Umdrehung dieses kleinen Bogens ds um AX, wird demnach die krumme Oberfläche eines abgestutzten Kegels erzeugt, die durch dw bezeichnet werden muſs, wenn man die durch Umdrehung des Bogens AM erzeugte Oberfläche $= w$ setzt; weil, wenn x in $x + dx$ übergeht, auch w um dw zunimmt. Es folgt also Fig. 63.

$$dw = \pi(y + y + dy)\,ds = 2\pi y\sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

Anmerk. Findet die Rotation um die Ordinatenaxe Statt, so darf man in diesen beiden Formeln (1 und (2 nur x und y mit einander verwechseln und die Gleichung der Curve ungeändert lassen (oder auch umgekehrt).

§. 180.

Beispiele.

1) Es sey die gegebene Curve AS die gemeine Parabel; so ist ihre Gleichung $y^2 = px$, also (a) nach der Formel (1 (§. 178.), wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2\sqrt{(px)}}$, die krumme Oberfläche des Paraboloids oder parabolischen Conoids, nach einer ganz einfachen Reduction:

$$w = \pi \int dx \sqrt{(p^2 + 4px)},$$

oder, wenn man (nach §. 107., 7) integrirt:

$$w = \frac{\pi}{6p}(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Wird die Oberfläche vom Scheitel aus gezählt, so wird für $x = 0$ auch $w = 0$, folglich

$0 = \frac{1}{6}p^2\pi + C$, und daher die Constante $C = -\frac{1}{6}p^2\pi$; also endlich die Oberfläche des parabol. Conoids, dessen Höhe $x = h$ ist:

$$w = \frac{1}{6}\frac{\pi}{p}[(p^2 + 4ph)^{\frac{3}{2}} - p^3].$$

(b) Für das Volumen dieses Conoids hat man nach Form. (2 (§. 179.)

$$u = \pi p \int x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi p x^2 = \pi y^2 . \frac{x}{2},$$

wozu keine Constante hinzuzufügen ist, indem für $x = 0$ auch $u = 0$ wird.

wenn man nämlich auch für das Element des Bogens ds den bekannten Werth setzt; und dieſs ist sofort die Formel (1.

Es entsteht ferner durch Umdrehung der Fläche APM der Körper u, also durch jene des unendlich schmalen Trapezes PM', welches hier (§. 46., Anm.) als ein Rechteck behandelt werden darf, das Element desselben du, und da dieses Rechteck offenbar einen Cylinder beschreibt, dessen kreisförmige Basis den Halbmesser y besitzt und dessen Höhe $= dx$ ist; so folgt $du = \pi y^2 dx$, als die Formel (2.

Läſst man x bis h zunehmen und setzt die zugehörige Ordinate $y = \sqrt{(ph)} = r$, so bildet h die Höhe und r den Halbmesser der kreisförmigen Basis des parabolischen Conoids, und man hat sofort aus dem vorigen Ausdruck für den Inhalt desselben:

$$u = r^2 \pi . \frac{h}{2};$$

dieser ist also gleich dem Producte aus der Grundfläche in die halbe Höhe des Conoids.

2) Sey die Umdrehungscurve AS eine Ellipse, deren Gleichung also, wenn α) die Umdrehung um ihre groſse Axe Statt hat, $y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ist.

(α) Wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ und $a^2 - b^2 = c^2$, ist also die Oberfläche dieses Ellipsoides oder elliptischen Sphäroides [(1, §. 178.]:

$$w = \frac{2b}{a^2} \pi \int dx \sqrt{(a^4 - c^2 x^2)} \ldots (m,$$

oder, wenn man die Integration (§. 131., Beisp. 2.) ausführt:

$$w = \frac{2b\pi}{a^2} \left[\frac{x}{2} \sqrt{(a^4 - c^2 x^2)} + \frac{a^4}{2c} arc. sin. \left(\frac{cx}{a^2} \right) \right] + C.$$

Nimmt man dieses unbestimmte Integral, um sofort die ganze elliptische Oberfläche zu erhalten, von $x = -a$ bis $x = +a$ [§. 157., (5]; so erhält man, wenn diese Oberfläche durch O bezeichnet wird:

$$O = 2b\pi \left[b + \frac{a^2}{c} arc. sin. \left(\frac{c}{a} \right) \right].$$

Für den Kreis wird $b = a$ und $c = 0$, folglich das obige Integral:

$$w = \frac{2b\pi}{a^2} \int a^2 dx = 2a\pi x;$$

dieses Integral von $x = -a$ bis $x = +a$ genommen, gibt sofort die Kugeloberfläche $= 4a^2\pi$.

Dieses Resultat erhält man auch aus dem vorigen Werthe von O, wenn man den Werth des letzten Gliedes, welches für $c = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, aber $= a$ ist, nach §. 31. bestimmt.

Geschieht β) die Umdrehung um die kleine Axe der Ellipse, so erhält man die Oberfläche w' des in diesem Falle erzeugten Ellipsoids am einfachsten, indem man in der obigen Formel (m, a und b mit einander verwechselt; dadurch entsteht:

$$w' = \frac{2a\pi}{b^2}\int dx\sqrt{[b^4+(a^2-b^2)x^2]} = \frac{2a\pi}{b^2}\int dx\sqrt{(b^4+c^2x^2)};$$

folglich wenn man integrirt (§. 131., Beisp. 1):

$$w' = \frac{2a\pi}{b^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{(b^4+c^2x^2)}+\frac{b^4}{2c}l[cx+\sqrt{(b^4+c^2x^2)}]\right]+C.$$

Soll die Zone berechnet werden, welche durch die Umdrehung eines Bogens erzeugt wird, dessen Endpuncten die Abscissen $x=\alpha$ und $x=\beta$ zukommen; so wird man dieses Integral innerhalb der Grenzen $x=\alpha$ und $x=\beta$ nehmen.

Für die ganze Oberfläche ist $\alpha=+b$ und $\beta=-b$, also, wenn diese durch O' bezeichnet wird:

$$O' = 2a\pi\left[a+\frac{b^2}{2c}l\left(\frac{a+c}{a-c}\right)\right].$$

Auch hieraus erhält man wieder für $b=a$ oder $c=0$, wofür das letzte Glied die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, aber nach §. 31. bestimmt, $=\frac{2b^2}{2a}=a$ wird, für die Kugeloberfläche den bekannten Werth $4a^2\pi$.

(b) Nach der Formel (2 (§. 179.) hat man ferner für den körperlichen Inhalt des erstern durch Umdrehung um die grofse Axe erzeugten Ellipsoids:

$$u = \pi\int\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx = \frac{b^2\pi}{a^2}(a^2x-\tfrac{1}{3}x^3)+C.$$

Für den Inhalt der Zone, deren Oberfläche durch einen Bogen erzeugt wird, dessen Endpuncten die Abscissen α und β entsprechen, mufs dieses Integral von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ genommen werden.

Für den Inhalt des ganzen ellipt. Sphäroids ist daher dieses Integral innerhalb der Grenzen von $x=-a$ bis $x=+a$ zu nehmen (oder man bestimmt die Constante C, welche Null wird, wenn man für $x=0$ auch $u=0$ seyn

läfst und integrirt dann fort bis $x = a$, wodurch man das halbe Sphäroid erhält); dadurch wird, wenn man dieses Ellipsoid durch K bezeichnet:

$$K = \frac{b^2 \pi}{a^2} (\tfrac{2}{3} a^3 + \tfrac{2}{3} a^3) = \tfrac{4}{3} a b^2 \pi.$$

Für die Kugel wird, wegen $b = a$: $K = \frac{4}{3} a^3 \pi$; wie es seyn soll.

Eben so erhält man für das zweite, durch Umdrehung um die kleine Axe erzeugte Ellipsoid, indem man nur wieder in der obigen Formel von u, a mit b verwechseln darf:

$$u' = \frac{a^2 \pi}{b^2} \int (b^2 - x^2)\, dx = \frac{a^2 \pi}{b^2} (b^2 x - \tfrac{1}{3} x^3);$$

und wenn man zur Bestimmung des ganzen Ellipsoids dieses unbestimmte Integral von $x = -b$ bis $x = +b$ nimmt und diesen Körper durch K' bezeichnet:

$$K' = \frac{a^2 \pi}{b^2} (\tfrac{2}{3} b^3 + \tfrac{2}{3} b^3) = \tfrac{4}{3} a^2 b \pi.$$

Auch dieses Sphäroid geht für $b = a$, wie es seyn soll, in $K' = \frac{4}{3} a^3 \pi$, nämlich in die Kugel über.

Die Vergleichung dieser beiden, um die grofse und kleine Axe erzeugten Ellipsoide K und K' führt zu dem interessanten und einfachen Ergebnifs:

$$K : K' = b : a,$$

so, dafs das letztere (welche Form man gewöhnlich dem Erdsphäroid beilegt) im Verhältnifs der kleinen zur grofsen Axe gröfser, als das erstere ist.

Anmerk. Zur Uebung kann man auch in diesem zweiten Beispiele die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$ zum Grunde legen. Auch wird, wenn man die Curve AS in eine Gerade übergehen läfst, welche einmal die Umdrehungsaxe schneidet und dann auch mit ihr parallel ist, nach den beiden obigen Formeln (1 und (2 (§. 178. und 179.) sehr einfach, die krumme Oberfläche und der Inhalt des gewöhnlichen geraden Kegels und senkrechten Cylinders bestimmt. Wir deuten diefs blofs an, um nicht durch die Ausführung den fleifsigen Anfänger um das Vergnügen des Selbstfindens von schon bekannten und auf andern Wegen erlangten Ergebnissen zu bringen.

3) Es sey endlich noch die gegebene Curve die gemeine Cycloide, und ihre Axe DC (Fig. 38) die Rotationsaxe; so ist, wenn man den Scheitel D derselben zum Ursprung der rechtw. Coordinaten und die Axe DC zur Abscissenaxe nimmt, ihre Differentialgleichung (Anmerk. auf S. 215):

Fig. 38.

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{dx\,\sqrt{(2a - x)}}{\sqrt{x}}.$$

(a) Da hier $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2a}{x}$ wird, so hat man für die Oberfläche der erzeugten Rotationsfläche [(1, §. 178.]

$$w = 2\pi\sqrt{(2a)}\int y x^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Nun ist, wenn man theilweise integrirt [§. 124., (α)]

$$\int y x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2yx^{\frac{1}{2}} - 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dy = 2yx^{\frac{1}{2}} - 2\int dx\,\sqrt{(2a - x)},$$

wenn man nämlich für dy den Werth aus der obigen Differentialgleichung setzt; folglich, wenn man auch gleich die Constante der Integration der Natur der Sache gemäſs so bestimmt, daſs das Integral für $x = 0$ verschwindet:

$$\int y x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2yx^{\frac{1}{2}} + \tfrac{4}{3}(2a - x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{3}(2a)^{\frac{3}{2}}$$

und sonach endlich

$$w = 4\pi y\sqrt{(2ax)} + \tfrac{8}{3}\pi\sqrt{(2a)}\,(2a - x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{32}{3}a^2\pi.$$

Findet die Umdrehung der Curve um die Ordinatenaxe DH Statt, so erhält man ganz einfach (§. 179., Anm.) aus

$$w = 2\pi\int x\,dy\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}:\quad w = \tfrac{4}{3}\pi x\sqrt{(2ax)}.$$

(b) Für das Volumen des durch Rotation der Fläche MGD um die Axe DC erzeugten Körpers hat man nach Formel (2, §. 179.:

$$u = \pi\int y^2\,dx = \pi x y^2 - 2\pi\int xy\,dy,$$

oder mit Rücksicht auf die obige Differentialgleichung:

$$u = \pi x y^2 - 2\pi\int y\,dx\,\sqrt{(2ax - x^2)};$$

dabei ist das Integral so zu bestimmen, daſs es für $x = 0$ (in D) verschwindet.

Die Integration selbst biethet, wenn man für y den

Werth aus der Gleichung der Cycloide (S. 215, Anmerk.) setzt, theilweise integrirt und dabei die erste Formel und jene (h auf S. 347 berücksichtiget, keine weitere Schwierigkeit dar, kann aber jedenfalls als ein gutes, dem Anfänger zu empfehlendes Uebungsbeispiel angesehen werden. — Nimmt man nach vollendeter Integration das Integral von $x = 0$ (wofür die Constante $C = 0$ wird) bis $x = 2a$ (wofür $y = a\pi$ wird), d. h., läſst man die halbe Cycloide ADC um die Axe DC sich umdrehen; so bekommt man für das Volumen den Ausdruck:

$$u = \frac{8}{3} a^3 \pi \left(\frac{9}{16} \pi^2 - 1\right).$$

Nimmt man die Ordinatenaxe DH zur Rotationsaxe, so erhält man aus $u = \pi \int x^2 dy$:

$$u = \pi \int x dx \sqrt{(2ax - x^2)}$$

oder [wenn man theilweise integrirt und sich dabei der Formel (b, S. 346, bedient] endlich:

$$u = \frac{\pi}{6} (2x^2 - ax - 3a^2) \sqrt{(2ax - x^2)} + \frac{a^3 \pi}{2} arc. sin v. \left(\frac{x}{a}\right),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $u = 0$ seyn muſs.

Für die Umdrehung der halben Cycloide ADC um DH oder für $x = 2a$ hat man:

$$u = \frac{a^3 \pi^2}{2}.$$

Quadratur und *Cubatur* der krummen Oberflächen und Körper überhaupt.

§. 181.

Man beziehe die zu quadrirende oder complanirende krumme Fläche auf die rechtwinkel. Axen AX, AY, AZ (Fig. 55) oder coordinirten Ebenen xy, xz, yz; setze für einen beliebigen Punct M der Fläche, von welcher BCD einen Theil vorstellen soll, die rechtw. Coordinaten $AP = x$, $Pm = AQ = y$, $mM = z$, und führe durch P und Q mit den Ebenen yz und xz parallel die Ebenen $EPFE$ und $GQHG$; so wird durch diese vier genannten Ebenen auf der krum- Fig. 55.

men Fläche ein Viereck $DEMG$ begrenzt oder abgeschnitten, welches offenbar irgend eine Function von x und y ist. Bezeichnet man nämlich diesen Theil der krummen Oberfläche durch w, so ist $w = f(x, y)$ eine Function der beiden von einander unabhängigen Variablen x, y, wobei die Bestimmung dieser Function f eben der Zweck unserer gegenwärtigen Untersuchung ist. Dazu lasse man x um h und y um k zunehmen, d. h. man nehme $PP' = h$ und $QQ' = k$; ferner lege man wieder mit yz und xz parallel durch P' und Q' die Ebenen $E'P'F'E'$ und $G'Q'H'G'$; so folgt, wie aus der Figur leicht zu sehen ist, dafs wenn y constant bleibt und nur x um h zunimmt, w oder die Fläche $DEMG$ um das krummlinige (und krummfläche) Viereck $EMNE'$; wenn dagegen x unverändert bleibt und blofs y um k zunimmt, diese Fläche um das Viereck $GMN'G'$; und wenn endlich beide Aenderungen gleichzeitig Statt finden, also x in $x+h$ und y in $y+k$ übergehen, diese Fläche w nicht blofs um die beiden genannten, sondern noch überdiefs um das Viereck $MNM'N'$ zunimmt. Drückt man demnach nach §. 19. [Form. A)] die Totaländerung von $w = f(x, y)$, d. i. $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ aus; so geben jene Glieder, in welchen blofs x verändert wird und also blofs mit Potenzen von h verbunden sind, das erstere Viereck $EMNE'$; jene, in welchen blofs y verändert ist und sonach lediglich k enthalten, das Viereck $GMN'G'$; so wie endlich die Summe aller übrigen Glieder, welche h und k zugleich enthalten, dem Vierecke $MNM'N'$ angehören. Wird demnach die krumme Oberfläche dieses letztgenannten Vierecks durch w' bezeichnet, so ist (zufolge der angeführten Formel):

$$w' = \left(\frac{d^2 w}{dx\,dy}\right) hk + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3 w}{dx^2\,dy}\right) h^2 k + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3 w}{dx\,dy^2}\right) hk^2 + \ldots$$

Denkt man sich ferner an die krumme Fläche im Puncte M eine berührende Ebene gelegt, so wird auf dieser letztern durch die (gehörig verlängerten) genannten vier Ebenen EFP, $E'F'P'$, GHQ und $G'H'Q'$ ein Parallelogramm abgeschnitten, dessen ebene Fläche wir durch v' bezeich-

nen wollen, und dessen Projection auf die coordinirte Ebene der xy sofort das Rechteck $m n m' n'$ vom Flächeninhalt $= h k$ ist. Bezeichnet man nun noch den Neigungswinkel dieser erwähnten Berührungsebene mit der coord. Ebene der xy durch α, so ist (Bd. II., §. 159., Note)

$$v' \cos. \alpha = hk \text{ oder } v' = \frac{hk}{\cos. \alpha},$$

also das Verhältnifs von w' zu v', wenn man für w' den vorigen Werth setzt und dann gleich durch hk abkürzt:

$$\frac{w'}{v'} = \cos. \alpha \left[\left(\frac{d^2 w}{dx\, dy} \right) + \tfrac{1}{2} \left(\frac{d^3 w}{dx^2\, dy} \right) h + \tfrac{1}{2} \left(\frac{d^3 w}{dx\, dy^2} \right) k + .. \right]$$

wobei bekanntlich alle nachfolgenden Glieder der Reihe mit h und k verbunden sind.

Da nun wieder für $h = k = 0$ das Verhältnifs $\frac{w'}{v'} = 1$ wird, so hat man, da von den eingeklammerten Gröfsen, aufser der ersten, alle übrigen mit h oder k (oder beiden) verbunden sind:

$$\left(\frac{d^2 w}{d x\, d y} \right) = \frac{1}{\cos. \alpha}.$$

Um aber noch den Neigungswinkel α zu finden, bemerke man, dafs dieser Winkel derselbe ist, welchen die Normale in M mit der Ordinate $Mm = z$ bildet; weil diese beiden Geraden beziehungsweise auf jenen beiden Ebenen, deren Neigung gesucht wird, perpendikulär stehen. Es ist also, wenn die Normale N heifst:

$$\cos. \alpha = \frac{z}{N},$$

oder wegen $N = z \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ [§. 88., (i)] $\cos. \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$

daher nach der vorigen Relation auch:

$$\left(\frac{d^2 w}{d x\, d y} \right) = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{d z}{d x} \right)^2 + \left(\frac{d z}{d y} \right)^2 \right]}$$

und endlich, wenn man diesen partiellen Differentialquotienten nach §. 165. integrirt, die gesuchte krumme Oberfläche:

$$w = \iint dx\, dy \sqrt{\left[1 + \left(\frac{d z}{d x} \right)^2 + \left(\frac{d z}{d y} \right)^2 \right]} \ldots (3,$$

wobei sich also (§. 165.) von beiden Integralzeichen das eine auf die Variable x, das andere auf jene y bezieht und hinsichtlich der beizufügenden willkürlichen Constanten, nach vollendeter Integration in Bezug auf x, eine willkürliche Function von y, und nach der Integration nach y eine Function von x zu nehmen ist.

§. 182.

Für die Bestimmung des **Volumens** des Körpers $APmQGDEM$, welches wir mit u bezeichnen wollen und offenbar wieder irgend eine Function von x und y ist, so, daſs man $u = f(x, y)$ setzen kann, wo wieder f die zu bestimmende Function ist, sollen genau die vorige Construction und Bezeichnung gelten. Es werden daher ebenfalls wieder in der Entwicklung von $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ (§. 19.) jene bloſs mit h verbundenen Glieder (in welchen also bloſs x als variabel erscheint) das Körpersegment $EFPP'E'F'$; jene Glieder, welche bloſs k enthalten (in welchen also nur y variabel ist) das Segment $GHQQ'G'H'$; so wie endlich die Summe aller übrigen, mit h und k zugleich verbundenen Glieder (in welchen nämlichen beide Variablen als geändert erscheinen), das durch die krumme Fläche MM' abgestutzte rechtwinkelige Parallelepipedum $mnm'n'N'MNM'$ ausdrücken, so, daſs also, wenn man den Inhalt dieses letztgenannten Körpers durch u' bezeichnet:

$$u' = \left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) hk + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3 u}{dx^2\, dy}\right) h^2 k + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3 u}{dx\, dy^2}\right) hk^2 + \ldots$$

ist.

Es ist ferner der Inhalt eines rechtw. Parallelepipedums, dessen Basis $mnm'n' = hk$ und Höhe $mM = z$ ist: $v' = hkz$; folglich auch, wenn man gleich wieder durch hk abkürzt:

$$\frac{u'}{v'} = \frac{1}{z}\left[\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3 u}{dx^2\, dy}\right) h + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3 u}{dx\, dy^2}\right) k + \ldots\right].$$

Da nun dieses Verhältniſs $\frac{u'}{v'}$ für $h = k = o$ wieder in die Einheit übergeht, so folgt dafür:

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) = z$$

und daraus durch doppelte Integration dieses partiellen Differentialquotienten (§. 165.) endlich das gesuchte Volumen:

$$u = \int\int dx\, dy \,.\, z \; . \; . \; . \; (4\ ^*);$$

dabei gilt in Beziehung auf die beizufügenden willkürlichen Constanten genau das im vorigen Paragraphe Bemerkte.

Anmerk. 1. Wegen $z = \int dz$ kann die vorige Formel (4 für das Volumen eines Körpers auch in der Form

$$u = \int\int\int dx\, dy\, dz = \int dx \int dy \int dz$$

dargestellt, d. i. durch ein dreifaches Integral ausgedrückt werden.

Anmerk. 2. In gewissen Fällen kann die nachstehende For-

*) Mit Hilfe des unendlich Kleinen werden diese beiden letztern Formeln (3 und (4 auf folgende Weise gewonnen:

Läfst man $AP = x$ und $AQ = y$ beziehungsweise blofs um $PP' = dx$ und $QQ' = dy$ zunehmen, so werden die Zonen $EFF'E'$ und $GHH'G'$ unendlich schmal und die beiden von den Ebenen EFP und $E'F'P'$, dann GHQ und $G'H'Q'$ begrenzten Schichten, unendlich dünn. Wird daher wie oben, die Oberfläche $DGME$ durch w bezeichnet, so ist die Fläche der Zone ME', als ein Differential von w, $= dw$, und die des Viereckes $MNM'N'$, als ein Differential dieser Zone, $= d \,.\, dw = d^2 w$. Da man ferner dieses Viereck, als ein Element der gesuchten krummen Fläche, als eben oder als mit der in M an diese Fläche gelegten Berührungsebene zusammenfallend, ansehen kann, dessen Projection auf die coordinirte Ebene der xy, das Rechteck $mnm'n' = dx\, dy$ bildet; so hat man (Bd. II., §. 159., Note) $dx\, dy = d^2 w \,.\, cos\, \alpha$ (wo α die obige Bedeutung hat) oder $d^2 w = \frac{dx\, dy}{cos.\, \alpha} = dx\, dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$; woraus sofort die Formel (3 fliefst.

Wird ferner der Inhalt des Körpers $APmQGMED = u$ gesetzt, so mufs offenbar die unendlich dünne Schichte En oder jene Gn' mit du, und der parallelepipedförmige Körper Mm', dessen Basis $= dx\, dy$ ist, durch $d^2 u$ bezeichnet werden. Da man nun diesen letztern Körper als ein senkrechtes Parallelepiped von der Grundfläche $dx\, dy$ und Höhe z ansehen kann (auf welches Resultat man auch wieder zurückgeführt wird, wenn man diesen Körper als ein durch die Fläche $MNM'N'$ schief abgeschnittenes Parallelepipedum ansieht): so ist

$$d^2 u = dx\, dy \,.\, z;$$

welcher Ausdruck aber die Formel (4 liefert.

mel auf Polarcoordinaten bezogen, die sich am leichtesten mit Hilfe des unendlich Kleinen ableiten läſst, in der Anwendung bequemer, als die obige (4 seyn.

Fig. 55. Man ziehe nämlich von irgend einem innerhalb des Körpers liegenden Punct A (Fig. 55) an einen beliebigen Punct M seiner Oberfläche die Gerade $AM = r$; bezeichne den Winkel dieser Geraden mit der Axe z (MAZ) durch v, jenen der Projection dieser Geraden auf die Ebene der xy mit der Axe der x (mAX) durch w, und denke sich aus A, als Mittelpunct mit dem Halbmesser r, die zwei auf einander senkrechten Kreisbogen MN und MN', die sich sofort in M rechtwinkelig schneiden und von denen der erstere auf die Ebene der xy perpendikulär ist, gezogen. Zieht man ferner aus demselben Mittelpunct A (also mit dem nämlichen Halbmesser r) zu einem zweiten, dem vorigen M unendlich nahe liegenden Punct M' der Oberfläche die zwei unter einander senkrechten Kreisbogen $M'N$, $M'N'$; so begrenzen die Ebenen dieser vier Kreise einen Theil des Körpers, welcher sofort die Gestalt einer Pyramide besitzt, deren Spitze im Puncte A liegt, deren Höhe $= r$ und Basis das Element $MNM'N'$ der krummen Oberfläche ist, das bei der gegenwärtigen Entwicklung als eben angesehen werden darf. Und zwar ist, wegen

$$MN = M'N' = r\,dv \text{ und } MN' = M'N = r\,sin.\,v\,dw,$$

die Fläche dieser Basis $= r^2\,sin.\,v\,dv\,dw$; folglich der Inhalt dieser Pyramide: $P = \frac{1}{3}r^3\,sin.\,v\,dv\,dw$.

Denkt man sich in den Radien AM, AM' gegen A zu zwei neue Puncte m, m', die den erstern M, M' unendlich nahe liegen, so, daſs $Am = Am' = r - dr$ ist, und aus A wieder die vier Kreisbogen mn, mn' und $m'n$, $m'n'$ wie vorhin gezogen; so wird auf die nämliche Art eine zweite Pyramide gebildet, deren Basis die Fläche $(r - dr)^2\,sin.v\,dv\,dw$ besitzt, deren Höhe $= (r - dr)$, also Inhalt

$$p = \tfrac{1}{3}(r - dr)^3\,sin.\,v\,dv\,dw \text{ ist.}$$

So wie nun bei rechtwinkeligen Coordinaten der unendlich kleine Würfel $dx\,dy\,dz$, so kann hier die Differenz $P - p$ dieser beiden Pyramiden als das Element des Körpers angesehen werden. Dieses ist also, wenn man substituirt

$$= \tfrac{1}{3}[r^3 - (r - dr)^3]\,sin.\,v\,dv\,dw,$$

oder wenn man entwickelt und der Regel gemäſs die Glieder mit dr^2 und dr^3 wegläſst, $= r^2\,sin.\,v\,dr\,dv\,dw$; woraus man sofort wieder das Volumen des Körpers durch eine dreifache Integration erhält.

Es ist nämlich

$$u = \int\int\int r^2 sin.v\, dr\, dv\, dw \ldots (5;$$

und diese Integrale sind für den Inhalt des ganzen Körpers von $w = 0$ bis $w = 360^\circ$, von $v = 0$ bis $v = 180^\circ$, und von $r = 0$ bis zu jenem Werthe von r, welcher den Grenzen des Körpers (wobei man r als Function von v und w nach der Natur der krummen Oberfläche darstellt) entspricht, zu nehmen.

§. 183.

Beispiele.

1) Um diese beiden Formeln (3 und (4 auf ein sehr einfaches Beispiel anzuwenden, und um zugleich zu zeigen, wie man sich bei der doppelten Integration der partiellen Differentialformeln innerhalb bestimmter Grenzen zu benehmen habe, wollen wir für die krumme Fläche die Sphäre oder Kugelfläche nehmen.

(*a*) Nimmt man den Mittelpunct der Kugel, deren Halbmesser $= r$ seyn soll, zum Ursprung der rechtw. Coordinaten, so ist [Bd. II., §. 181., (2] die Gleichung dieser Fläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ldots (m,$$

folglich, wenn man partiell differentiirt:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = -\frac{x}{z} \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = q = -\frac{y}{z},$$

so, daſs also $\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = \frac{1}{z}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{r}{z}$ und [Form. (3, §. 181.]

die Oberfläche $w = r\int\int\frac{dx\, dy}{z} = r\int\int\frac{dx\, dy}{\sqrt{(r^2 - y^2 - x^2)}}$

wird. Integrirt man nun zuerst nach x und setzt (da dabei y constant ist) $r^2 - y^2 = a^2$; so erhält man:

$$w = r\int dy \int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

wobei (§. 116.) $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = arc.sin.\left(\frac{x}{a}\right)$ ist.

Um aber die beiden Grenzen zu finden, innerhalb welcher dieses letztere unbestimmte Integral genommen wer-

den mufs, um auf die ganze Kugelfläche schliefsen zu können, bemerke man, dafs diese Integration nach x gleichsam damit zusammenhängt, durch Summirung der Elemente
Fig. 55. wie $MN'M'N$ in der Richtung von QH oder x, die unendlich schmale Zone $GG'H'H$ zu finden; diese erhält man aber, indem man das letztere Integral von $x = 0$ bis $x = QH$ nimmt. Nun ist, da im gegenwärtigen Beispiele die Curven BC, BD und CD Viertelskreise sind, QH als Ordinate des Kreises, die der Abscisse $AQ = y$ entspricht, $QH = \sqrt{(r^2 - y^2)} = a$; es mufs also das genannte Integral sofort von $x = 0$ bis $x = a$ genommen werden. Diefs gibt aber (§. 157.):

$$arc.sin.\frac{a}{a} - arc.sin.\,0 = arc.sin.\,1 = \frac{\pi}{2},$$

so, dafs also, wenn man gleich die zweite Integration nach y ausführt:

$$w = r\int\frac{\pi}{2}dy = \frac{r\pi}{2}y$$

wird.

Da ferner diese letztere Integration wieder damit zusammenhängt, die Summe der (durch die erste Integration gefundenen) unendlich schmalen Streifen $GG'H'H$ nach der Richtung der y zu finden, um dadurch die sämmtliche von dem Trieder begrenzte Fläche, d. i. den achten Theil der Kugelfläche zu erhalten; so mufs dieses Integral offenbar von $y = 0$ bis $y = AC = r$ genommen werden. Da nun $\int_0^r \frac{\pi}{2} dy = \frac{\pi}{2} r - 0 = \frac{r\pi}{2}$ ist; so hat man für diesen achten Theil der Kugelfläche: $\frac{r^2\pi}{2}$, also endlich für die Kugelfläche selbst den bekannten Ausdruck $4r^2\pi$.

(b) Zur Bestimmung des Volumens der Kugel hat man nach der Formel (4 (§. 182.), wenn man für z den aus der obigen Gleichung (m folgenden Werth substituirt:

$$u = \int\int dx\,dy\sqrt{(r^2 - y^2 - x^2)}.$$

Integrirt man zuerst nach x und setzt wieder $r^2 - y^2 = a^2$, so erhält man:

$$u = \int dy\int dx\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Da nun das unbestimmte Integral

$$\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{a^2}{2}\,arc.\,sin.\,\frac{x}{a}\;.\;.\;.\;(n$$

[§. 131., 2)] ist, und da dieses, wie ganz ähnliche Betrachtungen, wie die unmittelbar vorhergehenden zeigen, von $x = 0$ bis $x = a$ genommen werden muſs, wodurch dasselbe (§. 157.) den Werth

$$\frac{a^2}{2}(arc.\,sin.\,1 - arc.\,sin.\,0) = \frac{a^2\pi}{4}$$

erhält; so ist auch

$$u = \int\frac{u^2\pi}{4}dy = \frac{\pi}{4}\int dy(r^2-y^2)$$

und wenn man diese zweite oder Integration nach y ausführt:

$$u = \frac{\pi}{4}(r^2y - \tfrac{1}{3}y^3),$$

und wenn man endlich dieses Integral von $y=0$ bis $y=r$ [wie vorhin in (a)] nimmt, wodurch man den achten Theil der Kugel erhält: $u = \frac{2}{3}r^3\frac{\pi}{4}$, so daſs also für die ganze Kugel, wie es seyn soll, $\frac{4}{3}r^3\pi$ erhalten wird.

Anmerk. Wendet man zur Berechnung der Kugel die im vorigen Paragr. (in der Anmerk. 2.) entwickelte Formel (5 an, und nimmt den Mittelpunct der Kugel für jenen Punct A, von welchem aus die Abstände r gezählt werden; so erhält man hier (weil nämlich diese Abstände bis an die Oberfläche alle gleich sind und sofort der vollständige Ausdruck von r nicht von v und w abhängt) äuſserst einfach und bequem:

$$u = \int\int r^2 dr\, sin.\,v\, dv\int dw,$$

oder wegen $\int_0^{2\pi} dw = 2\pi$, auch $u = 2\pi\int r^2 dr\int sin.\,v\;dv$.

Ferner ist

$$\int_0^{\pi} sin.\,v\;dv = 2,\text{ also } u = 4\pi\int r^2 dr;$$

und wegen $\int_0^r r^2 dr = \frac{1}{3}r^3$, endlich der Inhalt der ganzen Kugel $u = \frac{4}{3}r^3\pi$.

2) Nehmen wir als zweites Beispiel den geraden Kegel von kreisförmiger Basis und bezeichnen seine Höhe durch h,

den Halbmesser der Grundfläche mit r; so ist, wenn dessen Axe mit der coordinirten Axe der z, und der Mittelpunct der Basis mit dem Ursprung zusammenfällt, die Gleichung der Kegelfläche (Bd. II., S. 410):

$$h^2(x^2+y^2)=r^2(h-z)^2 \text{ oder } z=\frac{h}{r}[r-\sqrt{(x^2+y^2)}]\,..(1.$$

(a) Man hat also zur Bestimmung der krummen Oberfläche:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=p=\frac{-hx}{r\sqrt{(x^2+y^2)}} \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right)=q=\frac{-hy}{r\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

folglich

$$\sqrt{(1+p^2+q^2)}=\sqrt{\left[1+\frac{h^2}{r^2}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)\right]}=\frac{1}{r}\sqrt{(h^2+r^2)}$$

und nach der Form. (3 (§. 181.):

$$w=\frac{1}{r}\sqrt{(h^2+r^2)}\int dx\int dy=\frac{1}{r}\sqrt{(h^2+r^2)}\int dx\, y,$$

oder wenn man dieses Integral [wie im vorigen Beispiel, da aus der Gleichung des Kreises $y=\sqrt{(r^2-x^2)}$ folgt] von $y=0$ bis $y=\sqrt{(r^2-x^2)}$ nimmt:

$$w=\frac{1}{r}\sqrt{(h^2+r^2)}\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}.$$

Nun ist aber [§. 131., Beisp. 2)]:

$$\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}=\frac{x}{2}\sqrt{(r^2-x^2)}+\frac{r^2}{2}arc.sin.\left(\frac{x}{r}\right),$$

demnach

$$w=\frac{1}{2r}\sqrt{(h^2+r^2)}\left[x\sqrt{(r^2-x^2)}+r^2 arc.\,sin.\left(\frac{x}{r}\right)\right]..(2,$$

wozu, wenn man auch dieses Integral bei $x=0$ anfangen läſst, keine Constante beizufügen kommt, da für diesen Werth von x auch $w=0$ seyn muſs. Und diese Formel gibt sofort jenen Theil der vordern Mantelfläche, welche von zwei parallelen Ebenen, deren eine durch die Axe des Kegels geht und die andere um die Gröſse x von ihr absteht (beide stehen auf der Axe der x perpendikulär) abgeschnitten oder begrenzt wird.

Wird das letzte Integral bis $x=r$ ausgedehnt, so erhält man offenbar den vierten Theil der ganzen Mantel-

fläche oder [aus (2], wenn man noch die Seite oder Kante des Kegels $\sqrt{(h^2+r^2)}=l$ setzt:

$$\frac{O}{4}=\frac{l}{2r}.r^2\frac{\pi}{2},\ \text{also}\ O=lr\pi.$$

(*b*) Für das Volumen hat man nach der Formel [(4, §. 182.] $u=\int\int dx\,dy\,z$, wenn man für z den obigen Werth aus (1 substituirt:

$$u=\frac{h}{r}\int dx\int dy[r-\sqrt{(x^2+y^2)}].$$

Nun ist aber [§. 131., Beisp. 1)]:

$$\int dy[r-\sqrt{(x^2+y^2)}]=$$
$$ry-\tfrac{1}{2}y\sqrt{(x^2+y^2)}-\frac{x^2}{2}l[y+\sqrt{(x^2+y^2)}],$$

und dieses Integral erhält, wenn man es wieder von $y=0$ bis $y=\sqrt{(r^2-x^2)}$ nimmt, den Werth:

$$\frac{r}{2}\sqrt{(r^2-x^2)}-\frac{x^2}{2}l\left(\frac{r+\sqrt{[r^2-x^2]}}{x}\right),$$

so dafs man hat

$$u=\frac{h}{2r}\int dx\left[r\sqrt{(r^2-x^2)}-x^2l\left(\frac{r+\sqrt{[r^2-x^2]}}{x}\right)\right].$$

Da ferner (wie oben)

$$\int r\,dx\sqrt{(r^2-x^2)}=\frac{r}{2}\left[x\sqrt{(r^2-x^2)}+r^2\,arc.\,sin.\left(\frac{x}{r}\right)\right]$$

und [§. 124., Form. (*a*]

$$\int dx.\,x^2l\left(\frac{r+\sqrt{[r^2-x^2]}}{x}\right)=\frac{x^3}{3}l\left(\frac{r+\sqrt{[r^2-x^2]}}{x}\right)+\frac{r}{3}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$$

wobei noch [§. 128., Form. (*B*, und §. 116., (*d*]

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}=-\frac{x}{2}\sqrt{(r^2-x^2)}+\frac{r^2}{2}arc.\,sin.\left(\frac{x}{r}\right)$$

ist; so folgt endlich, wenn man substituirt und reducirt:

$$u=\frac{hx}{3}\sqrt{(r^2-x^2)}+\frac{hr^2}{6}arc.\,sin.\left(\frac{x}{r}\right)-\frac{hx^3}{6r}l\left(\frac{r+\sqrt{[r^2-x^2]}}{x}\right)$$

welchem Integral keine Constante beizufügen ist, wenn man dasselbe von $x=0$ anfangen läfst.

Diese Formel drückt demnach das Volumen jenes Theils des Kegels aus, welcher von zwei um die Gröfse x von

einander abstehenden parallelen Ebenen, davon die eine durch die Axe des Kegels geht, und einer durch dieselbe Axe auf der vorigen perpendikulären Ebene abgeschnitten wird *). Für $x = r$ erhält man daraus den vierten Theil des Kegels, nämlich:

$$\frac{K}{4} = \frac{h r^2}{6} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ also } K = \tfrac{1}{3} h r^2 \pi.$$

Anmerk. Es verdient bemerkt zu werden, daſs man im ersten Beispiel sogleich die ganze, über der coord. Ebene der xy liegende Halbkugel erhält, wenn man das erste Integral (n von
Fig. 55. $x = -a$ bis $x = +a$, d. i. von $x = Qh$ bis $x = QH$, und das letztere (nach y) von $y = -r$ bis $y = +r$ nimmt; indem dadurch zuerst die ganze unendlich schmale Zone $hGHH'G'h'$ gefunden wird, welche dann in der Richtung der Axe der y von $y = -r$ bis $y = +r$ integrirt, diese genannte obere Halbkugel liefert. Es ist in der That (§. 157.)

$$\int_{-a}^{+a} dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = \tfrac{1}{2} a^2 \left(\widetilde{arc. sin.} \frac{a}{a} - arc. sin. \frac{-a}{a}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} a^2 (arc. sin. 1 + arc. sin. 1) = \frac{a^2 \pi}{2}$$

und ferner

$$\int_{-r}^{+r} \frac{a^2 \pi}{2} dy = \frac{\pi}{2} \int_{-r}^{+r} dy (r^2 - y^2) = \frac{\pi}{2} (\tfrac{2}{3} r^3 + \tfrac{2}{3} r^3) = \tfrac{2}{3} r^3 \pi$$

gleich dem Inhalt der Halbkugel.

Dieselbe Bemerkung gilt offenbar auch für die Bestimmung der Oberfläche.

Anmerkung

[zur Seite 433, Gleichung q)].

1) Das auf Seite 433 zur Rectification der Ellipse aufgestellte Integral (q), $\frac{s}{a} = \int d\varphi \sqrt{(1 - e^2 sin.^2 \varphi)}$ läſst sich durch eine unendliche Reihe auf folgende Art bestimmen:

*) Der berühmte *Kepler* (geb. in Würtemberg im J. 1571; gest. zu Regensburg 1630) bemühte sich in seiner im J. 1615 erschienenen »*stereometria doliorum*« (in welchem Werke er zuerst die unendlich kleinen Gröſsen gebrauchte) vergebens, den Inhalt eines solchen Kegelabschnitts zu finden; denn zu seiner Zeit war die Analysis des Unendlichen noch nicht erfunden und die höhere Geometrie noch sehr unvollkommen.

Es ist nach der binomischen Formel, $e^2 \sin.^2 \varphi = b^2$ gesetzt:

$$\sqrt{(1 - b^2)} = 1 - \tfrac{1}{2} b^2 - \frac{1.1}{2.4} b^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} b^6 - \text{etc.}$$

also wenn man für b^2 den Werth wieder herstellt:

$$\frac{s}{a} = \int d\varphi - \tfrac{1}{2} e^2 \int \sin.^2 \varphi\, d\varphi - \frac{1.1}{2.4} e^4 \int \sin.^4 \varphi\, d\varphi$$

$$- \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \int \sin.^6 \varphi\, d\varphi - \text{etc.},$$

so, dafs die sämmtlichen Integrale in jenem $\int \sin.^{2n} \varphi\, d\varphi$ begriffen sind. Für dieses letztere hat man aber [§. 148., Form. (7] die Reductionsformel:

$$\int \sin.^{2n} \varphi\, d\varphi = - \frac{\sin.^{2n-1} \varphi \cos. \varphi}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \int \sin.^{2n-2} \varphi\, d\varphi$$

aus welcher man sofort, wenn man nach und nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt und die gefundenen Werthe immer in die folgenden substituirt, der Reihe nach die in s vorkommenden Integrale, und damit endlich für s die unendliche Reihe erhält:

$$\alpha) \quad \frac{s}{a} = \varphi - \tfrac{1}{2} e^2 (\tfrac{1}{2} \varphi - \tfrac{1}{2} \sin. \varphi \cos. \varphi)$$

$$- \frac{1.1}{2.4} e^4 \left(\frac{1.3}{2.4} \varphi - \tfrac{3}{8} \sin. \varphi \cos \varphi - \tfrac{1}{4} \sin.^3 \varphi \cos. \varphi \right)$$

$$- \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \varphi - \frac{3.5}{2.4.6} \sin. \varphi \cos. \varphi \right.$$

$$\left. - \frac{5}{4.6} \sin.^3 \varphi \cos. \varphi - \tfrac{1}{6} \sin.^5 \varphi \cos. \varphi \right)$$

$$- \text{etc.}$$

Auch kann man statt der **Potenzen** des Sinus und Cosinus, die Sinus der **vielfachen** Bogen in diesen Ausdruck von s bringen, wenn man berücksichtiget, dafs aus den Formeln für die Sinus der **geraden** Vielfachen (Trigonom. S. 40, oder trigonom. Formelsammlung, S. 15)

$\sin. \varphi \cos \varphi = \tfrac{1}{2} \sin. 2\varphi$, $\sin.^3 \varphi \cos. \varphi = \tfrac{1}{2} \sin. \varphi \cos. \varphi - \tfrac{1}{8} \sin. 4\varphi$,

$\sin.^5 \varphi \cos. \varphi = - \tfrac{3}{16} \sin \varphi \cos. \varphi + \sin.^3 \varphi \cos. \varphi + \tfrac{1}{32} \sin. 6\varphi$,

u. s. w. folgt, so, dafs wenn man diese Werthe in α) substituirt und gehörig reducirt, die Formel entsteht:

$$\beta) \quad \frac{s}{a} = \varphi - \tfrac{1}{2} e^2 (\tfrac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2^2} \sin. 2\varphi)$$

$$- \frac{1.1}{2.4} e^4 \left(\frac{1.3}{2.4} \varphi - \frac{4}{2^4} \sin. 2\varphi + \frac{1}{2^4.2} \sin. 4\varphi \right)$$

$$- \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \varphi - \frac{15}{2^6} \sin. 2\varphi + \frac{6}{2^6.2} \sin. 4\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2^6.3} \sin. 6\varphi \right)$$

$$- \text{etc.}$$

Man gelangt auch unmittelbar zu dieser Formel β), wenn man oben in der Reihe von $\sqrt{(1 - e^2 \sin.^2 \varphi)}$, noch vor der Integration, die Potenzen $\sin.^2 \varphi$, $\sin.^4 \varphi$, $\sin.^6 \varphi$, . . . nach den bekannten Formeln [Trigonom. S. 49, (d, Formelsamml. S. 19] durch $\cos. 2\varphi$, $\cos. 4\varphi$, . . . ausdrückt, und die einfache Integration der einzelnen Glieder (welche sofort die Form $A \cos. 2n\varphi\, d\varphi$ erhalten) nach §. 143., 1), ausführt.

Für den elliptischen Quadranten wird $\varphi = 90^\circ$, folglich, da in α) $\cos. \varphi = 0$ und in β) ebenfalls

$$\sin. 2\varphi = \sin. 4\varphi = \sin. 6\varphi = \ldots = 0$$

wird, aus beiden Formeln

$$\frac{u}{4} = \frac{a\pi}{2}\left[1 - 1\left(\tfrac{1}{2}e\right)^2 - 3\left(\frac{1.1}{2.4}e^2\right)^2 - 5\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}e^3\right)^2 - \text{etc.}\right]$$

welches Ergebnifs auch genau mit jenem in §. 175., 6), übereinstimmt, wenn man berücksichtiget, dafs $e = \frac{c}{a}$ ist.

2) So wie die Integrale

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2},\ \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},\ \text{u. s. w.}$$

von der Länge der Kreisbogen, die einer bestimmten trigon. Function entsprechen, abhängen; so hängen jene, welche sich auf die Form (p oder q) (S. 431 u. 433), d. i. auf die Integrale

$$\int \frac{dx \sqrt{(\alpha - \beta x^2)}}{\sqrt{(\gamma - \delta x^2)}} \text{ oder } \int d\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin.^2 \varphi)} = \int \frac{P\, d\varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \sin.^2 \varphi)}}$$

u. s. w. bringen lassen, von der Länge der elliptischen Bögen ab, die bei gegebenen Halbaxen einer gewissen Abscisse x entsprechen.

So wie aber ein durch Kreisfunctionen ausgedrücktes Integral, als vollkommen bekannt, und für die Anwendung brauchbar angesehen wird, weil man hinreichend ausgedehnte Tabellen besitzt, aus denen man die einer gegebenen trigon. Linie zukommenden Kreisbogen herausnehmen kann; so würden auch alle Integralausdrücke, welche auf elliptische Bogen oder Functionen führen, als hinlänglich bekannt und entwickelt anzusehen seyn, wenn man auch dafür ähnliche Tabellen besäfse, in welchen für jede Ellipse (von was immer für Axen) die Länge des irgend einer Abscisse x entsprechenden Bogens (als Function von x) berechnet und eingetragen wäre.

Aber abgesehen davon, biethen die elliptischen Functionen schon an und für sich so schöne analytische Eigenschaften und mannigfache Anwendungen in den verschiedenen mathematischen

Zweigen dar, dafs sie die Aufmerksamkeit der neuern Analysten in hohem Grade erregt haben. Unter den transcendenten Functionen wurden fast ausschliefsend blofs die logarithmischen und Kreisfunctionen untersucht, bis der unsterbliche *Euler* durch seine sinnreiche Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)}}=0$$

die er algebraisch durchführte, obschon das Integral jedes einzelnen Gliedes dieser Gleichung weder durch Logarithmen noch durch Kreisfunctionen, sondern lediglich nur durch elliptische oder hyperbolische Bogen ausgedrückt werden kann, auch hier wieder die Bahn brach und den Grund zu den elliptischen Functionen oder elliptischen Transcendenten legte, welche, ohne einzelne Beiträge, die schon früher von *Fagnani*, *Landen* und *Lagrange* geliefert wurden, zu erwähnen, mit der gröfsten Gründlichkeit und Ausführlichkeit von *Legendre* (geb. 1752; gest. zu Paris 1833) behandelt und in seinen (oben Seite 434 angeführten) vortrefflichen »*Exercices de Calcul Intégral*« bekannt gemacht worden sind. Neuere Untersuchungen über diesen Gegenstand findet man von *Abel* und *Jacobi* in *Crelle's* Journal für die reine und angew. Mathematik, und ganz vorzüglich in dem jüngst von *Jacobi* herausgegebenen classischen Werke: »*Fundamenta Nova Theoria Functionum Ellipticarum. Regiomonti* 1829.« in 4.

Unter den elliptischen Functionen oder Transcendenten versteht man im Allgemeinen alle Functionen, welche in dem Integrale

$$\int\frac{R\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}$$

wobei R eine rationale Function von x ist und α, β, γ, δ, ε constante reelle Gröfsen bezeichnen, begriffen sind. *Legendre* zeigt in dem erwähnten Werke, dafs sich dieses Integral durch eine geeignete Transformation auf jenes $\int\frac{P\,dy}{\sqrt{(a+by^2+cy^4)}}$ bringen lasse, wobei P eine rationale Function von y ist*); dafs die-

*) Hier wollen wir wenigstens zeigen, wie sich das obige, den elliptischen Bogen s darstellende Integral (p (S. 431) auf diese Form bringen lasse.

Setzt man $a^2-\frac{(a^2-b^2)}{a^2}x^2=y^2$, so folgt:

$$x=\frac{a\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{(a^2-b^2)}},\quad dx=\frac{-ay\,dy}{\sqrt{(a^2-b^2)}\sqrt{(a^2-y^2)}}$$

ses ferner wieder auf die Form

$$\int \frac{A + By^2}{C + Dy^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(a + by^2 + cy^4)}},$$

so wie endlich dieses Integral auf die Form

$$\int \frac{A + B\,sin.^2\,\varphi}{C + D\,sin.^2\,\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\,sin.^2\,\varphi)}}$$

gebracht werden könne.

Legendre theilt aus diesem Grunde die elliptischen Transcendenten in drei Gattungen, und zwar, wenn man nach ihm die Wurzelgröfse $\sqrt{(1 - c^2\,sin.^2\,\varphi)}$ durch Δ bezeichnet, in $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$ als die erste und einfachste, ferner $\varepsilon = \int \Delta\, d\varphi$ als die zweite, und endlich in $\Pi = \frac{d\varphi}{(1 + n^2\,sin.^2\,\varphi)\,\Delta}$ als die letzte Gattung. Das weitere mufs man in den angeführten Werken selbst nachsehen.

und es verwandelt sich die genannte Formel (p:

$$\int \frac{dx \sqrt{\left[a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2\right]}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

in die folgende:

$$s = -\int \frac{ay^2\,dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}\sqrt{(a^2 y^2 - a^2 b^2)}} = -\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{[(a^2 + b^2)y^2 - y^4 - a^2 b^2]}}.$$

Achtes Capitel.

Von der Integration der *Differentialgleichungen* der ersten Ordnung zwischen *zwei* Variablen.

§. 184.

Wir haben bisher immer angenommen, daſs die Differentialcoefficienten der gesuchten Function unmittelbar durch die von einander unabhängig variablen Gröſsen ausgedrückt sind; in der Anwendung jedoch kommen nur zu häufig Fälle vor, in welchen bloſs eine Relation dieser Coefficienten mit den Variablen durch eine Gleichung gegeben ist, so daſs aus dieser Differentialgleichung dann die ursprüngliche Gleichung oder Function zu entwickeln ist.

Eine solche Differentialgleichung, und zwar, wie wir diese in dem gegenwärtigen Capitel voraussetzen, zwischen zwei Variablen, von der ersten Ordnung und vom ersten Grad, ist von der Form $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ und läſst sich immer auf jene

$$1) \quad M dx + N dy = 0,$$

wobei im Allgemeinen M, N Functionen von x und y sind, zurückführen.

Die vorzüglichsten Mittel, deren man sich zur Bestimmung der ursprünglichen Gleichung, aus deren Differentiation jene 1) folgt, wenn nicht etwa $M dx + N dy$ ein vollständiges Differential von $u = \varphi(x, y)$ ist, in welchem Falle man diese nach Capitel 6. herleiten und dafür $u = C$ finden würde, bestehen: *A*) in der Absonderung der Variablen, und *B*) in der Auffindung des integrirenden Factors.

A) Von der *Absonderung* der veränderlichen Gröfsen.

§. 185.

Der Zweck jenes Verfahrens, welches das Absondern der Variablen genannt wird, besteht darin, die gegebene Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ auf jene $Xdx + Ydy = 0$ zu bringen, bei welcher X blofs eine Function von x, und Y blofs eine Function von y ist; in diesem Falle erhält man dann durch Integration:

$$\int X dx + \int Y dy = C,$$

wo C eine willkürliche Constante bezeichnet, so, dafs also dadurch das Ganze auf die Integration von Differentialformeln mit Einer Variablen zurückgeführt wird. Denn ist z. B. $x^n dx + y^m dy = 0$ die zu integrirende Differentialgleichung, so ist

$$\int x^n dx + \int y^m dy = C \text{ oder } \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{y^{m+1}}{m+1} = C$$

die ursprüngliche Gleichung.

Wir wollen dieses Verfahren durch einige Beispiele erläutern.

§. 186.

Beispiele.

1) Ist $ydx + xdy = 0$ die gegebene Differentialgleichung, so erhält man daraus durch Division mit xy:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

und daraus durch Integration: $lx + ly = lC$, oder

$$lxy = lC, \text{ d. i. } xy = C.$$

2) Aus der Differentialgleichung $dx\sqrt{(1+y^2)} - xdy = 0$ folgt (durch Absonderung)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)}}$$

und wenn man diese integrirt [§. 108., 1. und §. 116., (*b*)]:

$$lx = l[y + \sqrt{(1+y^2)}] + C,$$

oder, wenn man der willkürlichen Constante die Form $-lC$ gibt, auch

$$lCx = l[y + \sqrt{(1+y^2)}] \text{ oder } Cx = y + \sqrt{(1+y^2)}.$$

3) Ist, allgemeiner noch, die Gleichung

$$XY\,dx + X'Y'\,dy = 0$$

gegeben, wo X, X' Functionen von x, und Y, Y' Functionen von y sind; so bewirkt man die Trennung oder Absonderung der Variablen, indem man diese Gleichung durch $X'Y$ dividirt. Denn man erhält dadurch

$$\frac{X}{X'}dx + \frac{Y'}{Y}dy = 0,$$

eine Gleichung von der gewünschten Form.

Auf diese Weise wird man z. B. die Gleichung

$$x^3y\,dx + (2y-1)\,dy\sqrt{x} = 0$$

behandeln und dadurch in folgende verwandeln:

$$\frac{x^3}{\sqrt{x}}dx + \frac{2y-1}{y}dy = 0.$$

Diese letztere Gleichung läſst sich nun integriren, wodurch man ganz einfach erhält:

$$\tfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2y - ly = C.$$

§. 187.

Ist die gegebene Differentialgleichung [1), §. 184.] homogen, d. i. (Bd I., §. 1., Erkl. 6) so beschaffen, daſs in M und N durchaus die nämliche Summe in den Exponenten von x und y, z. B. $= n$ Statt findet; so ist das Absondern der Variablen immer, und zwar dadurch möglich, daſs man $y = xz$ setzt, wo z eine neue veränderliche Gröſse bezeichnet. Denn da in diesem Falle die Differentialcoefficienten M und N von der Form $Ax^\alpha y^\beta + Bx^\gamma y^\delta + \ldots$ sind, wobei $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \ldots = n$ ist; so werden diese durch die Substitution von $y = xz$ auf die Form $Az^\beta x^n + Bz^\delta x^n + \ldots$ gebracht, so daſs nun alle Glieder den gem. Factor x^n besitzen und sofort $M = Zx^n$ und $N = Z'x^n$ gesetzt werden kann, wo Z und Z' bloſs noch Functionen von z sind.

Setzt man nun diese letztern Werthe für M und N, so wie auch den aus $y = xz$ folgenden Werth $dy = xdz + zdx$ in die gegebene Differentialgleichung 1), §. 184.; so erhält man

$$Zx^n dx + Z' x^n (x\,dz + z\,dx) = 0,$$

welche Gleichung endlich durch Absonderung der Variablen, wenn man auch noch durch x^n abkürzt, in folgende übergeht:

$$\frac{dx}{x} + \frac{Z'\,dz}{Z + Z'z} = 0,$$

und diese gibt durch Integration:

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{Z'\,dz}{Z + Z'z} = C,$$

wobei zuletzt, nach vollendeter Integration, für z wieder der Werth $\frac{y}{x}$ zurück substituirt wird.

§. 188.

Beispiele.

1) Setzt man in der homogenen Differentialgleichung

$$y\,dx = \frac{x^2 + xy}{x - y}\,dy,$$

$y = xz$; so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$z\,dx = \frac{(1 + z)(x\,dz + z\,dx)}{1 - z}$$

und daraus durch Absonderung

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 + z}{2z^2}\,dz = 0.$$

Diese Gleichung gibt durch Integration, die sich ohne Schwierigkeit ausführen läſst:

$$lx + \tfrac{1}{2}lz - \frac{1}{2z} = C,$$

oder, wenn man für z den Werth wieder herstellt:

$$lx + \tfrac{1}{2}l\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{2y} + C.$$

2) Es sey

$$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{(x^2 + y^2)}$$

die zu integrirende Differentialgleichung. Da diese ho-

mogen ist, so setze man $y = xz$, und daher

$$dy = xdz + zdx;$$

so erhält man, wenn gehörig reducirt und durch x abgekürzt wird:

$$xdz = dx\sqrt{(1 + z^2)}$$

und daraus

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)}};$$

folglich durch Integration:

$$lx = l[z + \sqrt{(1 + z^2)}] + lC, \text{ oder auch } x = Cz + C\sqrt{(1 + z^2)}.$$

Wird endlich wieder für z der Werth $\frac{y}{x}$ zurückgesetzt, so erhält man für die gesuchte Integralgleichung:

$$x^2 = Cy + C\sqrt{(x^2 + y^2)},$$

oder auch, wenn man Cy transferirt, die Gleichung quadrirt und durch x^2 abkürzt:

$$x^2 = C^2 + 2Cy \text{ *)}.$$

§. 189.

In der bemerkenswerthen Gleichung $dy + Py\,dx = Qdx$, in welcher P und Q beliebige Functionen von x bezeichnen, läſst sich die Absonderung der Variablen auf eine sehr sinnreiche Weise bewirken. Setzt man nämlich $y = Xz$, also $dy = Xdz + zdX$, wobei X eine willkürliche noch unbestimmte Function von x bezeichnet; so erhält man:

$$zdX + Xdz + PXzdx = Qdx.$$

Um nun diese Gleichung in zwei andere zu zerlegen, in welchen sich die Variablen absondern lassen, bestimme man die Function X dergestalt, daſs

$$Xdz + PXzdx = 0, \text{ folglich auch } zdX = Qdx$$

wird. Die erste dieser beiden Gleichungen durch X dividirt, gibt:

$$dz + Pzdx = 0, \text{ oder } \frac{dz}{z} = -Pdx,$$

*) Hinsichtlich des Verfahrens, um aus dieser Gleichung wieder die gegebene Differentialgleichung zu finden, sehe man die folgende Note (zu §. 190.).

und wenn man integrirt:

$$lz = -\int P\,dx,$$

oder, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen ist:

$$z = e^{-\int P\,dx} \ldots (\alpha.$$

Mit diesem Werthe von z gibt jetzt die zweite der genannten Gleichungen:

$$dX = e^{\int P\,dx} Q\,dx$$

und wenn man integrirt:

$$X = \int e^{\int P\,dx} Q\,dx + C.$$

Da nun $y = Xz$ ist, so hat man endlich, wenn für X und z diese gefundenen Werthe substituirt werden:

$$y = e^{-\int P\,dx} \left(\int e^{\int P\,dx} Q\,dx + C\right) \ldots (\beta.$$

Anmerk. Die hier integrirte Differentialgl. $dy + Py\,dx = Q\,dx$ in welcher y und dy blofs in der ersten Potenz vorkommen, wird lineäre Gleichung der ersten Ordnung, consequenter aber nach *Lacroix*, Gleichung des ersten Grades der ersten Ordnung genannt.

§. 190.

Beispiele.

1) Es sey die Gleichung zu integriren:

$$dy + y\,dx = x^2\,dx.$$

Die Vergleichung dieser mit der allgemeinen Gleichung des vorigen Paragraphes gibt $P = 1$ und $Q = x^2$; folglich ist $\int P\,dx = \int dx = x$ und daher [Form. (β]

$$y = e^{-x}\left(\int x^2 e^x\,dx + C\right),$$

oder wegen (§. 142,, Beisp. 1)

$$\int x^2 e^x\,dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$$

auch:

$$y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2 \text{ *)}.$$

*) Differentiirt man diese Gleichung wieder, so entsteht:

$$dy = -Ce^{-x}\,dx + (2x - 2)\,dx$$

und wenn man aus dieser und der erstern Gleichung, aus welcher

$$Ce^{-x} = y - x^2 + 2x - 2$$

2) Für die Gleichung

$$(1-x^2)\,dy + xy\,dx = a\,dx$$

wird

$$P = \frac{x}{1-x^2},\quad Q = \frac{a}{1-x^2},\quad \int P\,dx = -\,l\sqrt{(1-x^2)}.$$

$$e^{\int P\,dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

und daher [Form. (β des vor. Paragraphes]

$$y = \sqrt{(1-x^2)}\left[C + \int\frac{a\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \sqrt{(1-x^2)}\left[C + \frac{a\,x}{\sqrt{(1-x^2)}}\right]$$

d. i. $y = ax + C\sqrt{(1-x^2)}$.

§. 191.

Auch in der Gleichung

$$dy + by^2\,dx = a\,x^m\,dx,$$

welche nach dem italienischen Geometer *Riccati* *), der sich zuerst mit ihrer Integration beschäftigte **), die *Riccatische* Differentialgleichung genannt wird, lassen sich bei gewissen Werthen von m die Variablen absondern.

a) Der einfachste Fall ist der, in welchem $m = 0$ ist. In diesem Falle hat man die Differentialgleichung

$$dy + by^2\,dx = a\,dx,$$

folgt, die Constante C eliminirt, auch

$$dy = -\,y\,dx + x^2\,dx,\ \text{oder}\ dy + y\,dx = x^2\,dx;$$

welches sofort die gegebene Differentialgleichung ist.

Dasselbe gilt auch von der im zweiten Beispiele des §. 188. gefundenen Integralgleichung, wenn man bei der Vergleichung die gegebene Differentialgleichung rational macht. (Vergl. §. 29.)

*) Der Conte *Giacomo Riccati* war einer der ersten Mathematiker in Italien. Von seinen Söhnen, die er selbst in der Mathematik unterrichtete, wurde der älteste (*Vincent*, geb. zu Castel-Franco 1707; gest. 1775) durch seine tiefsinnigen mathematischen Abhandlungen berühmter noch als er selbst. Der jüngere (Mathematiker, Architect und ausgezeichneter Musiker, geb. 1709; gest. 1790) hat unter Anderm auch einen Tractat über schwingende Saiten herausgegeben.

**) *Acta Eruditorum, supplem. T.* VIII. 1724 (und nicht, wie gewöhnlich angegeben wird, 1722), *pag.* 66.

aus welcher

$$dx = \frac{dy}{a - by^2}$$

und wenn man diese letztere integrirt [§. 110., (α)]

$$x = \frac{1}{2\sqrt{(ab)}}\, l\left[\frac{\sqrt{a} + y\sqrt{b}}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}}\right] + C$$

folgt.

b) Setzt man in der *Riccatischen* Differentialgleichung $y = z^n$, so erhält man

$$nz^{n-1}dz + bz^{2n}dx = ax^m dx;$$

soll diese dadurch homogen geworden seyn, so muſs $n - 1 = 2n = m$ Statt finden; woraus folgt, daſs $n = -1$ und $m = -2$ seyn muſs. Es kann also die Gleichung $dy + by^2dx = \frac{adx}{x^2}$ homogen gemacht werden, wenn man $y = \frac{1}{z}$ setzt; dadurch geht diese über in

$$-\frac{dz}{z^2} + \frac{bdx}{z^2} = \frac{adx}{x^2};$$

welche Gleichung sofort nach §. 187. integrirt werden kann.

§. 192.

Wir wollen hier noch auf den merkwürdigen Fall aufmerksam machen, in welchem einer Differentialgleichung wie $Xdx = Ydy$, wo die Variablen bereits abgesondert sind, eine algebraische Integralgleichung entsprechen kann, obschon es nicht möglich ist, die einzelnen Integrale $\int Xdx$, $\int Ydy$ algebraisch zu entwickeln.

Ist z. B. die Gleichung gegeben:

$$dx\sqrt{(a^2 - y^2)} = dy\sqrt{(a^2 - x^2)},$$

aus welcher durch Absonderung jene

$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$$

folgt; so läſst sich jeder dieser beiden Differentialausdrücke bloſs mittelst Kreisbogen integriren, indem man hat:

$$arc.\,sin.\left(\frac{x}{a}\right) = arc.\,sin.\left(\frac{y}{a}\right) + C,$$

und dennoch gibt es eine algebraische Gleichung, aus welcher durch Differentiation die hier gegebene Differentialgleichung entstehen kann. Um diese zu finden, multipliciren wir die obige (abgesonderte) Gleichung mit xy; so entsteht

$$y\frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = x\frac{y\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$$

und wenn auf jeder Seite theilweise integrirt wird, indem man in der Formel (α, §. 124., für das erste Integral $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ und $u = y$, dann im zweiten Integral $dv = \frac{y\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ und $u = x$ setzt:

$$-y\sqrt{(a^2-x^2)} + \int dy\sqrt{(a^2-x^2)}$$
$$= -x\sqrt{(a^2-y^2)} + \int dx\sqrt{(a^2-y^2)} - C.$$

Da nun aber in Folge der gegebenen Gleichung

$$\int dy\sqrt{(a^2-x^2)} = \int dx\sqrt{(a^2-y^2)}$$

ist, so hat man für die gesuchte Integralgleichung endlich

$$y\sqrt{(a^2-x^2)} = x\sqrt{(a^2-y^2)} + C,$$

welche sofort algebraisch ist und, wie man sich leicht überzeugt, durch Differentiation wieder die gegebene Gleichung hervorbringt *).

*) Die hier angeführte Eigenthümlichkeit solcher Gleichungen läfst sich auf folgende Art erläutern:

Es sey $\varphi(y)\,dy$ ein Differentialausdruck, dessen Integral durch keinen geschlossenen algebraischen Ausdruck dargestellt werden kann; man setze $y = f(x)$, wo $f(x)$ eine algebraische Function von x bezeichnen soll, so wird, wenn man diesen Werth substituirt und noch $d.f(x) = f'(x)\,dx$ setzt:

$$\varphi(y)\,dy = \varphi[f(x)]f'(x)\,dx.$$

Gesetzt nun, $f(x)$ sey so beschaffen, dafs

$$\varphi[f(x)]f'(x) = \varphi(x)$$

ist; so entsteht dann die Gleichung

$$\varphi(y)\,dy = \varphi(x)\,dx,$$

in welcher, der Voraussetzung gemäfs, keiner der beiden Theile ein algebraisches Integral liefert, obschon nichts desto weniger zwischen x und y die algebraische Gleichung $y = f(x)$ besteht.

Dafs aber Functionen $f(x)$ von der genannten Beschaffenheit möglich sind, mag folgendes Beispiel zeigen:

B) Aufsuchung des *integrirenden Factors.*

§. 193.

Wir haben in der Differentialrechung (§. 29.) gesehen, dafs eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen zwei Variablen, nicht blofs aus der unmittelbaren Differentiation einer gegebenen Gleichung von zwei Variablen, sondern allgemein dadurch entsteht, dafs man aus der gegebenen und der durchs Differentiiren daraus abgeleiteten Gleichung, eine beliebige Constante eliminirt *). Besitzt nun die ursprüngliche Gleichung die Form $u = C$, wo u eine Function von x und y bezeichnet; so wird schon durch die unmittelbare Differentiation die Constante C eliminirt, indem man erhält: $du = 0$; und es ist klar, dafs, wenn in du nicht etwa ein gemeinschaftlicher Factor zum Vorschein gekommen ist, den man aufgehoben hat, aus dieser Differentialgleichung nach Capitel 6. leicht die ur-

Für den Differentialausdruck $\frac{dy}{a+by^2}$ setze man

$$y = \frac{px - a}{p + bx} \ldots (m;$$

so wird $dy = \frac{p^2 + ab}{(p+bx)^2} dx \ldots (n$

und $a + by^2 = \frac{(p^2 + ab)(a + bx^2)}{(p + bx)^2}$,

folglich

$$\frac{dy}{a+by^2} = \frac{dx}{a+bx^2}.$$

Die unmittelbare Integration dieser Gleichung würde auf Kreisbogen führen, während es doch sicher ist, dafs zwischen x und y die algebraische Gleichung (m besteht, aus welcher man ebenfalls diese letztere Differentialgleichung findet, indem man aus ihr und ihrem Differential (n die Gröfse p eliminirt.

*) Daher kann man auch die Definition von der Integration der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ allgemeiner so geben: Die Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ integriren heifst, eine neue Gleichung zwischen x und y und einer willkürlichen Constante C von solcher Beschaffenheit finden, dafs, wenn man aus ihr und der daraus abgeleiteten Differentialgleichung die Constante C eliminirt, die gegebene oder eine daraus abgeleitete Differentialgleichung zum Vorschein kommt.

sprüngliche Gleichung $u = C$ wieder zurück geleitet werden kann, weil in diesem Falle du ein vollständiges Differential einer Function zweier Variablen x und y ist.

Ist z. B. $\frac{x}{y} = C$ die ursprüngliche Gleichung, so entsteht daraus die Differentialgleichung

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0.$$

Wird nun diese letztere Gleichung ohne Abkürzung zur Integration vorgelegt, so überzeugt man sich [§. 21., 1)] leicht, daſs hier $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$ ein vollständiges Differential einer Function u von zwei Variablen ist, indem dafür die Bedingungsgleichung $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ Statt findet, und daſs mithin (§. 168.) die Integration keine Schwierigkeit darbiethet und sofort wieder zur Gleichung $\frac{x}{y} = C$ zurückführt.

Wird dagegen die obige Differentialgleichung durch den Factor $\frac{1}{y^2}$ abgekürzt und sofort in der Form $y\,dx - x\,dy = 0$ zur Integration gegeben, oder was auf das nämliche führt, war die ursprüngliche Function u nicht von der Form $u = C$, sondern von jener $u = y - Cx = 0$, aus welcher $du = dy - Cdx = 0$, und wenn man aus diesen beiden Gleichungen C eliminirt, $dy - \frac{y}{x}dx = 0$, d. i. wieder $x\,dy - y\,dx = 0$ folgt; so kann diese Differentialgleichung nun offenbar nicht mehr der Integrabilitätsbedingung entsprechen, also auch nicht unmittelbar unter dieser Form integrirt werden. [Es ist in der That für diese Gleichung: $P = -y$ und $Q = x$; folglich $\left(\frac{dP}{dy}\right) = -1$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = +1$.] Diese Gleichung wird aber wieder integrabel, sobald man den Factor $\frac{1}{y^2}$, mit welchem im erstern Falle abgekürzt worden und welcher im zweiten Falle durch die Elimination

von C herausgefallen ist, wieder herstellt und damit die unvollständige Differentialgleichung multiplicirt.

So wird z. B. die unvollständige Differentialgleichung $3y\,dx + 2x\,dy = 0$ (welche entsteht, wenn man jene $x^3y^2 = C$ differentiirt und durch x^2y abkürzt), durch die Multiplication mit x^2y vollständig und sofort integrabel.

Ein solcher Factor nun, mit welchem man eine unvollständige Differentialgleichung multipliciren muſs, um sie vollständig und integrabel zu machen, heiſst integrirender Factor; und es gibt für jede unvollständige Differentialgleichung zwischen zwei Variablen, welche den ersten Grad nicht übersteigt und von einer Gleichung $\varphi(x, y, C) = 0$ abgeleitet worden oder dieser entspricht, immer einen integrirenden Factor z, welcher im Allgemeinen eine Function von x und y ist*).

*) Ist $M\,dx + N\,dy = 0$. . . (α die unvollständige Differentialgleichung, $u = C$ die ursprüngliche, durch deren Differentiation $du = 0$ und Abkürzung eines gem. Factors A jene (α entstanden; so ist natürlich A selbst dieser integrirende Factor.

Ist dagegen die gegebene Differentialgleichung (α das Ergebniſs der Elimination einer Constanten C aus den beiden Gleichungen $u = f(x, y, C) = 0$ und $du = 0$, wo wieder u die ursprüngliche oder zu suchende Function bezeichnet; so bemerke man, daſs der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ aus der erstern Gleichung (α abgeleitet, denselben Werth erhalten muſs, als wenn dieser aus der Gl. $\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0$ (als Differentialgl. von $u = 0$) bestimmt wird. Es muſs nämlich seyn:

$$-\frac{M}{N} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)},$$

oder, wenn man den Quotienten $\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{M} = z$ setzt:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = Mz \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right) = Nz.$$

§. 194.

Was nun das Verfahren betrifft, welches sich zur Bestimmung eines integrirenden Factors für eine unvollständige Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ darbiethet; so wollen wir annehmen, daſs z ein solcher Factor sey, welcher, wie wir schon bemerkt haben, im Allgemeinen als eine Function von x und y zu betrachten ist. Dieſs vorausgesetzt, wird nun, wenn man die gegebene Gleichung durch z multiplicirt:

$$Mz\,dx + Nz\,dy = 0,$$

oder wenn man $Mz = P$ und $Nz = Q$ setzt:

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

eine vollständige Differentialgleichung seyn, für welche sofort

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \text{ oder } \left(\frac{d\,.\,Mz}{dy}\right) = \left(\frac{d\,.\,Nz}{dx}\right)$$

Statt findet. Diese letztere Gleichung entwickelt, gibt:

$$M\left(\frac{dz}{dy}\right) + z\left(\frac{dM}{dy}\right) = N\left(\frac{dz}{dx}\right) + z\left(\frac{dN}{dx}\right)$$

oder auch

$$M\left(\frac{dz}{dy}\right) - N\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right]z = 0\,..\,(1.$$

Wäre man nun allgemein im Stande, aus dieser Gleichung (1 einen Werth von z zu finden, so würde die Aufgabe gelöst und ein integrirender Factor für die gegebene Differentialgleichung gefunden seyn, welche sich sodann leicht nach Capitel 6. integriren lieſse; allein es ist die Integration dieser Gleichung (1, in welcher z von zwei Variablen und zwei Differentialcoefficienten abhängt, in der Regel noch schwieriger, als die der gegebenen, so, daſs es bis jetzt noch nur unter gewissen Bedingungen möglich

Es ist also auch das vollständige Differential:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy = Mz\,dx + Nz\,dy;$$

folglich [wie die Vergleichung mit der gegebenen Differentialgleichung (α zeigt] z der integrirende Factor.

ist, diesen Factor z vollkommen zu bestimmen. Diese erwähnten Bedingungen sind: erstens, wenn dieser Factor z entweder blofs eine Function von x oder y zu seyn braucht, und zweitens, wenn die gegebene Differentialgleichung homogen ist; wir wollen beide Fälle näher betrachten.

§. 195.

Wir wollen annehmen, dafs z blofs eine Function von x ist, d. h. es soll, um die gegebene Gl. $Mdx + Ndy = 0$ integrabel zu machen, hinreichen, diese blofs mit einer gewissen Function von x zu multipliciren; dadurch wird $\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ und die Gleichung (1 geht über in:

$$-N\frac{dz}{dx} + \left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right] z = 0,$$

oder auch

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{N}\left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right] dx \ldots (2.$$

Da nun der erste Theil dieser Gleichung integrabel und gleich lz ist, so mufs sich auch der zweite Theil derselben integriren lassen; was auch in der That der Fall ist, da der angenommenen Hypothese zufolge, dieser zweite Theil kein y enthalten kann, weil sonst z nicht blofs eine Function von x wäre. Bezeichnet man daher die Function von x, auf welche sich dieser genannte Theil reduciren mufs, durch X, d. i. setzt man

$$\frac{1}{N}\left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right] = X \ldots (3,$$

so folgt aus (2:

$$lz = \int X dx \text{ oder } z = e^{\int X dx} \ldots \text{I.}$$

Genau eben so würde man bei der Voraussetzung, dafs z blofs eine Function von y seyn dürfe, wenn man

$$\frac{1}{M}\left[\left(\frac{dN}{dx}\right) - \left(\frac{dM}{dy}\right)\right] = Y \ldots (4$$

setzt:

$$z = e^{\int Y dy} \ldots \text{II.}$$

finden.

Diese Gleichungen (3 und (4 werden folglich zugleich als Kennzeichen dienen, ob der gesuchte integrirende Factor blofs eine Function von x oder von y seyn darf *).

§. 196.

Beispiele.

1) Die gegebene Differentialgleichung sey

$$dx + (a\,dx + 2by\,dy)\sqrt{(1 + x^2)} = 0;$$

so ist dafür

$$M = 1 + a\sqrt{(1 + x^2)} \text{ und } N = 2by\sqrt{(1 + x^2)},$$

folglich

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0 \text{ und } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2bxy}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

so, dafs die Bedingung der Integrabilität hier nicht Statt findet. Weil aber [Gl. (3]

$$\frac{1}{N}\left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right] = -\frac{x}{1 + x^2}$$

blofs eine Function von x ist, so läfst sich der integrirende Factor für das gegenwärtige Beispiel nach Formel I. (§. 195.) finden. Es ist nämlich:

$$X = -\frac{x}{1 + x^2},$$

also $\int X\,dx = -\int\frac{x\,dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{2}\,l(1 + x^2) = -\,l\sqrt{(1 + x^2)}$, und daher

$$z = e^{-l\sqrt{(1 + x^2)}},$$

oder $-l\sqrt{(1 + x^2)} = lz = l\dfrac{1}{\sqrt{(1 + x^2)}}$, d. i. $z = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + x^2)}}$.

Multiplicirt man also die gegebene Differentialgleichung mit diesem gefundenen Factor z, so erhält man:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)}} + a\,dx + 2by\,dy = 0,$$

*) Ist der Factor z constant, so reducirt sich die Gl. (1 des vorigen Paragr. auf jene: $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, zum Beweis, dafs in diesem Falle die gegebene Differentialgleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

an und für sich schon vollständig und integrabel ist.

welche Gleichung nun in der That integrirt werden kann, indem man [§. 116. (b)]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = l[x+\sqrt{(1+x^2)}],\ \int a\,dx = ax,\ \int 2by\,dy = by^2,$$

und folglich für die gesuchte Integralgleichung

$$ax + by^2 + l[x + \sqrt{(1+x^2)}] = C$$

erhält.

2) Für die schon oben (§. 189.) behandelte (lineäre) Gleichung $dy + Py\,dx = Q\,dx$, folgt $M = Py - Q$ und $N = 1$, mithin, da der Voraussetzung zufolge, P und Q nur x und kein y enthalten:

$$\frac{1}{N}\left[\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right] = P \text{ und } z = e^{\int P\,dx}.$$

Wird demnach die gegebene Gleichung mit diesem gefundenen Factor multiplicirt, so entsteht

$$e^{\int P\,dx} dy + (Py - Q)\, e^{\int P\,dx} dx = 0,$$

eine Gleichung, deren erster Theil nun ein vollständiges Differential einer Function zweier Variablen x und y ist und daher nach §. 168. integrirt werden kann.

Wählt man dazu das durch die Formel II (a. a. O.) ausgedrückte Verfahren, so wird, wenn man das Differential $e^{\int P\,dx} dy$ nach y integrirt:

$$v' = e^{\int P\,dx} y, \text{ also } \left(\frac{dv'}{dx}\right) = y\, e^{\int P\,dx} P;$$

ferner [die dort mit $P - \left(\frac{dv'}{dx}\right)$ bezeichnete Differenz]

$$(Py - Q)\, e^{\int P\,dx} - \left(\frac{dv'}{dx}\right) = -\,Q\, e^{\int P\,dx},$$

und daher:

$$u = v' + \int -\,Q\, e^{\int P\,dx} dx = e^{\int P\,dx} y - \int Q\, e^{\int P\,dx} dx.$$

Man hat daher endlich die gesuchte Integralgleichung:

$$e^{\int P\,dx} y - \int Q\, e^{\int P\,dx} dx = C$$

oder auch [übereinstimmend mit (β, §. 189.]

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int e^{\int P\,dx} Q\,dx + C\right].$$

§. 197.

Ist die gegebene Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ homogen, d. h. sind M und N gleichartige Functionen von x und y und gesetzt von der Dimension n; so ist es leicht einen integrirenden Factor z zu finden. Denn setzt man die Dimension dieses Factor $= m$ und bemerkt, daſs in der nun vollständigen Differentialgleichung

$$Mz\,dx + Nz\,dy = du \ldots (1$$

die Glieder Mz und Nz, welche sofort die Dimension $m + n$ besitzen, durch die Differentiation von u eine Dimension verlieren (vergl. §. 22); so hat u die Dimension: $m + n + 1$, und es ist des im §. 22. entwickelten Satzes zufolge:

$$Mz.x + Nz.y = (m + n + 1)\,u.$$

Die Gleichung (1 durch diese letztere dividirt, gibt, wenn man gleich durch z abkürzt:

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{1}{m + n + 1} \cdot \frac{du}{u}.$$

Da nun aber der zweite Theil dieser Gleichung integrabel ist, so muſs es auch der erste seyn, woraus offenbar folgt, daſs hier $z = \frac{1}{Mx + Ny}$ der gesuchte integrirende Factor ist *).

*) Kehrt man diese Aufgabe um und sucht, von welcher Beschaffenheit die Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ seyn muſs, damit sie durch den Factor $\frac{1}{Mx + Ny}$ integrabel werde; so findet man

$$\frac{N}{M} = F\left(\frac{x}{y}\right),$$

nämlich von der Dimension Null; woraus sofort folgt, daſs M und N homogene Functionen von x und y seyn müssen.

Man kann überhaupt umgekehrt zu einem angenommenen integrirenden Factor, die Form der Function $Mdx + Ndy$ bestimmen, welche mit diesem Factor eine integrirbare Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ gibt. *Euler* hat sich zuerst mit diesem Gegenstande beschäftigt und das nöthige Verfahren in der Integralrechnung T. I., Sect. II., Cap. III. vorgetragen. (Man kann auch vergleichen: *Lacroix* Integralrechnung, in 4., zweite Ausg., §. 575. u. f.)

Anmerk. 1. Wir müssen schliefslich noch bemerken, dafs, wenn man für die Differentialgleichung $M dx + N dy = 0$ überhaupt einen integrirenden Factor z gefunden hat, daraus noch unzählige andere, und zwar sehr leicht abgeleitet werden können. Denn ist, wenn man mit diesem gefundenen Factor multiplicirt, $Mz\,dx + Nz\,dy = du$ eine vollständige Differentialgleichung; so ist auch die folgende, welche entsteht, wenn man diese letztere mit einer willkürlichen Function von u multiplicirt, nämlich

$$Mz\varphi(u)\,dx + Nz\varphi(u)\,dy = \varphi(u)\,du$$

vollständig, weil $\varphi(u)\,du$ ein vollständiges Differential ist. Es machen also alle Factoren, welche man nur immer aus $z\varphi(u)$ ableiten kann, die gegebene Differentialgleichung integrabel.

Anmerk. 2. Es wird nicht überflüssig seyn zu bemerken, dafs alle diese vervollständigten homogenen Differentialgleichungen $\dfrac{M dx + N dy}{Mx + Ny}$ vom Grade -1 sind, also nicht nach §. 172. (m. s. die Anmerk. 2 des angeführten Paragr.) integrirt werden können.

§. 198.

Beispiel.

Für die homogene, unvollständige Differentialgleichung

$$y^2 dx + x^2 dy - xy\,dy = 0$$

ist $M = y^2$ und $N = x^2 - xy$; folglich der integrirende Factor:

$$\frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{xy^2 + x^2y - xy^2} = \frac{1}{x^2y}.$$

Wird die gegebene Gleichung damit multiplicirt, so entsteht

$$\frac{y\,dx}{x^2} + \frac{dy}{y} - \frac{dy}{x} = 0,$$

so, dafs jetzt $P = \dfrac{y}{x^2}$ und $Q = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$, also

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{1}{x^2},$$

nämlich in der That die Eigenschaft der Integrabilität vorhanden ist. Integrirt man nun diese letzte Gleichung (nach

§. 168.), so erhält man

$$-\frac{y}{x} + ly = C$$

als gesuchte Integralgleichung.

Anmerkung.

So wie die Differentialrechnung (m. s. die Note am Schlusse des fünften Capitels des ersten Abschnitts), wurde auch die Integralrechnung zur Summirung der Reihen benützt. Wir werden von dieser Anwendung der Integralrechnung nur durch einige Beispiele einen Begriff geben.

A) *Moivre* hat zuerst aufser der Differential- auch die Integralrechnung zur Auffindung summirbarer Reihen angewendet (*Miscell. Analyt. Lib.* VI.); wie man dabei verfährt, wird folgendes Beispiel zeigen.

Es ist [wie aus §. 129., Gl. 3), Bd. I. folgt]

$$x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots = l\left(\frac{1}{1-x}\right) \ldots (1,$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten mit dx multiplicirt und integrirt:

$$\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \ldots = \int dx\, l\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Setzt man nun zur Bestimmung dieses Integrals, in der Reductionsformel (α, §. 124., $u = l\left(\frac{1}{1-x}\right)$ und $dv = dx$; so erhält man daraus

$$\int dx\, l\left(\frac{1}{1-x}\right) = x\, l\left(\frac{1}{1-x}\right) - \int \frac{x\,dx}{1-x},$$

oder wegen $\frac{x\,dx}{1-x} = -dx + \frac{dx}{1-x}$ auch

$$= x\, l\left(\frac{1}{1-x}\right) + \int dx - \int \frac{dx}{1-x} = x\, l\left(\frac{1}{1-x}\right) + x - l\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

also $\int dx\, l\left(\frac{1}{1-x}\right) = x - (1-x)\, l\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + (1-x)\, l\,(1-x)$,

wo keine Constante hinzukommt, und daher

$$\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \ldots = x + (1-x)\, l\,(1-x) \ldots (2.$$

Für $x = 1$ z. B. erhält man

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots \text{ ins Unendl.} = 1.$$

Noch allgemeiner wird man die obige Gl. (1 mit $x^{n-1}dx$ multipliciren und wieder beiderseits Integriren, wodurch man erhält:

$$\frac{x^{n+1}}{1(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{2(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{3(n+3)} + \ldots$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \ldots + x\right] + \frac{1-x^n}{n} \cdot l(1-x).$$

Setzt man auch hier $x = 1$, so wird

$$\frac{1}{1(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)} + \text{ins Unendl.}$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots \frac{1}{2} + 1\right).$$

Auf ähnliche Art lassen sich noch eine Menge Reihen aus dieser ableiten; auch kann man die gefundene Gl. (2 neuerdings auf beiden Seiten mit dx multipliciren und integriren, wodurch man eine neue Reihe sammt ihrer Summe erhält, mit der man wieder eben so verfahren kann u. s. w.

B) Betrachtet man die gegebene zu summirende Reihe als eine durch Reihen integrirte Differentialformel und gelingt es, diese, so wie auch deren Integral in einen geschlossenen Ausdruck zu finden; so hat man dadurch auch die verlangte Summenformel der gegebenen Reihe. *Leibnitz* und *Joh. Bernoulli* haben diese Summirungsmethode zuerst ersonnen (*Commerc., epistol. T.* I.) und *Euler* hat dieselbe weiter ausgebildet und vervollkommnet (*Commentarii Acad. Petrop. T.* V., VI.).

Wir können hier von dieser Methode nur so viel bemerken, dafs man vorzüglich darauf hinarbeiten mufs, die gegebene Reihe in eine andere zu verwandeln, deren Summe bereits bekannt ist.

1. Um z. B. die Summe s der Reihe

$$s = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$$

zu finden, multiplicire man beide Theile der Gleichung durch $\frac{dx}{x}$ und nehme hierauf beiderseits das Integral; so entsteht:

$$\int \frac{s\,dx}{x} = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$

Da aber die Summe dieser letztern Reihe bekannt und $= \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$ ist, so folgt auch

$$\int \frac{s\,dx}{x} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1},$$

also wenn man diese Gleichung differentiirt:

$$\frac{s\,dx}{x} = \left[\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}\right] dx,$$

und daraus endlich die gesuchte Summe:

$$s = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

2. Um ferner noch die unendliche Reihe

$$\frac{1}{mn} + \frac{1}{(m+r)(n+r)} + \frac{1}{(m+2r)(n+2r)} + \ldots$$

zu finden, nehme man die Reihe

$$\frac{x^n}{mn} + \frac{x^{n+r}}{(m+r)(n+r)} + \frac{x^{n+2r}}{(m+2r)(n+2r)} + \ldots$$

aus welcher die erstere entsteht, wenn man $x = 1$ setzt, und bezeichne ihre Summe durch s; so folgt, wenn man differentiirt:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x^{n-1}}{m} + \frac{x^{n+r-1}}{m+r} + \frac{x^{n+2r-1}}{m+2r} + \ldots$$

Multiplicirt man beiderseits mit x^{m-n+1} und differentiirt neuerdings, so entsteht:

$$d.\left(x^{m-n+1}\frac{ds}{dx}\right) = dx\,(x^{m-1} + x^{m+r-1} + x^{m+2r-1} + \ldots)$$

oder, da die Summe der letztern (geom.) Reihe bekannt ist:

$$d.\left(x^{m-n+1}\frac{ds}{dx}\right) = \frac{x^{m-1}}{1-x^r}\,dx;$$

es ist also, wenn man integrirt:

$$x^{m-n+1}\frac{ds}{dx} = \int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^r},$$

wobei das Integral so zu nehmen ist, daſs es für $x = 0$ verschwindet (weil auch der erste Theil der Gleichung für $x = 0$ wegfällt). Aus dieser letzten Gleichung folgt ferner

$$ds = x^{n-m-1}\,dx\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^r}$$

und wenn man abermals integrirt:

$$s = \int x^{n-m-1}\,dx\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^r}.$$

Nun ist, wenn man theilweise integrirt [Form. (a, §. 124.]:

$$\int x^{n-m-1}\,dx\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^r} = \frac{x^{n-m}}{n-m}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^r} - \frac{1}{n-m}\int\frac{x^{n-1}\,dx}{1-x^r},$$

dabei muſs, da (der obigen Bemerk. zufolge) $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^r}$ für $x = 0$ verschwindet, auch, damit für $x = 0$, wie es die Natur der Sache fordert, $s = 0$ werden kann, das Integral $\int\frac{x^{n-1}\,dx}{1-x^r}$ für $x = 0$ verschwinden.

Wird nun, um auf die Summe s' der gegebenen Reihe zu kommen, $x=1$ gesetzt; so erhält man dafür:

$$s'=\frac{1}{n-m}\int_0^1\frac{x^{m-1}dx}{1-x^r}-\frac{1}{n-m}\int_0^1\frac{x^{n-1}dx}{1-x^r}=\frac{1}{n-m}\int_0^1\frac{x^{m-1}dx(1-x^{n-m})}{1-x^r}.$$

a) So ist z. B. für $m=1$, $n=3$ und $r=2$:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots=\tfrac{1}{2}\int_0^1 dx=\tfrac{1}{2}(1-0)=\tfrac{1}{2}.$$

b) Für $m=n$ wird man, wenn w eine unendlich kleine Gröſse bezeichnet, $n=m+w$ setzen und dadurch

$$\frac{1}{n-m}\int\frac{x^{m-1}\,dx\,(1-x^{n-m})}{1-x^r}=\frac{1}{w}\int\frac{x^{m-1}\,dx\,(1-x^w)}{1-x^r}$$

$$=\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^r}\,l\left(\frac{1}{x}\right),$$

weil nämlich [Bd. I., §. 127., (3]

$$\frac{1-x^w}{w}=-lx-\tfrac{1}{2}l^2x.w-\frac{1}{2.3}l^3x.w^2-\ldots=-lx=l\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist, erhalten, so daſs man hat:

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+r)^2}+\frac{1}{(m+2r)^2}+\ldots=\int_0^1\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^r}\,l\left(\frac{1}{x}\right).$$

C) Bei den vorigen Beispielen war die Anzahl der im Zähler oder Nenner der Coefficienten von den Potenzen von x vorkommenden Factoren immer gleich groſs; nimmt diese dagegen regelmäſsig zu, so kommt man auf die Integration einer linearen Differentialgleichung, wie das folgende Beispiel zeigt.

Um die Summe der unendlichen Reihe

$$s=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{2.4.6}+\frac{1}{2.4.6.8}+\ldots$$

zu finden, setze man

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.4}+\frac{x^6}{2.4.6}+\ldots;$$

so wird y die gesuchte Summe s seyn, wenn man $x=1$ setzt. Diese Gleichung differentiirt, gibt

$$\frac{dy}{dx}=x\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.4}+\frac{x^6}{2.4.6}+\ldots\right)$$

oder $\frac{dy}{dx}=x(1+y)$, d. i. $dy=x\,dx+xy\,dx$, und endlich

$$dy-yx\,dx=x\,dx,$$

so, daſs die Vergleichung dieser mit der allgemeinen linearen Gleichung in §. 189., $P=-x$ und $Q=x$, folglich $\int P\,dx=-\tfrac{1}{2}x^2$

und [Form (β, §. 189.]

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} [\int e^{-\frac{x^2}{2}} x\, dx + C] = e^{\frac{x^2}{2}} (C - e^{-\frac{x^2}{2}})$$

$$\text{oder} \quad y = C e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

gibt. Für die Bestimmung der Constante C bemerke man, dafs für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn mufs; es wird also

$$0 = C - 1, \text{ d. i. } C = 1, \text{ und daher } y = e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Da endlich für $x = 1$: $y = s$ wird; so hat man für die gesuchte Summe:

$$s = e^{\frac{1}{2}} - 1 = -1 + \sqrt{e},$$

wo (Bd. I., §. 128.) $e = 2{\cdot}7182818 \ldots$ ist.

Genau auf dieselbe Art findet man auch

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots = e - 1.$$

Sehr ausführlich behandelt findet man diesen Gegenstand im dritten Theile des mehrmals erwähnten grofsen Werkes von *Lacroix*.

D) Schlüfslich bemerken wir noch, dafs man eine in vielen Fällen sehr brauchbare Summenformel auf folgendem, hier nur ganz kurz angedeuteten Weg erhalten kann.

Ist z das allgemeine Glied der zu summirenden Reihe und dabei eine Function der Stellenzahl x, nämlich $z = \varphi(x)$; so ist offenbar, wenn S das Summenzeichen darstellt:

$$S(z) = \varphi(x) + \varphi(x-1) + \varphi(x-2) + \ldots + \varphi(2) + \varphi(1)$$

und wenn $\varphi(x-1)$, $\varphi(x-2)$, ... $\varphi[x-(x-1)]$ nach dem *Taylor*'schen Satze entwickelt werden, nach einer einfachen Reduction:

$$S(z) = xz - \frac{dz}{dx} \cdot S(x-1) + \frac{d^2 z}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} \cdot S(x-1)^2$$
$$- \frac{d^3 z}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dx^3} \cdot S(x-1)^3 + \ldots$$

oder, wenn man für $S(x-1)$, $S(x-1)^2$, ... die aus der im ersten Bande, S. 211, gefundenen Formel (2 folgenden Werthe (wo man statt n: $x - 1$, und nach und nach $m = 1, 2, 3, \ldots$ setzt) substituirt und für die auf einander folgenden *Bernoulli*'schen Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, ... die Buchstaben B_1, B_2, B_3, ... schreibt:

$$S(z) = zx - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{d^2 z}{dx^2} \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \ldots$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}.x-\frac{d^2z}{dx^2}.\frac{x^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^3}.\frac{x^3}{2.3}-\ldots\right)$$
$$+\frac{B_1}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}.x-\frac{d^3z}{dx^3}.\frac{x^2}{2}+\ldots\right)$$
$$-\frac{B_2}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4z}{dx^4}.x-\frac{d^5z}{dx^5}.\frac{x^2}{2}+\ldots\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und mit Rücksicht auf die im §. 156. (S. 387) entwickelte *Bernoulli*'sche Integrationsreihe und dem Umstande, daſs die in $\frac{1}{2}$, $\frac{B_1}{1.2}$, $-\frac{B_2}{1.2.3.4}$, u. s. w. multiplicirten Reihen aus der ersten $zx-\frac{dz}{dx}.\frac{x^2}{2}+\ldots$ entstehen, indem man darin z nach und nach mit $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^4z}{dx^4}$, ... vertauscht, endlich:

$$S(z)=\int z\,dx+\tfrac{1}{2}z+\frac{B_1}{1.2}.\frac{dz}{dx}-\frac{B_2}{1.2.3.4}.\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{B_3}{1.2\ldots6}.\frac{d^5z}{dx^5}-\ldots$$

Diese Reihe, welche *Euler* in den *Institutiones Calculi differentialis* (*P.* II., *cap.* 5.) entwickelte, kann auch noch convergirender gemacht und so dargestellt werden:

$$S(z)=Const.+\int X\,dx$$
$$-\frac{2-1}{2}.\frac{B_1}{1.2}.\frac{dX}{dx}+\frac{2^3-1}{2^3}.\frac{B_2}{1.2.3.4}.\frac{d^3X}{dx^3}-\text{etc.},$$

wo $X=\varphi(x+\frac{1}{2})$ aus $z=\varphi(x)$ entsteht, indem man statt x: $x+\frac{1}{2}$ schreibt.

Neuntes Capitel.

Von der Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung, in welcher *höhere* Potenzen von dx und dy vorkommen; dann von den *besondern* oder *partikulären* Auflösungen.

§. 199.

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen zwei Variablen x und y, in welcher höhere Potenzen von dx und dy vorkommen, ist

$$dy^n + P\,dy^{n-1}\,dx + Q\,dy^{n-2}\,dx^2 + \ldots$$
$$+ U\,dy\,dx^{n-1} + V\,dx^n = 0 \ldots (1,$$

oder auch, wenn man durch dx^n dividirt:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^n + P\left[\frac{dy}{dx}\right]^{n-1} + Q\left[\frac{dy}{dx}\right]^{n-2} + \ldots$$
$$+ U\frac{dy}{dx} + V = 0 \ldots (2\ ^*),$$

wobei die Coefficienten P, Q, ... V im Allgemeinen Functionen von x und y sind.

Löst man diese Gleichung in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ auf und bezeichnet die Wurzeln derselben durch α_1, α_2, ... α_n, welche sofort (allgemein genommen) Functionen von x und y seyn werden; so erhält man daraus ein System von n Differentialgleichungen des ersten Grades, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} - \alpha_1 = 0,\ \frac{dy}{dx} - \alpha_2 = 0, \ldots \frac{dy}{dx} - \alpha_n = 0.$$

Diese Differentialgleichungen aber lassen sich nach dem vorigen Capitel behandeln und liefern die Integralgleichungen:

*) Diese Gleichung entsteht auch, wenn man eine zur nten Potenz erhobene Constante aus der ursprünglichen und der daraus abgeleiteten Differentialgleichung eliminirt. (Vergl. §. 29., S. 80.)

$$A_1 = C_1, \; A_2 = C_2, \; \ldots \; A_n = C_n$$

oder

$$B_1 = A_1 - C_1 = 0, \; B_2 = A_2 - C_2 = 0, \ldots B_n = A_n - C_n = 0$$

wobei C_1. C_2, ... C_n die willkürlichen Constanten der Integrationen sind.

Jede dieser n Integralgleichungen $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, .. $B_n = 0$, so wie auch das Product aus einer beliebigen Anzahl derselben, ist sofort ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung (1, welche jetzt auch mit der folgenden

$$\left(\frac{dy}{dx} - \alpha_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - \alpha_2\right) \ldots \left(\frac{dy}{dx} - \alpha_n\right) = 0$$

gleichgeltend ist und welcher also alle jene Gleichungen Genüge leisten, die einen dieser n Factoren auf Null reduciren. Denn nehmen wir z. B. unter den vorhin genannten Integralen $B_1 = 0$, so gibt dieses, wenn man differentiirt:

$$dB_1 = d(A_1 - C_1) = 0, \text{ d. i. } dA_1 = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} - \alpha_1 = 0,$$

eine Differentialgleichung, welche den ersten Factor der gegebenen Gleichung Null macht. Dasselbe gilt offenbar auch von den übrigen Integralen $B_2 = 0$, ... $B_n = 0$.

Nehmen wir ferner aus den möglichen Combinationen durch Multiplication sogleich das Product aller einzelnen Integrale, nämlich

$$B_1 B_2 \ldots B_n = 0 \ldots (m,$$

welches das allgemeinste oder vollständigste Integral der Gleichung (1 seyn wird; so gibt dieses, wenn man differentiirt:

$$B_2 B_3 \ldots B_n \, dB_1 + B_1 B_3 \ldots B_n \, dB_2 + \ldots + B_1 B_2 \ldots B_{n-1} \, dB_n = 0.$$

Da aber die Gleichung (*m* die Bedingung enthält, daſs von den Factoren B_1, B_2, ... B_n jeder der Reihe nach gleich Null seyn soll; so folgt z. B. für jene $B_1 = 0$ aus der letztern Gleichung:

$$B_2 B_3 \ldots B_n \, dB_1 = 0, \text{ oder } dB_1 = 0, \text{ d. i. } dA_1 = 0,$$

$$\text{oder wieder } \frac{dy}{dx} - \alpha_1 = 0;$$

welche Gleichung sofort der ursprünglichen Genüge leistet.

Dasselbe gilt, wenn man irgend einen andern Factor der Gleichung (m gleich Null setzt.

Wir wollen das hier Vorgetragene durch ein einfaches Beispiel erläutern.

§. 200.

Beispiel.

Es sey die Differentialgleichung des zweiten Grades

$$dy^2 - a^2 dx^2 = 0 \ldots (a$$

gegeben; so folgt daraus

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 - a^2 = 0,$$

und wenn man diese Gleichung auflöst:

$$\left(\frac{dy}{dx} + a\right)\left(\frac{dy}{dx} - a\right) = 0.$$

Man erhält nämlich das System der beiden Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} - a = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} + a = 0$$

$$\text{oder } dy - a\,dx = 0 \text{ und } dy + a\,dx = 0.$$

Diese beiden einfachen Gleichungen integrirt, geben

$$y - ax = C \text{ und } y + ax = C';$$

es sind also sowohl diese beiden Gleichungen $y - ax - C = 0$, $y + ax - C' = 0$, so wie auch jene

$$(y - ax - C)(y + ax - C') = 0,$$

Integralgleichungen der gegebenen Differentialgleichung (a. Von den beiden erstern Gleichungen ist dieses für sich klar; die letztere aber gibt, wenn man differentiirt:

$$(y - ax - C)(dy + a\,dx) + (y + ax - C')(dy - a\,dx) = 0,$$

und daraus folgt:

$$dy = \frac{a(2ax + C - C')}{2y - (C + C')}\,dx.$$

Setzt man nun in diesem Ausdrucke für y seine Werthe $ax + C$ und $-ax + C'$, so erhält man beziehungsweise:

$$dy = \frac{a(2ax + C - C')}{2ax + C - C'} dx = a\,dx$$

$$\text{und } dy = \frac{a(2ax + C - C')}{-2ax - (C - C')} dx = -a\,dx,$$

nämlich $dy - a\,dx = 0$ und $dy + a\,dx = 0$; welche Gleichungen offenbar der gegebenen Differentialgleichung (α Genüge leisten *).

§. 201.

Da das hier vorgetragene Verfahren der Integration von der Auflösung der höhern Gleichungen abhängt; so läſst sich dasselbe, wie leicht zu erachten, nicht allgemein durchführen. Es gibt einige besondere Fälle, in welchen man diese Auflösung umgehen kann, und davon wollen wir ganz kurz das Wesentlichste anführen.

1. Sind die Differentialcoefficienten P, Q, ... V der gegebenen Differentialgleichung (1 (§. 199.) sämmtlich constante Gröſsen; so läſst sich diese Gleichung sehr leicht integriren. Denn da in diesem Falle, wie die Gleichung (2, §. 199. zeigt (indem die Wurzeln derselben Functionen dieser Coefficienten sind) der Quotient $dy : dx$, welchen wir durch p bezeichnen wollen, ebenfalls constant ist; so hat man aus

$$\frac{dy}{dx} = p: \quad y = px + C, \text{ also } p = \frac{y - C}{x},$$

so, daſs man diesen Werth von p oder $\frac{dy}{dx}$, nur in der gegebenen Differentialgleichung substituiren darf, um sofort die gesuchte Integralgleichung zu erhalten.

Beispiel.

Es sey

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + b = 0$$

*) Die geometrische Bedeutung der hier gefundenen drei Integralgleichungen ist für sich verständlich; die beiden erstern stellen jede eine gerade Linie dar, welche gegen die Abscissenaxe gleich, nur nach entgegengesetzten Richtungen geneigt sind; die letztere aber enthält das System dieser beiden Geraden vereint.

die gegebene Differentialgleichung; so ist, wenn man für $\frac{dy}{dx}$ den vorhin gefundenen Werth $\frac{y-C}{x}$ substituirt:

$$(y - C)^2 - 2ax(y - C) + bx^2 = 0$$

die gesuchte Integralgleichung *).

§. 202.

2. Enthalten die genannten Coefficienten P, Q, ... V nur eine der beiden Variablen, z. B. x, und läſst sich die gegebene Differentialgleichung leichter nach x, als nach p auflösen; so wird man daraus x bestimmen und dadurch eine Gl. $x = f(p)$ erhalten. Aus $\frac{dy}{dx} = p$ folgt ferner $dy = p\,dx$ und $y = \int p\,dx = px - \int x\,dp$ [§. 124., (α)], oder

$$y = pf(p) - \int f(p)\,dp \;\ldots\; (n.$$

Läſst sich nun dieses Integral finden, so wird man dann aus dieser und der Gleichung $x = f(p)$, p eliminiren und dadurch eine Gleichung zwischen x, y und der willkürlichen Constante C der Integration, als gesuchte Integralgleichung erhalten. [Ist $f(p)$ eine vielförmige oder vieldeutige Function, so muſs man diese Elimination in Absicht auf jeden ihrer Werthe vornehmen.]

*) Es folgt in der That aus dieser Gleichung:

$$y - C = ax + x\sqrt{(a^2 - b)},$$

und wenn man differentiirt:

$$dy = a\,dx + dx\sqrt{(a^2 - b)},$$

oder auch $dy^2 - 2a\,dy\,dx = -b\,dx^2$,

und daraus wieder die gegebene Differentialgleichung:

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + b = 0.$$

Eben so wird auch für die Differentialgleichung (α des vorigen Paragr. $dy^2 - a^2 dx^2 = 0$ ganz einfach:

$$p^2 - a^2 = 0, \text{ oder } \left(\frac{y - C}{x}\right)^2 - a^2 = 0,$$

nämlich $(y - C)^2 - a^2 x^2 = 0$, oder $y = \pm ax + C$; welche Gleichung wieder ein System von zwei geraden Linien darstellt, die gegen die Abscissenaxe gleiche, aber entgegengesetzte Neigungen besitzen.

Beispiel.

Ist

$$x\,dx + a\,dy = b\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

die gegebene Differentialgleichung, so folgt für $\frac{dy}{dx} = p$:

$$x + ap = b\sqrt{(1 + p^2)},$$

und daraus:

$$r)\quad x = -ap + b\sqrt{(1+p^2)}\,[x = f(p)].$$

Man hat also nach der obigen Gleichung (n:

$$y = -ap^2 + bp\sqrt{(1+p^2)} + \int[ap\,dp - b\,dp\sqrt{(1+p^2)}]$$

oder wegen $\int ap\,dp = \frac{1}{2}ap^2$ und [§. 131., (m]

$$\int -b\,dp\sqrt{(1+p^2)} = -\tfrac{1}{2}bp\sqrt{(1+p^2)} - \tfrac{1}{2}b\,l[p + \sqrt{(1+p^2)}]$$

auch

$$y = -\tfrac{1}{2}ap^2 + \tfrac{1}{2}bp\sqrt{(1+p^2)} - \tfrac{1}{2}b\,l[p + \sqrt{(1+p^2)}]\,C,$$

wenn man nämlich der willkürlichen Constante die Form $-\frac{1}{2}b\,lC$ gibt.

Eliminirt man endlich aus dieser letztern und der Gleichung r) die Gröſse p, so erhält man ohne Schwierigkeit, wenn Kürze halber $a^2 - b^2 = \alpha^2$ gesetzt und der Factor $\frac{1}{a-b}$ mit der Constante C vereinigt wird:

$$2\alpha^2 y = -ax^2 \pm bx\sqrt{(\alpha^2 + x^2)} - b\alpha^2 l\,C[-x \pm \sqrt{(\alpha^2 + x^2)}]$$

als gesuchte Integralgleichung.

§. 203.

3. Sind zwar die Coefficienten $P, Q, \ldots V$ Functionen von beiden Variablen, kommt aber eine davon, z. B. x bloſs in der ersten Potenz vor; so wird man die gegebene Gleichung (2 (§. 199.) nach x auflösen und sofort eine Gleichung von der Form $x = f(y, p)$, so wie daraus wieder durch Differentiation jene $dx = R\,dy + S\,dp$, wo R und S Functionen von y und p sind, erhalten, aus welcher Gleichung, wegen $dy = p\,dx$, auch

$$(Rp - 1)\,dx + S\,dp = 0$$

folgt. Läſst sich nun diese letztere Gleichung integriren, so erhält man dadurch eine Gleichung zwischen x, p und

einer willkürlichen Constante; eliminirt man dann aus dieser und der gegebenen Differentialgleichung die Gröſse p, so erhält man die verlangte Integralgleichung.

Kommt dagegen y nur in der ersten Potenz vor, so erhält man genau eben so:

$$y = f(x, p) \text{ und daraus } dy = R' dx + S' dp,$$

oder wegen $dy = p\,dx$:

$$(R' - p)\,dx + S'\,dp = 0;$$

dabei ist das weitere Verfahren dem vorigen gleich.

Beispiel.

Für die gegebene Differentialgleichung

$$y\,dx - x\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0$$

folgt unmittelbar

$$y = x\sqrt{(1+p^2)} \text{ und daraus } dy = \sqrt{(1+p^2)}.dx + \frac{px\,dp}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

oder, wegen $dy = p\,dx$:

$$[-p + \sqrt{(1+p^2)}]\,dx + \frac{px}{\sqrt{(1+p^2)}}\,dp = 0,$$

oder auch, wie leicht zu sehen:

$$\frac{dx}{x} + p\,dp + \frac{p^2\,dp}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0.$$

Diese Gleichung integrirt, gibt [§. 125., (A' und hierauf §. 131., (m]

$$lx + \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+p^2)} - \tfrac{1}{2}l[p + \sqrt{(1+p^2)}] + C = 0.$$

Um nun aus dieser und der gegebenen Gleichung p zu eliminiren, hat man aus der gegebenen:

$$p^2 = \frac{y^2 - x^2}{x^2} \text{ oder } p = \frac{\sqrt{(y^2 - x^2)}}{x}$$

und wenn dieser Werth in der letzten Gleichung substituirt wird:

$$lx + \frac{y^2 - x^2}{2x^2} + \frac{\sqrt{(y^2 - x^2)}}{2x}.\frac{y}{x} - \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\sqrt{(y^2 - x^2)}}{x} + \frac{y}{x}\right) + C' = 0,$$

oder auch

$$\frac{y^2 - x^2 + y\sqrt{(y^2 - x^2)}}{x^2} + lx[y - \sqrt{(y^2 - x^2)}] = C$$

als gesuchte Integralgleichung.

§. 204.

4. Erscheint in der gegebenen Differentialgleichung von beiden Variablen x, y nur die erste Potenz; so hat diese die Gestalt

$$y = x\varphi(p) + f(p)$$

und ist sonach von der Form der sogenannten linearen Differentialgleichungen, welche sofort nach §. 189. behandelt werden kann.

Für den einfachen Fall, dafs $\varphi(p) = p$, also die gegegebene Gleichung von der Form

$$y = px + f(p) \ldots (\alpha$$

ist, erhält man, wenn man differentiirt:

$$dy = p\,dx + \left[x + \frac{d.f(p)}{dp}\right] dp,$$

oder wegen $dy = p\,dx$:

$$\left[x + \frac{d.f(p)}{dp}\right] dp = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

$$x + \frac{d.f(p)}{dp} = 0 \text{ und } dp = 0,$$

aus welcher letztern durch Integration $p = c$, d. i. $dy = c\,dx$ und daraus wieder

$$y = cx + c' \ldots (\beta$$

folgt. Um von den Constanten c, c', die hier nicht beide willkürlich sind, eine zu bestimmen, setze man in der gegebenen Differentialgleichung den gefundenen Werth $p = c$; so erhält man $y = cx + C$, wo C den Werth von $f(p)$ für $p = c$ bezeichnet. Diese Gleichung aber mit der vorigen (β verglichen, gibt sofort $c' = C$, so, dafs also aus der gegebenen Gl. (α die gesuchte Integralgleichung

$$y = cx + f\binom{p}{c} \ldots (\gamma$$

entsteht, wenn man statt p: c schreibt.

Eben so würde die zweite Gleichung $x + \frac{d.f(p)}{dp} = 0$ zu einem Integral der gegebenen Gleichung führen, wenn man aus diesen beiden eben genannten Gleichungen p eli-

minirte; da jedoch dabei keine weitere Constante eingeführt wird, so würde man dadurch nur eine besondere Auflösung, von welcher bald die Rede seyn soll, erhalten.

Beispiel.

Ist die Differentialgleichung gegeben:

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

so folgt

$$m) \ldots y = px + a\sqrt{(1 + p^2)},$$

und wenn man diese letztere Gleichung differentiirt:

$$dy = p\,dx + \left(x + \frac{ap}{\sqrt{[1 + p^2]}}\right) dp,$$

oder wegen $dy = p\,dx$ auch

$$\left(x + \frac{ap}{\sqrt{[1 + p^2]}}\right) dp = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt ferner:

$$x + \frac{ap}{\sqrt{(1 + p^2)}} = 0 \text{ und } dp = 0;$$

die letztere dieser beiden Gleichungen integrirt, gibt $p = c$, also ist [aus m) nach (γ] das gesuchte Integral:

$$y = cx + a\sqrt{(1 + c^2)}.$$

Die erstere der eben genannten Gleichungen würde geben:

$$p = \frac{\pm x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \text{ und } \sqrt{(1 + p^2)} = -\frac{ap}{x} = \mp \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

und wenn man diese Werthe in die gegebene Gleichung (m) substituirt:

$$y = \frac{\pm x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}, \text{ oder } y = \mp \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

und daraus auch

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Diese Gleichung, welche keine willkürliche Constante enthält und durchaus nicht in dem Integrale $y = cx + a\sqrt{(1 + c^2)}$ begriffen ist, ist nichts desto weniger so beschaffen, daſs die daraus abgeleiteten Werthe von y und dy der gegebenen Differentialgleichung, wie man

sich leicht überzeugt, Genüge leisten; diese Gleichung bildet (wie wir im zweit folgenden Paragraphe sehen werden) eine sogenannte besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung.

§. 205.

5. Ist die gegebene Differentialgleichung in Bezug auf x und y homogen, so kann man $y = xz$ setzen; dadurch fällt x aus der Gleichung ganz heraus, und man hat nur noch eine Gleichung zwischen p und z. Da ferner $dy = xdz + zdx$, mithin $p = \frac{dy}{dx} = \frac{xdz}{dx} + z$ ist, so folgt

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z}, \quad \text{also} \quad 1)\ lx = \int \frac{dz}{p-z};$$

und auch, wegen $\frac{dz}{p-z} = \frac{d(z-p)}{p-z} + \frac{dp}{p-z}$:

$$2)\quad lx = -\,l(p-z) + \int \frac{dp}{p-z}.$$

Von diesen beiden Ausdrücken 1), 2) wird man den erstern oder letztern anwenden, je nachdem es im betreffenden Falle leichter ist, p durch z, oder z durch p auszudrücken; im ersten Falle erscheint nach vollendeter Integration x durch z, und im letzten Falle durch p ausgedrückt, oder man erhält beziehungsweise $x = f(z)$ und $x = F(p)$. Da nun ferner $y = xz$ ist, so gibt die Elimination von z daraus und der erstern Gleichung $x = f(z)$, so wie im zweiten Falle, in welchem $z = \varphi(p)$ ist, die Elimination von p aus der vorigen Gleichung $y = xz = x\varphi(p)$ und der zweiten $x = F(p)$, die gesuchte Integralgleichung zwischen x, y und einer willkürlichen Constante.

Beispiel.

Um die homogene Differentialgleichung

$$x\,dy - y\,dx = x\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

auf diese Weise zu integriren, hat man für $y = xz$, wenn man gleich durch dx dividirt:

$$xp - xz = x\sqrt{(1+p^2)}, \text{ d. i. } p - z = \sqrt{(1+p^2)}.$$

Da es hier offenbar einfacher ist, z durch p auszudrücken, so ist nach der zweiten Formel 2):

$$lx = -l\sqrt{(1+p^2)} + \int \frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)}}$$
$$= -l\sqrt{(1+p^2)} + l[p+\sqrt{(1+p^2)}] + lC,$$

oder $lx = l\left\{\frac{C[p+\sqrt{(1+p^2)}]}{\sqrt{(1+p^2)}}\right\}$, also $x = \frac{C[p+\sqrt{(1+p^2)}]}{\sqrt{(1+p^2)}} \ldots (m$

und $y = xz = x[p-\sqrt{(1+p^2)}]$, oder, wenn man für x substituirt, auch

$$y = \frac{-C}{\sqrt{(1+p^2)}} \ldots (n.$$

Um endlich aus den beiden Gleichungen (m und (n die Gröſse p zu eliminiren, hat man aus der letztern:

$$\sqrt{(1+p^2)} = -\frac{C}{y} \text{ und } p = \frac{\sqrt{(C^2-y^2)}}{y};$$

diese Werthe in der Gleichung (m substituirt, geben sofort ganz einfach

$$x = C - \sqrt{(C^2-y^2)},$$

und daraus erhält man:

$$x^2 + y^2 = 2Cx,$$

als gesuchte Integralgleichung.

Von den *besondern* oder *particulären Auflösungen.*

§. 206.

Jedes vollständige Integral einer gegebenen Differentialgleichung enthält (§. 157.) eine willkürliche Constante, welche durch die Differentiation wieder wegfällt. Man mag also dieser Constanten was immer für Werthe beilegen, d. h. aus dem vollständigen Integral noch so viele besondere oder particuläre Integrale ableiten; so entsprechen sie sämmtlich der gegebenen Differentialgleichung. Es lassen sich aber noch auſserdem öfters Gleichungen auffinden, welche der gegebenen Differentialgleichung ebenfalls Genüge leisten und dennoch durchaus nicht aus dem vollständigen Integral abgeleitet werden können,

oder in demselben als **besondere** Integrale enthalten sind; Gleichungen von dieser Beschaffenheit werden **besondere** oder **particuläre Auflösungen** der gegebenen Differentialgleichung genannt und dürfen nicht mit den **besondern** oder **particulären Integralen** derselben verwechselt werden *).

So haben wir im §. 204. für die Differentialgleichung

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)} \quad \ldots (1$$

als vollständiges Integral gefunden:

$$y = cx + a\sqrt{(1+c^2)} \quad \ldots (2,$$

aus welchem sich sofort unzählige besondere Integrale, welche sämmtlich der gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten, ableiten lassen, indem man der willkürlichen Constante c nach und nach alle möglichen Werthe beilegt. Nichtsdestoweniger sind wir auch auf die Gleichung gekommen:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \ldots (3,$$

welche der gegebenen Differentialgleichung (1 ebenfalls entspricht und doch kein besonderes Integral ist, indem dieselbe für gar keinen Werh von c aus dem vollständigen Integral (2 abgeleitet werden kann; diese Gleichung (3 bildet sonach eine **besondere Auflösung** der obigen Differentialgleichung (1 **).

*) *Euler* war der erste, welcher hierauf aufmerksam machte; auch suchte er eine Regel, nach welcher man erkennet, ob eine vorliegende Gleichung eine particuläre Auflösung einer gegebenen Differentialgleichung, deren allgemeines Integral unbekannt ist, sey oder nicht (m. s. *Euler's* Integralrechn. Bd. I., Abschn. 2., Cap. IV.). Später sah man, daſs die besondern Auflösungen von der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen abhängen und diese letztern vervollständigen (m. s. *Lagrange's* Vorles. über die Functionenrechnung, vierzehnte Vorles.).

**) Um diesen wichtigen Punct mehr zu erläutern, wollen wir setzen: es sey eine Curve SMQ (Fig. 18) von der Beschaffenheit zu finden, daſs alle von einem gegebenen Punct A auf ihre Tangenten MT gefällten Perpendikel AD einer bestimmten Geraden a gleich werden.

Fig. 18.

Man hat, wenn dieser Punct A zum Ursprung der rechtw. Coordinaten genommen und für einen beliebigen Punct M der gesuchten Curve, $AP = x$ und $PM = y$ gesetzt wird (§. 44.)

§. 207.

Um nun eine Regel für die Auffindung der besondern Auflösungen einer gegebenen Differentialgleichung abzuleiten, wollen wir diese letztere, die wir beständig von der ersten Ordnung voraussetzen, wenn sie auch von einem

Subt. $PT = y\frac{dx}{dy}$, also $AT = y\frac{dx}{dy} - x$;

Subnorm. $PN = y\frac{dy}{dx}$, Norm. $MN = y\frac{ds}{dx}$,

und $NT = PT + PN = y\frac{dx}{dy} + y\frac{dy}{dx} = y\frac{ds^2}{dx\,dy}$.

Es ist also wegen $AD : AT = MN : NT$ (wie aus den ähnlichen Dreiecken ADT und NMT folgt):

$$a : (y\frac{dx}{dy} - x) = y\frac{ds}{dx} : y\frac{ds^2}{dx\,dy}$$

und daraus

$a\,ds = y\,dx - x\,dy$, d. i. $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$,

so, daſs also die Auflösung dieser Aufgabe auf die obige Differentialgleichung (1 führt, deren Integral (2 sofort die verlangte Auflösung enthält. Diese genannte Integralgleichung

$$y = cx + a\sqrt{(1 + c^2)}$$

ist aber (Bd II., §. 12.) die Gleichung einer geraden Linie, für welche die trigon. Tangente des Neigungswinkels $\alpha = c$ ist, und welche die Ordinatenaxe in einem Puncte schneidet, dessen Ordinate den Werth $a\sqrt{(1 + c^2)} = a\,sec.\,\alpha$ besitzt. Da nun c eine willkürliche Constante bezeichnet, so gibt es sofort unendlich viele solcher geraden Linien von der verlangten Eigenschaft; man findet diese, indem man aus dem gegebenen Puncte A nach beliebigen Richtungen gerade Linien AD zieht, jede derselben $= a$ abschneidet und durch die entstehenden Endpuncte D auf jede eine Gerade DT perpendikulär stellt. Denn die Gleichung einer dieser Geraden AD ist $y = bx$; ihr Endpunct hat die Coordinaten:

$$x = a\,cos.\,\alpha = \frac{a}{\sqrt{(1 + b^2)}} \text{ und } y = a\,sin.\,\alpha = \frac{ab}{\sqrt{(1 + b^2)}}$$

(wegen $b = tang.\,\alpha$); folglich ist die Gleichung der durch diesen Punct D auf AD perpendikulären Geraden (Bd. II., §. 14., Aufg. 6.):

$$y - \frac{ab}{\sqrt{(1 + b^2)}} = -\frac{1}{c}\left(x - \frac{a}{\sqrt{[1 + b^2]}}\right)$$

und daraus erhält man ganz einfach $x + by = a\sqrt{(1 + b^2)}$, oder, wenn man (da b und c ganz willkürlich sind)

$$c = -\frac{1}{b}, \text{ d. i. } b = -\frac{1}{c}$$

höhern, als dem ersten Grade seyn sollte, durch

$$W = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

das derselben entsprechende vollständige Integral (nach *Lagrange* die vollst. primitive Gleich.) mit

$$U = f(x, y, c) = 0,$$

wobei c die willkürliche Constante der Integration ist, und endlich die wieder hieraus unmittelbar durch Differentiation abgeleitete Differentialgleichung, durch

$$V = \left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = 0,$$

bezeichnen. Erscheint nun die willkürliche Constante c in dem vollständigen Integral $U = 0$ nicht blofs als additives oder subtractives Glied, so ist diese auch noch in der Differentialgleichung $V = 0$ enthalten, und es entsteht sofort die gegebene Differentialgleichung $W = 0$ erst durch die Elimination von c aus diesen Gleichungen $U = 0$ und $V = 0$ (§. 193.). Es wird aber offenbar das Ergebnifs dieser Elimination, oder $W = 0$, dasselbe seyn, man mag dabei c als eine constante oder als eine variable Gröfse ansehen; wenn nur dadurch, dafs man c als veränderlich ansieht, die Differentialgleichung $V = 0$ ungeändert oder die nämliche bleibt. Bezeichnet man also das aus der Gleichung $U = 0$ in dem Sinne abgeleitete Differential, dafs auch c als veränderlich angesehen wird, durch

setzt, die vorige Gleichung:

$$y = cx + a\sqrt{(1 + c^2)} \ldots (2.$$

Es wird nun offenbar die gesuchte Curve aus den Durchschnitten dieser sämmtlichen Geraden MDT gebildet, die sonach ein Kreis vom Halbmesser a ist, dessen Mittelpunct in A liegt und dessen Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \ldots (3$$

sofort die oben gefundene besondere Auflösung der Gleichung (1 liefert. Diese auf einander folgenden Geraden (2 bilden den geom. Ort für alle particulären Integrale der Differentialgl. (1, und der Kreis (3, welcher eine besondere Auflösung derselben ist, berührt alle diese Geraden.

$$V' = \left(\frac{dU}{dx}\right)dx + \left(\frac{dU}{dy}\right)dy + \left(\frac{dU}{dc}\right)dc = o,$$

so wird V nur dann durch diese Annahme (dafs c veränderlich seyn soll) nicht geändert, wenn $V' = V$, d. i. $\left(\frac{dU}{dc}\right)dc = o$ ist. Es sind daher, wenn wir den gewöhnlichen Fall der Integration, in welchem c constant, also $dc = o$ ist, gleich ausscheiden, alle aus der Bedingungsgleichung $\left(\frac{dU}{dc}\right) = o$ abgeleiteten Werthe von c, welche im Allgemeinen Functionen von x und y seyn werden, so beschaffen, dafs, wenn sie in der Gleichung $U = o$ substituirt werden, diese Gleichung sofort der gegebenen Differentialgleichung $W = o$ Genüge leistet (weil diese immer noch durch Elimination von c aus $U = o$ und $V' = V = o$ resultirt). Da aber jetzt die Gleichung $U = o$ keine willkürliche Constante mehr enthält, und zugleich auch so beschaffen ist, dafs diese für keinen Werth von c aus dem vollständigen Integral $U = f(x, y, c) = o$, wo c nur constante Werthe zuläfst, abgeleitet werden kann oder in diesem begriffen ist; so ist diese, allgemein genommen, eine besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung $W = o$ *).

*) In geometrischer Hinsicht stellt das vollständige Integral, weil die Constante willkürlich ist, eine unendliche Reihe von auf einander folgenden Curven dar, welche eine von der andern durch den Parameter c, der sehr nahe auf einander folgende Werthe erhalten kann, verschieden sind. Diese Folge von Curven, davon jede ein particuläres Integral darstellt, schneiden sich je zwei, und die Reihe dieser auf einander folgenden Durchschnittspuncte bildet eine (oder liegen in einer) Curve, welche die erstern sämmtlich berührt. Bei jeder dieser letztgenannten Curven (welche berührt werden) ist der Parameter c durchaus constant, während bei der berührenden Curve, c eine Function von den Coordinaten der Berührungspuncte ist. Die Tangente $\frac{dy}{dx}$ hat also in diesen Puncten denselben Werth für die berührten, wie für die berührende Curve; daraus folgt, dafs $\frac{dy}{dx}$ denselben Werth beibehalten mufs, man mag c als constant oder als variabel ansehen, und dafs also das

Damit jedoch diese letztere Gleichung $U = o$ wirklich eine besondere Auflösung darbiethe, darf erstens der aus der Bedingungsgleichung $\left(\frac{dU}{dc}\right) = o$, für c gefundene Werth nicht constant seyn, weil dafür $U = o$ nur ein besonderes oder particuläres Integral wäre; zweitens darf auch c, wenn es schon als Function von x und y gefunden wurde, nicht so beschaffen seyn, dafs dadurch $f(x, y, c) = o$ einen Werth bekömmt, der auch erhalten werden kann, indem man für c einen gewissen constanten Werth setzt. Diesen letztern Fall kann man aber erkennen, wenn man aus der für c gefundenen Gleichung $c = \varphi(x, y)$ und jener $U = o$, eine der beiden Variablen x oder y eliminirt und nachsieht, ob nicht auch zugleich die zweite Variable herausfällt, also dadurch für c ein constanter Werth, z. B. $c = A$ entsteht; geschieht dieses, so gibt $c = \varphi(x, y)$ in $U = o$ substituirt, oder was dasselbe ist, die durch die Elimination von c aus den Gleichungen $U = o$ und $\left(\frac{dU}{dc}\right) = o$ entstehende Gleichung, nur ein particuläres Integral, und zwar jenes, welches man auch aus $U = o$ für $c = A$ erhalten würde *).

Ergebnifs der Elimination von c aus $f(x, y, c) = o$ und $\left(\frac{dU}{dc}\right) = o$ zugleich auch die Gleichung jener Curve ist, welche alle jene berührt, die der Reihe nach für die auf einander folgenden Werthe von c, aus dem vollständigen Integral entstehen.

*) Wäre z. B. $y - (ax + b)c = o$ das allgemeine oder vollständige Integral ($U = o$) und aus der Gleichung

$$\left(\frac{dU}{dc}\right) = o, \quad c = \frac{y - \beta}{ax},$$

also als Function von x und y $[c = \varphi(x, y)]$ gefunden worden; so würde dieser Werth von c in der ersten Gleichung substituirt:

$$y - \frac{(ax + b)(y - \beta)}{ax} = o \quad \text{oder} \quad y = \frac{a\beta}{b}x + \beta$$

nämlich einen Werth für y geben, welcher offenbar auch aus dem vollständigen Integral für $c = \frac{\beta}{b}$ erhalten wird, so,

Erscheint c in der Gleichung $U = o$ nur in der ersten Potenz, so ist in jener $\left(\frac{dU}{dc}\right) = o$ die Gröfse c nicht mehr enthalten, und dann ist diese letztere Gleichung $\left(\frac{dU}{dc}\right) = o$ selbst ein Integral von $W = o$. Denn bezeichnen P und Q jede eine Function von x und y, so kann man in diesem Falle setzen: $U = P + cQ = o$; dadurch wird aber $V = dP + c\,dQ = o$, und wenn man aus den beiden letzten Gleichungen c eliminirt, auch $W = Q\,dP - P\,dQ = o$; und es ist sonach leicht zu sehen, dafs die Gleichung $\left(\frac{dU}{dc}\right) = Q = o$, weil sie auch noch jene $dQ = o$ zur Folge hat, der Differentialgleichung $W = o$ Genüge leistet. Da aber ferner aus der Gleichung $U = o$: $Q = -\frac{P}{c}$, folglich ebenfalls $Q = o$ wird, wenn man $c = \infty$ setzt; so folgt, dafs die Gleichung $Q = o$ nur ein particuläres Integral ist, welches aus dem vollständigen $U = o$ für $c = \infty$ entsteht.

§. 208.

Beispiele.

1) Wenden wir das im vorigen Paragraphe Vorgetragene sogleich wieder auf die obige (im §. 204. aufgestellte) Differentialgleichung

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)} \quad . \; . \; . \; (1$$

an, deren vollständiges Integral

$$2) \; . \; . \; y = cx + a\sqrt{(1 + c^2)}, \; [U = -y + cx + a\sqrt{(1 + c^2)} = o]$$

dafs also $y = \frac{a\beta}{b}x + \beta$ keine besondere Auflösung, sondern nur ein besonderes Integral gibt.

Eliminirt man nun aus den Gl. $y - (ax + b)\,c = o$ und $c = \frac{y - \beta}{ax}$ oder $y - acx - \beta = o$ z. B. die Variable y, so erhält man $acx + bc = acx + \beta$, d. i. $bc = \beta$, so, dafs also dadurch auch die andere Variable x herausfällt und sofort in der That $c = \frac{\beta}{b}$ $(c = A)$ constant wird.

gefunden wurde; so erhalten wir

$\left(\frac{dU}{dc}\right) = x + \frac{ac}{\sqrt{(1+c^2)}} = 0$, und daraus $c = \frac{\pm x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$,

wobei jedoch, da $x + \frac{ac}{\sqrt{(1+c^2)}} = 0$ seyn mufs, nur das untere Zeichen — gelten kann. Mit diesem Werthe von c aber verwandelt sich die Gleichung $y = cx + a\sqrt{(1+c^2)}$ in die folgende:

$$y = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

welche sofort $x^2 + y^2 = a^2$ gibt. Diese Gleichung nun, welche keine willkürliche Constante enthält und der gegebenen Differentialgleichung Genüge leistet, auch für gar keinen Werth von c aus dem vollständigen Integral 2) entstehen kann, bildet sonach eine besondere Auflösung der Gleichung (1 [und löset daher das in der Note zu §. 206. angeführte geometrische Problem auf, weil sie der Differentialgleichung (1 für jeden Werth von $c = \frac{dy}{dx}$ Genüge leistet] *).

2) Für die Differentialgleichung

$$dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}}$$

findet man als vollständiges Integral:

$$y + c = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)},$$

oder wenn man quadrirt:

$$y^2 + c^2 + 2cy = x^2 + y^2 - a^2,$$

$$\text{d. i. } x^2 - 2cy - a^2 - c^2 = 0 \quad (U = 0).$$

Diese Gleichung nach c differentiirt und durch dc dividirt, gibt:

$$-2y - 2c = 0 \left[\left(\frac{dU}{dc}\right) = 0\right], \text{ also } c = -y;$$

wird endlich dieser Werth von c in das vollständige oder

*) Alle Differentialgleichungen von der Form $y = px + P$ (s. § 204.), wozu die eben behandelte gehört, geben mit der obigen analoge besondere Auflösungen. *Clairaut* (geb. zu Paris 1713; gest. 1765) war der erste, welcher dieses bemerkte.

allgemeine Integral ($U = 0$) substituirt, so erhält man:

$$0 = x^2 + y^2 - a^2, \text{ oder } x^2 + y^2 = a^2;$$

welche Gleichung, wie man sich leicht überzeugt, eine besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung ist.

3) Es sey endlich noch

$$(x^2 + y^2 - a^2)(y^2 - 2cy) + (x^2 - a^2)c^2 = 0$$

die primitive Gleichung ($U = 0$); so folgt, wenn diese nach c differentiirt wird:

$$-(x^2 + y^2 - a^2)y + c(x^2 - a^2) = 0, \quad \left[\left(\frac{dU}{dc}\right) = 0\right],$$

und daraus

$$c = \frac{(x^2 + y^2 - a^2)y}{x^2 - a^2}.$$

Dieser Werth für c in der ersten Gleichung [die sich auch so darstellen läfst: $\frac{(x^2 + y^2 - a^2)y^2}{x^2 - a^2} - \frac{2cy(x^2 + y^2 - a^2)}{x^2 - a^2} + c^2 = 0$] substituirt, gibt:

$$\frac{(x^2 + y^2 - a^2)y^2}{x^2 - a^2}\left(1 - \frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 - a^2}\right) = 0, \text{ d. i. } \frac{y^4(x^2 + y^2 - a^2)}{(x^2 - a^2)^2} = 0,$$

und daraus folgen die Gleichungen

$$y = 0 \text{ und } x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Da man aber dieselben Werthe auch aus der ursprünglichen Gleichung (dem vollständigen Integral) für $c = 0$ erhält, so bilden diese keine besondern Auflösungen, sondern blofs particuläre Integrale.

§. 209.

Für den Fall, dafs in dem allgemeinen oder vollständigen Integral die willkürliche Constante c getrennt erscheint, also $U = f(x, y, c) = 0$ die Form $\varphi(x, y) = c$ hat, ist die angeführte Regel, zur Auffindung der besondern Auflösungen, unbrauchbar; denn man hat

$$U = \varphi(x, y) - c = 0, \text{ und daher } \left(\frac{dU}{dc}\right) = -1,$$

was zu nichts führt.

Um nun auch für diesen Fall ein Verfahren zur Ent-

wicklung der besondern Auflösungen aufzufinden, bemerke man, daſs, wenn aus der Gleichung $U = f(x, y, c) = 0$, der Werth $c = \varphi(x, y)$ gesucht und sofort wieder in diese nämliche Gleichung zurück substituirt wird (gleichsam, als wollte man die Rechnungsprobe machen), diese letztere indentisch Null werden, also für jeden Werth von x bestehen muſs. Aus diesem Grunde werden auch die daraus nach x, y u. s. w. durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen, ebenfalls identisch Null seyn, d. i. man wird haben:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) dx = 0, \quad \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dU}{dy}\right) = 0;$$

es werden sich nämlich diese Glieder, für jeden Werth von x, ohne daſs also über x etwas ausgesprochen wird, von selbst aufheben.

Es ist aber, wenn man wieder, Kürze halber, c stehen läſst und nur berücksichtiget, daſs c wegen $c = \varphi(x, y)$, sowohl eine Function von x, als auch von y ist [§. 24., (1]:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = \left[\frac{dU}{dx}\right]^{*)} + \left(\frac{dU}{dc}\right)\left(\frac{dc}{dx}\right)$$

und $$\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left[\frac{dU}{dy}\right] + \left(\frac{dU}{dc}\right)\left(\frac{dc}{dy}\right);$$

*) Hier soll unter $\left[\frac{dU}{dx}\right]$ der Differentialquotient von U nach x, insofern sich x auſserhalb c (d. i. nicht in c enthalten) befindet, verstanden werden; dasselbe gilt auch für $\left[\frac{dU}{dy}\right]$.

Ist z. B. $U = x^2 + 2c^3$, wobei $c = x + y$; so ist

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = 2x + 2\frac{d(x+y)^3}{dx} = 2x + 6(x+y)^2.$$

Man gelangt aber auch zu demselben Resultat mittelst der Relation:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = \left[\frac{dU}{dx}\right] + \left(\frac{dU}{dc}\right)\left(\frac{dc}{dx}\right),$$

weil der vorigen Bemerkung zufolge,

$\left[\frac{dU}{dx}\right] = 2x$ und ferner $\left(\frac{dU}{dc}\right)\left(\frac{dc}{dx}\right) = 6c^2.1 = 6(x+y)^2$ ist.

da nun der vorigen Bemerkung gemäſs, diese Ausdrücke gleich Null sind, so folgt:

$$\left(\frac{dc}{dx}\right) = -\left[\frac{dU}{dx}\right] : \left(\frac{dU}{dc}\right) \text{ und } \left(\frac{dc}{dy}\right) = -\left[\frac{dU}{dy}\right] : \left(\frac{dU}{dc}\right).$$

Da wir endlich (§. 207.) gefunden haben, daſs für eine besondere Auflösung der Quotient $\left(\frac{dU}{dc}\right) = 0$ seyn muſs; so zeigen diese beiden Relationen, daſs in dem vorliegenden Falle die Quotienten $\left(\frac{dc}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dc}{dy}\right)$ Unendlich seyn müssen. Gleich wie aber das Umgekehrte nicht nothwendig Statt findet, d. h. so wie die aus der Gleichung $\left(\frac{dU}{dc}\right) = 0$ abgeleiteten Werthe von c, nicht nothwendig besondere Auflösungen herbeiführen; eben so folgt auch noch nicht nothwendig, daſs jene Gleichungen oder Werthe, für welche die genannten Quotienten $\left(\frac{dc}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dc}{dy}\right)$ wirklich Unendlich werden, besondere Auflösungen seyn müssen.

§. 210.

Beispiele.

1) Sey zuerst, um das im vorigen Paragraphe entwickelte Verfahren durch ein Paar Beispiele zu erläutern, die Differentialgleichung gegeben:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}};$$

so ist dafür das allgemeine oder vollständige Integral:

$$y + 2\sqrt{(a-x)} = c,$$

folglich

$$\left(\frac{dc}{dy}\right) = 1 \text{ und } \left(\frac{dc}{dx}\right) = \frac{-1}{\sqrt{(a-x)}}.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen läſst sich nichts schlieſsen; dagegen wird die zweite Unendlich für $a - x = 0$; und es ist in der That diese Gleichung, wel-

che der gegebenen Differentialgleichung: $\frac{dx}{dy} = \sqrt{(a-x)}$, da wegen $x = a$, also $dx = 0$ die Gleichung $0 = 0$ ent- entsteht, Genüge leistet, eine besondere Auflösung.

2) Nehmen wir noch die primitive Gleichung des §. 208. (Beisp. 2)

$$c = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)},$$

so wird dafür

$$\left(\frac{dc}{dy}\right) = -1 + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}, \quad \left(\frac{dc}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}$$

und beide Ausdrücke oder Quotienten werden für $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ Unendlich; welche Gleichung auch in der That, wie wir gefunden haben, die besondere Auflösung der a. a. O. gegebenen Differentialgleichung ist.

Anmerk. Die hier vorgetragenen Methoden, um zu einer gegebenen Differentialgleichung die besondern Auflösungen zu finden, setzen offenbar die Kenntnifs des allgemeinen Integrals der gegebenen Gleichung voraus; die Entwicklung des zu beobachtenden Verfahrens aber, um die besondern Auflösungen zu finden, wenn dieses Integral nicht bekannt ist, fällt aufserhalb der hier vorgezeichneten Grenzen und mufs in den mehrmals erwähnten gröfsern Werken von *Euler*, *Lacroix*, *Brunacci* u. s. w. nachgesehen werden.

Eben so müssen wir auch hinsichtlich der Integration der Differentialgleichungen mit drei und mehreren Variablen, so wie jener von höhern Ordnungen u. s. w. auf diese angeführten Werke (wozu auch die Octav-Ausgabe von *Lacroix's Traité élémentaire de calcul différent. et intégr.*, 4. Aufl. Paris 1828. Deutsche Uebersetzung von Dr. *Baumann*, Berlin 1830, zu zählen ist) verweisen.

Zehntes Capitel.

Auflösung einiger geometrischen Aufgaben, welche auf die Integration von Differentialgleichungen zwischen zwei Variablen führen.

§. 211.

Um endlich auch eine Anwendung der Differentialgleichungen mit zwei veränderlichen Gröfsen auf geometrische Untersuchungen zu zeigen, wollen wir schlüfslich noch die nachstehenden Aufgaben auflösen *).

Aufgabe 1.

Die Curve zu finden, deren Subtangente gleich einer gegebenen Function X der Abscisse x ist.

*) Man hat das Verfahren, um aus der Tangente oder Subtangente, Normale oder einer sonstigen Hilfslinie einer Curve, die Curve selbst herzuleiten, die umgekehrte Methode der Tangenten genannt. Nachdem nämlich die Differentialrechnung erfunden war, mittelst welcher man das wichtige Problem der Tangenten auflösen konnte; so beschäftigte man sich auch sogleich mit der Integralrechnung, um aus den gegebenen Eigenschaften der Tangenten einer Curve die Gleichung dieser letztern zu finden; und dieser Calcul wurde die umgekehrte Methode der Tangenten genannt. Man sieht, dafs diese Benennung (die übrigens von einer einzigen Anwendung hergenommen, zu eingeschränkt ist, als dafs dieselbe bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaften noch beibehalten werden könnte) nur den Differentialgleichungen der ersten Ordnung zukommen kann; denn die Gl. $Mdx + Ndy = 0$, d. i. $\frac{dx}{dy} = -\frac{N}{M}$ integriren, heifst nichts anderes, als von dem Ausdruck der Subtangente $\left(y \cdot \frac{dx}{dy}\right)$, dividirt durch die Ordinate y, zur ursprünglichen Gleichung der Curve zurückgehen. Ist $\frac{dy}{dx} = p$ gefunden, so hat man offenbar auch die Subtangente $= \frac{y}{p}$, die Tangente $= \frac{y}{p} \sqrt{(1 + p^2)}$ u. s. w.

Auflösung.

Da der Bedingung gemäfs

$$y\frac{dx}{dy} = X$$

seyn soll, so hat man sofort eine Differentialgleichung, in welcher sich die Variablen unmittelbar trennen oder absondern lassen; man erhält nämlich

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{X},$$

also, wenn man integrirt:

$$ly = \int\frac{dx}{X} \ldots (1.$$

a) Soll z. B. die Subtangente der doppelten Abscisse gleich seyn, so wird $X = 2x$, folglich

$$\int\frac{dx}{X} = \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}lx + lC' = l.C'\sqrt{x},$$

und daher nach (1:

$$ly = lC'\sqrt{x} \text{ oder } y^2 = Cx;$$

nämlich die Gleichung der gemeinen Parabel (§. 44., Beispiel).

b) Soll hingegen die Subtangente constant und $= a$ seyn, so hat man

$$\int\frac{dx}{X} = \int\frac{dx}{a} = \frac{x}{a} + C';$$

folglich $aly = x + C$, oder wenn für $x = 0$: $y = 1$ seyn soll, wodurch die Constante $C = 0$ wird, und wenn man die Logarithmen des Systems, in welchem a der Modul ist, durch *log.* bezeichnet, auch:

$$log.\, y = x;$$

also die Gleichung der logarithmischen Linie (§. 76.).

§. 212.

Aufgabe 2.

Die Polarcurve zu finden, deren Subtangente dem Leitstrahle gleich ist.

Auflösung.

Nach §. 68., (1, ist die Subtangente $= \frac{u^2 d\varphi}{du}$, folglich hat man der Bedingung gemäſs:

$$u = \frac{u^2 d\varphi}{du} \text{ oder } \frac{du}{u} = d\varphi,$$

und daraus, wenn man integrirt:

$$lu + lC = \varphi.$$

Setzt man für $\varphi = 0$: $u = 1$; so folgt $0 + lC = 0$, oder $lC = 0$, und es ist die Gleichung der gesuchten Curve:

$$lu = \varphi \text{ oder } u = e^\varphi;$$

nämlich die der logarithmischen Spirale (§. 81.).

§. 213.

Aufgabe 3.

Die Curve AMB (Fig. 64) zu finden, bei welcher in jedem ihrer Puncte M die Länge des Bogens AM, vom tiefsten Punct A gezählt, der trigonometrischen Tangente des Winkels $B'SM$, welchen die in M gezogene Tangente TMS mit der Horizontallinie $B'C$ bildet, proportionirt ist. Fig. 64.

Auflösung.

Nimmt man die durch den tiefsten Punct A der Curve gezogene Verticallinie AX zur Abscissenaxe und A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten; zieht an einen beliebigen Punct M der gesuchten Curve, für welchen $AP = x$ und $PM = y$ seyn soll, die Tangente TMS; setzt W. $B'SM = \varphi$ und Bog. $AM = s$; so ist, wenn a eine constante Gröſse bezeichnet, zufolge der Bedingung der Aufgabe:

$$1) \quad s = a \, tang. \varphi.$$

Es ist aber, wegen $tang. XTM = \frac{dy}{dx}$ [§. 45., Gl. (1]:

$$tang. \varphi = \frac{1}{tang. XTM} = \frac{dx}{dy}$$

und [§. 46., (1]

$$ds = dx\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = dy\sqrt{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]};$$

folglich:

$$ds = dx\sqrt{(1+cot.^2\varphi)} = \frac{dx}{sin.\varphi}$$

und auch $ds = dy\sqrt{(1+tang.^2\varphi)} = \dfrac{dy}{cos\ \varphi}$

nämlich:

$$2)\quad dx = ds\,sin.\varphi \text{ und } dy = ds\,cos.\varphi.$$

Die Gleichung 1) differentiirt, gibt $ds = \dfrac{a\,d\varphi}{cos.^2\varphi}$; wird dieser Werth in die vorigen Gleichungen 2) substituirt, so erhält man:

$$dx = \frac{a\,sin.\varphi\,d\varphi}{cos.^2\varphi} \text{ und } dy = \pm\frac{a\,d\varphi}{cos.\varphi},$$

wo + für die positiven Werthe von φ, d. i. für den Ast AMB, und — für den negativen Winkel φ, nämlich für den zweiten, mit dem vorigen symmetrischen Ast $AM'B'$ gilt. Diese Gleichungen endlich integrirt, geben (wegen $sin.\varphi\,d\varphi = -d.cos.\varphi$):

$$x = \frac{a}{cos.\varphi} + C,$$

und [§. 144., 6)]

$$y = \pm\, a\,l.tang.(45 + \tfrac{1}{2}\varphi) + C'.$$

Da für $\varphi = 0$ der Punct M auf A fällt, also dafür $x = 0$ und $y = 0$ ist; so hat man zur Bestimmung der willkürlichen Constanten C, C' die Gleichungen:

$$0 = a + C,\quad 0 = a\,l.tang.45 + C' = 0 + C',$$

und daraus $C = -a$ und $C' = 0$; es ist daher vollständig:

$$x = \frac{a}{cos.\varphi} - a \text{ und } y = \pm\, a\,l.tang.(45 + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Um eine Gleichung zwischen x und y zu erhalten, wird man aus diesen beiden letztern φ eliminiren; dazu hat man, wegen

$$tang.(45+\tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1+tang.\frac{1}{2}\varphi}{1-tang.\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1+sin\ \varphi}{cos.\varphi}$$ (Trig. S. 36, Form. 11.):

$$y = \pm\, a\,l.\left(\frac{1+\sqrt{[1-cos.^2\varphi]}}{cos.\varphi}\right);$$

oder, wenn man den aus der ersten Gleichung folgenden Werth: $cos.\varphi = \frac{a}{a+x}$ substituirt, auch:

$$A)\quad y = \pm\, a\, l.\left(\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{a}\right),$$

als Gleichung der gesuchten Curve BAB', welche sofort, wie man in der Mechanik nach statischen Gründen findet, die gemeine Kettenlinie ist *). Ihrer Wichtigkeit in der Anwendung wegen, wollen wir noch einige Eigenschaften derselben kurz entwickeln.

Wird die Gleichung A) differentiirt, so erhält man ganz einfach für die Differentialgleichung der Kettenlinie:

$$B)\quad dy = \frac{\pm\, a\, dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}} \text{ **)}.$$

Mit dem vorigen Werthe von $cos.\varphi = \frac{a}{a+x}$ wird

$$tang.\varphi = \frac{\sqrt{(1-cos.^2\varphi)}}{cos.\varphi} = \frac{\sqrt{(2ax+x^2)}}{a}$$

folglich, wenn man diesen Werth in der obigen Gleichung 1) substituirt:

$$\alpha)\quad s = \sqrt{(2ax+x^2)};$$

diese Curve ist demnach rectificabel.

Aus der Differentialgleichung B) folgt, wenn man zugleich noch einmal differentiirt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{(2ax+x^2)}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-a(a+x)}{(2ax+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

es ist daher der Krümmungshalbmesser (§. 52., II.)

$$\gamma = -\frac{(a+x)^3}{(2ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} : -\frac{a(a+x)}{(2ax+x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ d. i. } \gamma = \frac{(a+x)^2}{a}.$$

*) Nämlich jene Curve, welche eine vollkommen biegsame, aus äufserst feinen Gliedern bestehende Kette BAB', die in den, in einerlei Horizont liegenden Puncten B, B' aufgehängt wird, bildet. Dabei bezeichnet die constante Gröfse $a = s\, cot.\varphi$ jene Länge der Kette, welche genau so viel wiegt, als die Spannung der Kette im Scheitel A (d. i. im tiefsten Puncte) dem Gewichte nach beträgt (m. s. z. B. den ersten Band von *Poisson's Traité de Mécanique. Paris* 1833; oder den dritten Band von *Eytelwein's* Handbuch der Statik fester Körper. Berlin 1808).

**) Vergl. auch §. 120, Beisp. 3 (S. 322).

Für den Scheitel A hat man sofort $y = \frac{a^2}{a} = a$.

Soll a in der Gleichung A) nicht vorkommen, so darf man darin nur den aus α) folgenden Werth: $a = \frac{s^2 - x^2}{2x}$ substituiren; dadurch erhält man:

$$A') \quad y = \pm \frac{s^2 - x^2}{2x} \, l.\left(\frac{s+x}{s-x}\right).$$

Will man in der Gl. A) statt der Abscisse x den Bogen s haben, so erhält man, mit Berücksichtigung der Gl. α), und da $a^2 + s^2 = (a+x)^2$, also $a + x = \sqrt{(a^2 + s^2)}$ ist:

$$A'') \quad y = \pm \, a \, l.\left(\frac{s + \sqrt{[a^2 + s^2]}}{a}\right).$$

Soll aber endlich in der genannten Gleichung A) x durch y ausgedrückt werden, so erhält man aus A), wenn, wie immer, e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet:

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}}{a},$$

folglich auch

$$e^{-\frac{y}{a}} = \frac{a}{a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}},$$

daher

$$e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = \frac{2(a+x)}{a}\left[\frac{a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}}{a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}}\right] = \frac{2(a+x)}{a}$$

$$\text{oder} \quad a + x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right),$$

und daraus ist endlich:

$$A''') \quad x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} - 2\right).$$

Anmerk. Zählt man die Abscissen x anstatt vom Scheitel A, von jenem Punct A' der Axe XX', für welchen $AA' = a$ ist; so mufs man statt x: $x - a$ setzen, und man hat aus der vorletzten Gleichung unmittelbar:

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right).$$

Will man endlich die Axen mit einander verwechseln und sofort QQ' zur Abscissen- und XX' zur Ordinatenaxe nehmen;

so erhält man auch, und zwar als einfachste Gleichung der Kettenlinie:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \ldots (B.$$

§. 214.

Aufgabe 4.

Die Curve zu finden, deren Krümmungshalbmesser sich wie die dritten Potenzen ihrer Normalen verhalten.

Auflösung.

Die Normale und der Krümmungshalbmesser sind beziehungsweise (§. 44. und §. 52.):

$$n = y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = y\frac{ds}{dx} \text{ und } \gamma = -\frac{ds^3}{dx\, d^2y}.$$

Die Bedingung der Aufgabe wird durch die Relation $\frac{n^3}{\gamma} = c^2$ ausgedrückt, wo c eine unbestimmte Constante bezeichnet; es ist also, wenn man substituirt:

$$-y^3\frac{ds^3}{dx^3} \times \frac{dx\, d^2y}{ds^3} = c^2, \text{ d. i. } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{c^2}{y^3}.$$

Um nun diese Differentialgleichung der zweiten Ordnung zu integriren, multiplicire man dieselbe zuerst mit $2\,dy$; so erhält man nach der ganz einfachen Integration:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{c^2}{y^2} + C \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(Cy^2 + c^2)}}{y},$$

$$\text{d. i. } dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(Cy^2 + c^2)}}.$$

Diese letztere Gleichung abermals integrirt, gibt:

$$x + C' = \frac{1}{C}\sqrt{(Cy^2 + c^2)},$$

wobei C und C' die willkürlichen Constanten der Integrationen sind; sollen diese so bestimmt werden, daſs x und y gleichzeitig verschwinden, so erhält man:

$$C' = \frac{c}{C}, \text{ mithin } Cx + c = \sqrt{(Cy^2 + c^2)},$$

und wenn man quadrirt und reducirt:

$$y^2 = 2cx + Cx^2,$$

nämlich die Gleichung eines Kegelschnitts (Bd. II., §. 69.), und zwar die einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem C negativ, positiv oder Null ist.

§. 215.

Aufgabe 5.

Die Curve zu finden, bei welcher in jedem Puncte der Krümmungshalbmesser der entsprechenden Normale gleich ist.

Auflösung.

Es ist (§. 44.) die Normale $n = y\frac{ds}{dx}$ und (§. 52.) der Krümmungshalbmesser $\gamma = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y}$, folglich der Bedingung der Aufgabe gemäſs:

$$y\frac{ds}{dx} = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y},\ \text{oder}\ y = -\frac{ds^2}{d^2y},$$

d. i. $-y\,d^2y = dx^2 + dy^2$, oder $y\,d^2y + dy^2 = -dx^2$, oder endlich

$$y\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = -dx.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{d^2y}{dx} = dp$; so erhält man aus der letzten Gleichung:

$$y\,dp + p\,dy = -dx,$$

und wenn man integrirt:

$$yp = C - x,\ \text{oder}\ y\frac{dy}{dx} = C - x,\ \text{d. i.}\ y\,dy = C\,dx - x\,dx;$$

also wenn man abermals integrirt:

$$\tfrac{1}{2}y^2 = Cx - \tfrac{1}{2}x^2 + C'.$$

Soll y mit x zugleich verschwinden, so wird $0 = 0 + C'$, d. i. die Constante $C' = 0$, und daher erhält man endlich

für die Gleichung der gesuchten Curve:

$$y^2 = 2Cx - x^2,$$

welches sofort [Bd. II., §. 16., (3] die Gleichung des Kreises ist.

§. 216.

Aufgabe 6.

Die Curve zu finden, deren Krümmungshalbmesser eine beständige Gröſse ist.

Auflösung.

Wird der constante Halbmesser durch a bezeichnet, so soll der Bedingung zufolge:

$$a = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y} = -\frac{dx^2}{d^2y}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}$$

$$\text{oder } a\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Statt finden. Um diese letztere Gleichung zu integriren, setze man wieder $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; so erhält man

$$a\frac{dp}{dx} = -(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$$

und durch Absonderung:

$$dx = \frac{-a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \ldots (\alpha;$$

diese Gleichung nun (§. 122., 2.) integrirt, gibt

$$x = C - \frac{ap}{\sqrt{(1+p^2)}} \ldots (\beta.$$

Es folgt ferner aus der Gleichung $dy = p\,dx$, wenn man für dx den Werth aus (α setzt:

$$dy = \frac{-ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und daraus durch Integration. (§. 122., 1.):

$$y = C' + \frac{a}{\sqrt{(1+p^2)}}, \text{ oder } (y - C')^2 = \frac{a^2}{1+p^2},$$

nämlich: $p = \frac{\sqrt{[a^2-(y-C')^2]}}{y-C'}$;

wird dieser Werth für p in der Gleichung (β substituirt, so erhält man:

$x = C - \sqrt{[a^2-(y-C')^2]}$ oder $(x-C)^2+(y-C')^2 = a^2$, nämlich [Bd. II., §. 15., (α] die Gleichung des Kreises; es ist sonach diese Curve die einzige, welcher die verlangte Eigenschaft, einen constanten Krümmungshalbmesser zu besitzten, zukömmt.

§. 217.

Aufgabe 7.

Aendert man in der Gleichung einer Curve, welche zwischen x, y und einer Constanten a Statt findet, nach und nach diese constante Gröſse a; so erhält man ein System von Curven, welche sämmtlich zu derselben Gattung gehören. Aendert man z. B. in einer Parabel nach und nach den Parameter, so erhält man dadurch eine Reihe von Parabeln, welche gemeinschaftlich dieselbe Axe und den nämlichen Scheitel besitzen.

Dieſs vorausgesetzt, suche man die Curve, welche ein solches System von zu einerlei Gattung gehörigen Curven, unter einem gegebenen Winkel schneidet, d. i. jene Curve, welche man *Trajectorie* nennet *).

Auflösung.

Es sey $f(x', y', a) = o$ die Gleichung, aus welcher durch successive Veränderung von a das System der Cur-

*) Durch die von *Huygens* (*Traité de la lumière*. Leid. 1690) aufgestellte Hypothese, daſs das Licht durch eine wellenförmige Bewegung des Aethers fortgepflanzt werde, kam *Joh. Bernoulli* (*Act. Erud.* 1697) zuerst auf das Problem der orthogonalen Trajectorien (für welche der constante Durchschnittswinkel ein Rechter ist), von welchem auch die Benennung Trajectorie herrührt.

In der höhern Mechanik und Astronomie, heiſst auch jene Curve Trajectorie, welche ein durch was immer für Kräfte getriebener Körper beschreibt.

ven DE, $D'E'$, $D''E''$, . . . (Fig. 65) von derselben Gattung entstehen; FMG die gesuchte schneidende Curve oder Trajectorie, deren rechtw. Coordinaten wir durch x, y bezeichnen wollen. Zieht man in irgend einem der Durchschnittspuncte M der Trajectorie und einer der erstern Curven $D'E'$ an beide Curven die Tangenten MT und MT', so soll der Bedingung der Aufgabe zufolge W. TMT' constant und dem gegebenen Winkel gleich seyn. Bezeichnet man daher die trigonom. Tangente dieses Winkels durch m, so ist wegen Fig. 65.

$$tang.\ TMT' = tang.\ (MTP - MT'P)$$
$$= \frac{tang\ MTP - tang.\ MT'P}{1 + tang.\ MTP\ tang.\ MT'P},$$

wenn man gehörig substituirt:

$$m = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}}$$

Aus der gegebenen Gleichung $f(x', y', a) = 0$ erhält man durch Differentiation den Werth von $\frac{dy'}{dx'} = p'$, so, daſs wenn derselbe in der vorigen Gleichung substituirt wird, sofort

$$m\left(1 + p'\frac{dy}{dx}\right) + p' - \frac{dy}{dx} = 0 \ . \ . \ . \ (\alpha$$

entsteht; dabei ist zu bemerken, daſs man in dieser Gleichung für die in p' vorkommenden Coordinaten x', y' durchgehends x, y schreiben, also p' in p übergehen lassen muſs; weil die Curve $D'E'$ im Durchschnittspuncte M mit der Trajectorie FG einerlei Coordinaten x, y besitzt.

Eliminirt man sodann aus dieser Gleichung (α und der ursprünglichen $f(x', y', a)$ die Constante oder den Parameter a, deren verschiedene Werthe jede dieser auf einander folgenden Curven particularisirt; so umfaſst dann das Ergebniſs dieser Elimination das ganze System der aus der gegebenen Curvenfolge und der gesuchten Trajectorie

entstehenden Durchschnittspuncte und ist sofort die Differentialgleichung dieser gesuchten Curve selbst.

a) Es sey die gegebene Gleichung $y' = a x'$ die der geraden Linie; so folgt daraus $\frac{dy'}{dx'} = p' = a$, und es ist sonach, wenn man diesen Werth für p' in der Gleichung (α substituirt:

$$m\left(1 + a\frac{dy}{dx}\right) + a - \frac{dy}{dx} = 0$$

Um ferner aus dieser und der gegebenen Gleichung a zu eliminiren, hat man aus der gegebenen: $a = \frac{y'}{x'}$, mithin, wenn man diesen Werth in der vorigen Gleichung substituirt und gleich die Accente wegläſst, d. i. (der obigen Bemerkung gemäſs) x', y' in x, y verändert:

$$m\left(1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{y}{x} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\text{oder } m\,(x\,dx + y\,dy) + y\,dx - x\,dy = 0.$$

Da diese Differentialgleichung homogen ist, so kann ihre Integration nach §. 197 bewerkstelliget werden; multiplicirt man diese nämlich mit dem (integrirenden) Factor $\frac{1}{x^2+y^2}$, so entsteht die Gleichung

$$m\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}\right) + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0$$

welche sofort integrabel ist, indem

$$\int\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2} = l\sqrt{(x^2+y^2)} \text{ und } \int\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2} = arc\,tang.\left(\frac{x}{y}\right)$$

folglich die gesuchte Integralgleichung

$$m\,l\sqrt{(x^2+y^2)} + arc.\,tang.\left(\frac{x}{y}\right) = C$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt auch, um ihr eine andere Form zu geben:

$$m\,l\sqrt{(x^2+y^2)} = C - arc.\,tang\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= (C - 90^0) + 90^0 - arc.\,tang.\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= C' + arc.cot\left(\frac{x}{y}\right) = C' + arc.tang.\left(\frac{y}{x}\right)$$

oder endlich, wenn man der unbestimmten Constante C' die Form mlc gibt, auch

$$m\,l\,\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{c} = arc.\,tang.\left(\frac{y}{x}\right) \;\ldots\; (\beta,$$

welches sofort die Gleichung der logarithmischen Spirale ist; denn setzt man

$$\frac{1}{c}\sqrt{(x^2+y^2)} = u \text{ und } arc.\,tang.\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi,$$

so hat man: $mlu = \varphi$ oder $log.u = \varphi$, d. i. $a^\varphi = u$.

Wir haben auch in der That diese besondere Eigenschaft der logarithmischen Spirale, in Folge welcher die sämmtlichen Leitstrahle, die in unserer gegenwärtigen Aufgabe das System der auf einander folgenden Geraden bilden, unter einem beständigen Winkel geschnitten werden, bereits im §. 81 gefunden.

aa) Soll das System der geraden Linien von der Trajectorie rechtwinkelig geschnitten werden, so muſs man in der gefundenen Gleichung (β, $m = \infty$ setzen; dadurch erhält man

$$l\,\frac{1}{c}\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{1}{m}\,arc.\,tang.\left(\frac{y}{x}\right) = 0 = l\,1,$$

$$\text{also } \sqrt{(x^2+y^2)} = c \text{ oder } x^2+y^2 = c^2;$$

die Gleichung des Kreises.

b) Die Trajectorien, für welche der W. $T'MT$ ein Rechter, also $m = \infty$ ist, heiſsen orthogonale Trajectorien, und man erhält sofort für die Differentialgleichung derselben aus (α:

$$1 + p'\,\frac{dy}{dx} = 0 \;\ldots\; (\alpha'.$$

Soll also z. B. die orthogonale Trajectorie für die Parabeln, deren Gleichung sofort (§. 55. Note) $y'^n = a\,x'^m$ ist, gefunden werden; so wird

$$p' = \frac{dy'}{dx'} = \frac{m\,a\,x'^{m-1}}{n\,y'^{n-1}}$$

und wenn man diesen Werth für p' in (α' substituirt und die Accente wegläſst:

$$1 + \frac{m a x^{m-1}}{n y^{n-1}} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ oder } n y^{n-1} dx + m a x^{m-1} dy = 0$$

und wenn man (um die Elimination von a zu bewirken) für a den aus der gegebenen Gleichung folgenden Werth $\frac{y^n}{x^m}$ setzt und reducirt, auch:

$$n x dx + m y dy = 0.$$

Diese Gleichung integrirt gibt endlich: $n x^2 + m y^2 = C$; welches sofort [Bd. II., §. 57., (r] die Gleichung einer Ellipse ist, deren erste Axe mit der gemeinschaftlichen Axe der Parabeln, und Mittelpunct mit ihren Scheiteln zusammenfällt.

c) Es sey endlich noch die orthogonale Trajectorie, für ein System von um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct beschriebenen ähnlichen Ellipsen zu bestimmen.

Da die Ellipsen ähnlich seyn sollen, also daſs Verhältniſs der Axen $\frac{b}{a} = n$ in allen dasselbe bleibt; so ist die Gleichung, aus welcher durch Veränderung von a die Folge von Ellipsen entsteht (den gemeinschaftlichen Mittelpunct zum Ursprung genommen):

$$y' = n\sqrt{(a^2 - x'^2)} \ldots (1$$

und daraus $\frac{dy'}{dx'} = p' = -\frac{n x'}{\sqrt{(a^2 - x'^2)}}$. Dieser Werth in der obigen Gleichung (α' substituirt, gibt, wenn man die Accente wegläſst:

$$1 - \frac{n x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \frac{dy}{dx} = 0$$

oder wenn man [um aus dieser und der ursprünglichen Gleichung (1, a zu eliminiren] für $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ den Werth $\frac{y}{n}$ aus (1 setzt:

$$1 - \frac{n^2 x}{y} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ oder } n^2 \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man endlich durch Integration:

$$n^2 ly = lx + lC = lCx$$

oder, wenn man $n^2 = m$ setzt:

$$y^m = Cx.$$

Soll für $x = \alpha$, $y = \beta$ werden; so wird $\beta^m = C\alpha$, also $C = \frac{\beta^m}{\alpha}$ und daher die gesuchte Gleichung der Trajectorie:

$$\left(\frac{y}{\beta}\right)^m = \frac{x}{\alpha} \text{ *)}.$$

cc) Gehen die Ellipsen in Kreise über, so wird $n = \frac{b}{a} = 1$, also auch $m = n^2 = 1$ und daher die Gleichung der orthog. Trajectorie: $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, die einer geraden Linie [in Uebereinstimmung mit *aa*)].

§. 218.

Aufgabe 8.

Es sey BC (Fig. 66) eine gegebene Curve und O ein gegebener fester Punct; man ziehe aus O an einen beliebigen Punct M' der Curve die Gerade OM', ferner durch M' die Gerade $M'T$ dergestalt, daſs der Winkel $OM'T$ durch die in M' an die Curve gezogene Normale $M'N'$ halbirt, also W. $N'M'T$ = W. $N'M'O$ wird. Fig. 66.

Dieſs vorausgesetzt, bestimme man die Curve RMS, welche durch die aufeinanderfolgenden Durchschnitte dieser Geraden $M'T$ entsteht, oder, was dasselbe ist, in allen Puncten von diesen, nach dem erwähnten Gesetze geführten Geraden $M'T$ berührt wird; nämlich

*) Nimmt man z. B. an, daſs die Erde aus lauter unter einander ähnlichen und concentrischen Schichten besteht, die für sich im Gleichgewichte sind; so bestimmt diese gefundene Trajectorie die Richtung, nach welcher in jedem Puncte ein Körper von der Schwerkraft in das innere der Erde gezogen wird.

jene Curve, welche man aus Gründen die in der Katoptrik entwickelt werden, *Brennlinie durch Zurückwerfung* (*Catacaustica*) nennt.

Auflösung.

Es seyen für die Abscissenaxe AX und dem Ursprung A, $AD = \alpha$, $DO = \beta$ die rechtwinkeligen Coordinaten des gegebenen festen Punctes O; $AP' = x'$, $P'M' = y'$ jene des willkürlichen Punctes M' der gegebenen Curve $f(x', y') = 0$; und endlich $AP = x$, $PM = y$, die Coordinaten irgend eines Punctes M der gesuchten Brennlinie RS.

Um zuvörderst die Gleichung der Geraden $M'T$ zu finden, hat man, da (Bd. II., §. 14., Aufg. 2.)

$$y - y' = \frac{y' - \beta}{x' - \alpha}(x - x')$$

die Gleichung der durch die Puncte O und M' gehenden Geraden OM' ist, für die trig. Tangente des W. $M'EX$, die wir durch t bezeichnen wollen:

$$t = \frac{y' - \beta}{x' - \alpha} \quad \ldots (1.$$

Ferner ist, wenn Kürze halber, W. $M'EX = n$, W. $M'N'A = m$ und $tang. EM'N' = t'$ gesetzt wird:

$$t' = tang. [180 - (m + n)]$$

$$= - tang. (m + n) = \frac{tang. m + tang. n}{tang. m \, tang. n - 1}$$

oder, wegen $tang. n = t$ und

$$tang. m = \frac{M'P'}{P'N'} = \frac{y'}{y'\frac{dy'}{dx'}} = \frac{dx'}{dy'} = \frac{1}{p'},$$

wenn man nämlich $\frac{dy'}{dx'} = p'$ setzt, auch

$$t' = \frac{1 + tp'}{t - p'} \quad \ldots (2.$$

Endlich ist für $tang. MTP = t''$:

$$t'' = tang. (m - EM'N') = \frac{tang. m - t'}{1 + t' \, tang. m}$$

oder wenn man substituirt:

$$t'' = \frac{1 - t'p'}{p' + t'}.$$

Man erhält also für die durch M' gehende Gerade $M'T$ die Gleichung: $y - y' = -t''(x - x')$, oder wenn man für t'' den gefundenen Werth setzt, auch:

$$y - y' = \frac{t'p' - 1}{p' + t'}(x - x') \ldots (3.$$

Um nun von dieser Geraden $M'T$ zur nächst folgenden überzugehen, wird man diese letztere Gleichung nach x' und y' differentiiren; man erhält dadurch, wenn man $\frac{dp'}{dx'} = q'$ setzt:

$$-p'(p' + t')^2 =$$

$$(p' + t')\left[(x - x')(p'\frac{dt'}{dx'} + q't') - (p't' - 1)\right]$$

$$- (p't' - 1)(x - x')\left(q' + \frac{dt'}{dx'}\right)$$

und daraus

$$x - x' = \frac{(p'+t')(p't'-1) - p'(p'+t')^2}{(1 + p'^2)\frac{dt'}{dx'} + q'(1 + t'^2)} = \frac{-(p' + t')(1 + p'^2)}{q'(1 + t'^2) + (1 + p'^2)\frac{dt'}{dx'}}$$

oder

$$x = x' - \frac{(p' + t')(1 + p'^2)}{(1 + t'^2)q' + (1 + p'^2)\frac{dt'}{dx'}} \ldots (A.$$

Setzt man ferner in der vorletzten Gleichung für $x - x'$ den aus der Gleichung (3 folgenden Werth, so erhält man auch noch, nach einer einfachen Reduction:

$$y = y' + \frac{(1 - p't')(1 + p'^2)}{(1 + t'^2)q' + (1 + p'^2)\frac{dt'}{dx'}} \ldots (B.$$

Mit Hilfe der gegebenen Gleichung $f(x', y') = 0$ der reflectirenden Curve BC, läſst sich Alles, was im zweiten Theile dieser Gleichungen (A und (B vorkommt, durch x' ausdrücken; eliminirt man, nachdem dieses bewerkstelligt ist, aus diesen beiden Gleichungen (A und (B die Abscisse x', welche sofort den Punct M' particularisirt; so erhält man dadurch die Gleichung der gesuchten Curve oder Brennlinie $\varphi(x, y) = 0$.

a) Es sey z. B. die reflectirende Curve BC ein Kreis

vom Halbmesser a und der strahlende Punct O der Endpunct des Durchmessers; so wird, wenn man diesen Punct O zugleich zum Ursprung der rechtw. Coordinaten nimmt, die Gleichung der gegebenen Curve:

$$y' = \sqrt{(2ax' - x'^2)} \quad [f(x', y') = 0]$$

und daraus

$$\frac{dy'}{dx'} = p' = \frac{a - x'}{y'};$$

$$\frac{dp'}{dx'} = q' = \frac{-y' - (a - x')p'}{y'^2} = -\frac{y'^2 + (a - x')^2}{y'^3} = -\frac{a^2}{y'^3}.$$

Ferner folgt aus (1, wegen $\alpha = 0$ und $\beta = 0$: $t = \frac{y'}{x'}$ und damit aus (2 (und mit Berücksichtigung der Gleichung der gegebenen Curve):

$$t' = \frac{1 + \frac{a - x'}{x'}}{\frac{y'}{x} - \frac{a - x'}{y'}} = \frac{ay'}{y'^2 - (a - x')x'} = \frac{ay'}{ax'} = \frac{y'}{x'};$$

folglich ist:

$$\frac{dt'}{dx'} = \frac{x'p' - y'}{x'^2} = \frac{ax' - x'^2 - 2ax' + x'^2}{x'^2 y'} = -\frac{a}{x'y'}.$$

Werden diese Werthe in den obigen Gleichungen (A und (B gehörig substituirt, so erhält man nach ganz einfachen Reductionen und der fortwährenden Berücksichtigung, daſs $y'^2 = 2ax' - x'^2$ ist (wodurch $1 + p'^2 = \frac{a^2}{y'^2}$; $1 + t'^2 = \frac{2a}{x'}$; $p' + t' = \frac{3a - 2x'}{y'}$ und $1 - p't' = \frac{2x' - a}{x'}$ wird):

$$x = \frac{6ax' - 2x'^2}{3a} \text{ und } y = \frac{4ay' - 2x'y'}{3a}.$$

Die Elimination von x' aus diesen beiden Gleichungen gibt endlich, wieder mit Rücksicht auf die ursprünglich gegebene, nach allen möglichen Reductionen:

$$y^4 + \tfrac{1}{9}(18x^2 - 36ax + 12a^2)y^2$$
$$+ \tfrac{1}{9}(9x^4 - 36ax^3 + 48a^2x^2 - \tfrac{64}{3}a^3x) = 0$$

für die Gleichung der gesuchten Brennlinie, die sofort vom vierten Grad ist.

Setzt man, um diese zu vereinfachen, $a = \frac{3}{2} A$; so geht sie in Folgende über:

$$y^4 + (2x^2 - 6Ax + 3A^2)y^2 + x^4 - 6Ax^3 + 12A^2x^2 - 8A^3x = 0$$

und wenn man in dieser den Ursprung verändert und statt x, $2A - x$ setzt, endlich:

$$y^4 - (A^2 + 2Ax - 2x^2)y^2 + x^4 - 2Ax^3 = 0;$$

und diefs ist sofort [§. 74., (α] die Gleichung der Cardioide, für welche der Durchmesser des erzeugenden Kreises $A = \frac{2}{3} a$, d. i. $\frac{1}{3}$ des Durchmessers des reflectirenden Kreises ist. (Vergl. die betreffende Note im §. 74., S. 224.)

b) Sey die reflectirende Curve eine Ellipse von der Excentricität c, deren eine Brennpunct zugleich der strahlende Punct O seyn soll; so ist, wenn man den Mittelpunct der Ellipse zum Ursprung der rechtw. Coordinaten und ihre erste Axe zur Abscissenaxe nimmt:

$$\alpha = -c,\ \beta = 0,\ t = \frac{y'}{x'+c},$$

$$y' = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x'^2)},\ \frac{dy'}{dx'} = p' = \frac{-bx'}{a\sqrt{(a^2 - x'^2)}},$$

$$\frac{dp'}{dx'} = q' = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y' - x'p'}{y'^2}\right) = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2y'^2 + b^2x'^2}{a^2y'^3}\right)$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2b^2}{a^2y'^3} = \frac{-b^4}{a^2y'^3},$$

$$t' = \frac{(c^2x' + a^2c)y'}{a^2y'^2 + b^2x'^2 + b^2cx'} = \frac{cy'(cx' + a^2)}{a^2b^2 + b^2cx'} = \frac{cy'}{b^2},$$

$$\frac{dt'}{dx'} = \frac{c}{b^2}\frac{dy'}{dx'} = \frac{c}{b^2}p' = \frac{-cx'}{a^2y'}.$$

Werden diese Werthe in den obigen Gleichungen (A und (B gehörig substituirt, so erhält man nach einigen nicht schwierigen Reductionen:

$$x = \frac{c(a^6b^2 + a^4b^2cx' - a^2b^2c^2x'^2 - b^2c^3x'^3)}{a^6b^2 + a^4b^2cx' - a^2b^2c^2x'^2 - b^2c^3x'^3} = c$$

und $y = y' - \dfrac{b^2(a^2 + cx')(a^4 - c^2x'^2)y'}{a^4(b^4 + c^2y'^2) + b^2cx'(a^4 - c^2x'^2)} = 0$;

hieraus folgt nun, dafs sich hier die gesuchte Brennlinie auf einen Punct, der mit dem zweiten Brennpunct der Ellipse zusammenfällt, reducirt; was auch in der That mit

der bekannten Eigenschaft der Ellipse (Bd. II., §, 105., Note) im Einklange steht.

c) Es sey endlich noch die reflectirende Curve die gemeine oder Apollonische Parabel und ihr Brennpunct zugleich der strahlende Punct O; so ist, wenn die Abscissen auf der Axe der Parabel, vom Scheitel aus gezählt werden:

$$y' = \sqrt{(a x')}, \quad \frac{dy'}{dx'} = p' = \frac{a}{2y'},$$

$$\alpha = \frac{a}{4}, \quad \beta = 0, \quad t = \frac{y'}{x' - \frac{1}{4}a} = \frac{4y'}{4x' - a},$$

$$t' = \frac{2(4x' + a)y'}{8y^2 - 4ax' + a^2} = \frac{2y'(4x' + a)}{4ax' + a^2} = \frac{2y'}{a},$$

$$\frac{dt'}{dx'} = \frac{2p'}{a} = \frac{1}{y'};$$

folglich, wenn diese Werthe wieder gehörig in den obigen Gleichungen (A und (B substituirt werden, nach einigen leichten Reductionen:

$$x = x' + \frac{(4x' + a)(4ax' + a^2)}{2a(4x' + a) - 2(4ax' + a^2)} = x' + \frac{a(4x' + a)^2}{0} = \infty$$

$$\text{und } y = y' + \tfrac{0}{0} = \tfrac{0}{0};$$

die reflectirten Strahlen sind also mit der Axe der Parabel parallel; welche Eigenschaft wir auch bereits im zweiten Bande §. 107, (Note) gefunden haben.

d) Sind die einfallenden Strahlen selbst unter einander parallel und senkrecht auf die Ordinatenaxe, so muſs der strahlende Punct O als unendlich weit liegend angesehen, d. i $\alpha = \infty$ gesetzt werden. Dafür wird aber

$$t = 0, \quad t' = -\frac{1}{p'}, \quad \frac{dt'}{dx'} = \frac{dp'}{dx'} : p'^2 = \frac{q'}{p'^2}$$

und es verwandeln sich sofort die beiden Gleichungen (A und (B in die folgenden:

$$x = x' + \frac{p'(1 - p'^2)}{2q'} \text{ und } y = y' + \frac{p'^2}{q'}.$$

dd) Ist z. B. die reflectirende Curve wieder die gewöhnliche Parabel, so erhält man mit den vorigen, in *c*) entwickelten Werthen von p', q', u. s w. aus

diesen beiden letztern Gleichungen, nach einigen ganz einfachen Reductionen:

$$x = x' - \frac{a x'(4 x' - a)}{4 a x'} = \frac{a}{4}$$

und $$y = y' - \left(\frac{a^2}{4 y'^2} : \frac{a^2}{4 y'^3}\right) = y' - y' = 0;$$

es vereinigen sich also die sämmtlichen mit der Axe der Parabel parallel einfallenden Strahlen im Brennpuncte dieser Curve, welcher daher hier die Stelle der Brennlinie vertritt.

Anmerk. Zur eigenen Uebung mag der fleifsige Anfänger noch die Brennlinie BGA (Fig. 67) für den Halbkreis Fig. 67.
ADB, bei parallel einfallenden Strahlen QN aufsuchen. Er wird das interessante Resultat finden, dafs diese eine Epicycloide sey, welche durch die Wälzung eines Kreises vom Durchmesser $BF = \frac{1}{2} CB$, über den (mit den reflectirenden concentrisch liegenden) Halbkreis FGE, vom Durchmesser $EF = CB$, von dem Puncte B beschrieben wird. Man sieht diese Brennlinie häufig am Boden eines Trinkglases, einer Kaffeeschale etc. entstehen, und man kann sie unter Andern durch eine lichthelle oder glänzende Linie darstellen, wenn man Licht (am genauesten hiezu das Sonnenlicht) auf die innere polirte Fläche eines hohlen Metallcylinders oder in ein zum Theil mit Milch gefülltes Cylinderglas fallen läfst.

Auf dieselbe Art wird man finden, dafs wenn die zurückwerfende Curve die *Cycloide* ADB (Fig. 38) ist, und die ein- Fig. 38.
fallenden Strahlen mit der Axe CD parallel sind, die Brennlinie aus zwei *cycloidischen*, in C sich vereinigenden Bogen besteht, von denen der Bogen CRB über BC (als der halben Grundlinie AB der gegebenen Cycloide) als Basis beschrieben, von der halben Cycloide BD, und ein ganz gleicher über AC beschriebener Bogen, von der andern Hälfte AD erzeugt wird.

So wie bei Spiegelflächen Brennlinien durch Zurückwerfung entstehen, von denen wir hier gehandelt haben, eben so können bei durchsichtigen Körpern solche Brennlinien durch Brechung, die man Diacausticae genannt hat, gebildet werden. *Huygens* war der erste, welcher die Brennlinien untersuchte; *Jacob Bernoulli*, von welchem auch die Benennungen Cata- und Diacaustica herrühren, verfolgte diese Untersuchung weiter (*Acta. Erud.* 1692) und dessen

Bruder *Johann B.* behandelte diesen Gegenstand sehr ausführlich (*Lect. Hospit.* XXVI — XXXII und LVI — LVIII). In der von *Marquis de l'Hôpital* (Zögling des *Joh. Bernoulli*, geb. zu Paris 1661; gest. 1704) herausgegebenen „*Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*", welches zu Paris im J. 1696 ohne den Namen des Verfassers in Quarto erschien und in Frankreich das erste instructive Werk über die *Leibnitz'sche* Differentialrechnung bildete, sind beide Arten von Brennlinien sehr ausführlich abgehandelt.

Eben so findet man diese auch in *Maclaurins* trefflichem Werke. »*A Treatise of Fluxions*, 1742,« gehörig entwickelt. Schlüſslich können wir diejenigen, welche diese Materie vollständiger zu studieren wünschen, auch in dieser Beziehung wieder auf das mehrmals angeführte, von Prof. *Brandes* herausgegebene Lehrbuch der höheren Geometrie verweisen.

Anhang.

Die Elemente der Variationsrechnung.

Einleitung.

§. 1.

Bei allen bisherigen Anwendungen der Differentialrechnung ist die Relation oder gegenseitige Beziehung der variablen Gröſsen, während einer ganzen Rechnung oder Entwicklung ungeändert dieselbe geblieben; es gibt aber Fälle oder gewisse Probleme, in welchen diese Relation selbst als veränderlich angesehen werden muſs.

Wird z. B. in einer gegebenen Curve $y = f(x)$ jener Punct gesucht, in welchem das Quadrat der Summe aus der Abscisse und Subnormale ein Minimum wird; so bleibt während der Behandlung oder Auflösung dieses Problems, nach den bekannten Regeln fürs Maximum und Minimum, die gegebene Relation $y = f(x)$ unveränderlich, und es ist bloſs x die unbekannte oder zu suchende Gröſse welche dabei verändert wird*).

*) Nehmen wir z. B. an, die gegebene Curve sey die Ellipse und ihr Mittelpunct der Anfang der rechtw. Coordinaten; so ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ die gegebene Relation zwischen x und y. Die Auflösung der obigen Aufgabe für diese Curve ist, wenn man die genannte Summe, welche ein Minimum seyn soll, durch V bezeichnet, sofort folgende:

Es ist $V = \left(x + y\frac{dy}{dx}\right)^2$ und hier, wegen $y\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}x$;

$$V = (x - \frac{b^2}{a^2}x)^2 = x^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^2 = \frac{c^4 x^2}{a^4};$$

folglich (§. 39.)

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2c^4 x}{a^4} = 0, \text{ und daraus } x = 0;$$

welches sofort jener gesuchte Werth von x ist, für welchen V ein Minimum wird, weil zugleich der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{2c^4}{a^4}$ positiv ist.

Soll dagegen die Curve gefunden werden, in welcher in jedem ihrer Puncte dieses genannte Quadrat in Bezug auf alle übrigen Curven ein Minimum wird; so ist die Relation $y = f(x)$, als Gleichung der gesuchten Curve, weder gegeben, noch auch während der Behandlung oder Auflösung dieser Aufgabe als unveränderlich anzusehen; vielmehr ist es gerade jetzt diese Function $f(x)$, oder die Form der Curve, welche man verändern und als variabel ansehen mufs, um die Aufgabe zu lösen *).

*) In diesem Falle ist nämlich in $V = \left(x + y\frac{dy}{dx}\right)^2$ die Abhängigkeit oder Relation zwischen x und y unbekannt, folglich kann man nicht mehr Alles durch eine Variable, z. B. durch x, ausdrücken, um das Maximum oder Minimum von V nach dieser Variablen zu suchen; auch kann man das Maximum oder Minimum von V nicht nach allen drei Variablen x, y und $\frac{dy}{dx} = p$ zugleich suchen, weil diese Grössen nicht von einander unabhängig sind. Es bleibt hier, wenn die bisherigen Methoden ausreichen sollen, nichts anderes übrig, als die Aufgabe in Bezug auf jede dieser drei Gröfsen x, y, p insbesondere aufzulösen und z. B. zuerst x, y als constant, und blofs p als veränderlich anzusehen; wodurch aber die Aufgabe dahin modificirt wird, dafs unter allen durch denselben Punct x, y gehenden Curven, jene von der genannten Eigenschaft zu finden ist. Sucht man dann eben so die mit dieser Eigenschaft begabte Curve in Absicht auf y, so, dafs man dabei x und p als constant ansieht, und endlich auch in Bezug auf x, wobei y und p beständig bleiben; so zeigen zuletzt die gefundenen Relationen, ob eine einzige Curve allen diesen Forderungen entsprechen kann, d. h. ob die Aufgabe in der gegebenen Allgemeinheit möglich sey oder nicht.

Für die vorliegende Aufgabe ist aber

$$\left(\frac{dV}{dp}\right) = x + py = 0, \quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = x + py = 0$$

$$\text{und auch } \left(\frac{dV}{dx}\right) = x + py = 0,$$

so, dafs also alle drei Auflösungen auf eine und dieselbe Relation $x + y\frac{dy}{dx} = 0$ oder $xdx + ydy = 0$ führen, aus welcher Gleichung durch Integration sofort

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

nämlich die Gleichung des Kreises folgt: es ist also der Kreis, dessen Mittelpunct mit dem Ursprung der Coordinaten zusammenfällt, jene

Wäre, um ein zweites Beispiel zu geben, für eine bestimmte Curve $y = f(x)$ jener Werth von x zu suchen, für welchen die Länge des Bogens, dessen Endpuncte den Abscissen x und $x + a$ entsprechen, ein Minimum wird; so würde offenbar bei Auflösung dieser Aufgabe wieder die Curve selbst, oder die Relation $y = f(x)$ vollkommen unverändert bleiben und sofort, indem man auf der nämlichen Curve von einem Puncte zu einem andern geht, nur x geändert werden *).

Curve, welche die gegebene Aufgabe vollkommen auflöst.

Unter den unzähligen Relationen von $y = f(x)$, welche zwischen x und y, je nach der Bedeutung von f oder Form der Curve möglich sind, wird also für jene $f(x) = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, d. i. für den Kreis V [hier $= (x - x)^2 = 0$] ein Minimum. Die geringste Aenderung in der Form von $f(x)$, liefert für V gröſsere Werthe. Aendert man z. B. $f(x)$ so, daſs der Kreis in eine Ellipse übergeht; so erhält man dafür $V = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2$, also > 0, d. i. $>$ als vorhin; und so auch in allen übrigen Fällen.

*) Es würde nämlich, wenn man die Länge des Bogens durch u bezeichnet (Abschn. 2, §. 174.), aus $u = \int_x^{x+a} dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ jener Werth von x zu bestimmen seyn, für welchen u ein Minimum wird.

Nehmen wir, um die Ideen noch mehr zu fixiren, an, die gegebene Curve sey ein Kreis vom Halbmesser r; so ist, wenn die Abscissen vom Endpunct des Durchmessers gezählt werden, $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$, also die Natur und Beschaffenheit von $y = f(x)$ festgesetzt oder bestimmt. Es ist sonach hier, wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$:

$$u = \int_x^{x+a} \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} =$$

$$r\,arc.\,sin.\left(\frac{x + a - r}{r}\right) - r\,arc.\,sin.\left(\frac{x - r}{r}\right).$$

Um ferner aus dieser Gleichung die einem Maximum oder Minimum von u entsprechenden Werthe von x zu finden, hat man:

$$\frac{du}{dx} = \frac{r}{\sqrt{[2r(x + a) - (x + a)^2]}} - \frac{r}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = 0$$

und daraus

$$x = \frac{2r - a}{2}, \text{ oder auch } r - x = \tfrac{1}{2} a.]$$

Dagegen würde $f(x)$ die veränderliche und zu suchende Gröſse seyn, wenn unter allen möglichen Curven jene bestimmt werden sollte, für welche der Bogen, dessen Endpuncte gegebenen Abscissen entsprechen, ein Minimum ist; denn in diesem Falle müſste man, um die Aufgabe aufzulösen, von einer Curve zu einer andern übergehen, also diese, mithin auch die Relation $y = f(x)$ selbst, variiren *).

Aufgaben nun wie diese letztere, bei welchen es sich um die Bestimmung der Relation von x und y, oder in

Fig. 67. Es folgt also, daſs die Endpuncte M, M' (Fig. 67) des gesuchten Kreisbogens MM', von jenen beiden Ordinaten PM, $P'M'$ bestimmt werden, deren jede vom Mittelpunct des Kreises C, um die Gröſse $CP = CP' = \frac{1}{2}a$ absteht. Da ferner für diesen Werth von x der zweite Differentialquotient positiv ausfällt, so ist dieser Bogen MM', unter allen Bogen des Kreises, deren Projection auf die Abscissenaxe $= a$ ist, der Kleinste.

*) Im vorhin angeführten Beispiele war im zweiten Falle die Curve oder Relation $y = f(x)$ zu finden, für welche $V = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ ein Maximum oder Minimum wird; hier müſste diese Aufgabe für das Integral $\int V dx$ selbst, innerhalb gegebener Grenzen genommen, aufgelöst werden. Solche Aufgaben erfordern aber, daſs das Differential $V dx$ nicht an und für sich integrabel sey, sondern dieses erst werde, indem man eine gewisse Relation zwischen x und y, d. i. $y = f(x)$ festsetzt; denn nur dadurch wird es möglich, unter den unzähligen Relationen, davon jede zu einem gewissen Integral von $V dx$ führt, jene zu finden, für welche $\int V dx$ ein Maximum oder Minimum wird, d. h. die Form der Function $f(x)$ von der Beschaffenheit zu bestimmen, daſs diese, auch um noch so wenig verändert, ein Integral $\int V dx$ liefert, welches innerhalb der bestimmten Grenzen kleiner oder gröſser, als das erwähnte Maximum oder Minimum ist. Besäſse $V dx$ an und für sich schon ein Integral, so wäre dasselbe nicht mehr von der Relation $y = f(x)$ abhängig, und man könnte hierüber nichts verfügen; höchstens lieſsen sich dann jene Werthe von x und y aufsuchen, für welche dieses Integral ein gewöhnliches Maximum oder Minimum wird.

Es ist leicht zu sehen, daſs die Behandlung dieser Aufgabe von der erwähnten des vorigen Beispiels verschieden seyn müsse, weil hier die Gröſsen x, y und $\frac{dy}{dx}$ nicht mehr als von einander unabhängig angesehen werden dürfen, indem man sonst nicht zu dem Integral $\int V dx$, welches erst ein Maximum oder Minimum werden soll, gelangen könnte.

geometrischer Bedeutung, um die Bestimmung der Curve $y = f(x)$ handelt, für welche dann das unbestimmte Integral $\int V\,dx$, innerhalb bestimmter Grenzen, wobei V eine gegebene Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w. ist, und Vdx ohne eine solche Relation wie $y = f(x)$, kein Integral hat, ein Maximum oder Minimum werde, gehören in die (zuerst von *Euler*) so genannte Variationsrechnung.

Anmerk. Um noch besser einzusehen, worin das Wesen der Variationsrechnung besteht, wollen wir die Sache noch von der rein analytischen Seite betrachten.

Eine Function Einer oder mehrerer Variablen kann nicht blofs dadurch, dafs bei ungeändertem Zusammenhange die veränderlichen Gröfsen eine Zu- oder Abnahme erleiden, sondern offenbar auch dadurch verändert werden, dafs (die Variablen mögen dabei eine Aenderung ihrer Werthe erfahren oder nicht) die Verbindung der Variablen, d. i. die Form der Function auf irgend eine Weise verändert wird. So wie nun die Bestimmung der geänderten Function im ersten Falle bekanntlich Gegenstand der Differenzen- und Differentialrechnung ist, so gehört diese im zweiten Falle in das Gebieth der Variationsrechnung.

Um aber auf die gänzlich willkürlichen (unendlich mannigfaltigen) Formverwandlungen und den daraus hervorgehenden Aenderungen der Functionen einen Algorithmus gründen zu können, denkt man sich mit jeder, mit der ursprünglichen Function U vorgenommenen Umwandlung, zugleich eine willkürliche, unbestimmte Gröfse i (die variirende) verbunden oder in die Rechnung eingeführt, und die durch Umwandlung entstandene Function U_i, bei übrigens völliger Willkürlichkeit im Zusammenhange der Variablen und der Gröfse i, der einzigen Bedingung unterworfen, dafs sie für $i = 0$ wieder in den primitiven Zustand U zurückkehrt. (Denn so wie in der Differenzen- und Differentialrechnung die geänderte Function wieder in die ursprüngliche zurückgeht, wenn alle Incremente Null gesetzt werden; so mufs offenbar auch zwischen der primitiven und der durch Formänderung entstandenen Function, wenn anders diese letztere einem gewissen Algorithmus unterwerfbar seyn soll, ein solcher Zusammenhang bestehen, dafs man von dieser letztern wieder auf die ursprüngliche zurückgehen kann; was offenbar durch die obige Annahme auch er-

reicht wird.) So wäre z. B. für $U = x^n$ eine (unter den unzählig vielen gedenkbaren) solche durch Formänderung erzeugte Function:

$$Ui = (x+i)^n + l\left[1 - \frac{i}{a(x+i)^n}\right] - arc.\,sin.\,i,$$

weil für $i = 0$ wieder $Ui = x^n = U$ wird.

Aus dieser Ansicht folgt auch ganz einfach für $Ui - U$, d. i. für die Veränderung der Function U eine nach steigenden (ganzen, positiven) Potenzen der Variirenden i fortschreitende Reihe.

Denn denkt man sich i als variabel und bezeichnet die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{d\,Ui}{d\,i},\ \frac{d^2\,Ui}{d\,i^2},\ \frac{d^3\,Ui}{d\,i^3},\ \ldots$$

für $i = 0$ der Reihe nach durch U', U'', U''', ...; so hat man nach der *Maclaurin*'schen Reihe (Abschn. 1., §. 12.):

$$Ui = U + U'\frac{i}{1} + U''\frac{i^2}{1.2} + U'''\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots$$

und daraus, wenn man auch gleich für die Coefficienten U', U'', U''', ..., die (analog mit den Begriffen der Differentialrechnung) beziehungsweise die erste, zweite, dritte, ... Variation von U genannt und durch δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, ... bezeichnet werden, diese letztere Bezeichnung einführt, die Veränderung von U:

$$Ui - U = \delta U.\frac{i}{1} + \delta^2 U.\frac{i^2}{1.2} + \delta^3 U.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots \quad (p;$$

dabei werden, wie aus dem ganzen Vorgange erhellet, diese auf einander folgenden Variationen von U gefunden, indem man die successiven Differentialquotienten von Ui in Bezug auf i entwickelt und zuletzt $i = 0$ setzt.

§. 2.

Bei der Behandlung solcher Aufgaben, mufs man natürlich zuerst suchen, welchen Einflufs eine Veränderung oder Variation in der Relation $y = f(x)$, auf das unbestimmte Integral $\int V\,dx$ selbst ausübt. So ist für das zuletzt angeführte Beispiel:

$$V = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)},\ \text{also}\ \int V\,dx = \int dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

offenbar ein unbestimmtes Integral, weil der Differential-

ausdruck $dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, so lange nicht zwischen x und y eine gewisse Abhängigkeit oder Relation angenommen oder festgesetzt ist, kein Integral hat. Da aber ferner unzählig viele solcher Relationen angenommen oder gedacht werden können, davon jede zu einem Integral von $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ führt, und diese innerhalb der gegebenen Grenzen sämmtlich von einander verschieden sind; so soll nach dem Sinne der Aufgabe gerade jene $y = f(x)$ gefunden werden, für welche das entsprechende Integral innerhalb dieser bestimmten Grenzen ein Maximum oder Minimum wird Ist $y = f(x)$ diese gesuchte Relation, so muſs die geringste Aenderung oder Variation in derselben [was mit einer Aenderung in der Form der Curve $y = f(x)$ identisch ist] auf ein Integral führen, welches innerhalb derselben gegebenen Grenzen, kleiner als das Maximum und gröſser als das Minimum von $\int V dx$ ist. Dasselbe gilt auch, wenn das Integral $\int V dx$ statt der Bogenlänge, irgend eine andere Eigenschaft der Curve $y = f(x)$ bezeichnet.

Um aber den Einfluſs kennen zu lernen, welchen eine Veränderung in der Relation $y = f(x)$ auf das Integral $\int V dx$ hat, wird man y, unabhängig von x, zu oder abnehmen lassen; denn dadurch, daſs man von irgend einem Werthe $y = PM$ (Fig. 68) zu einem andern $P\mu$ übergeht, Fig. 68. ohne daſs dabei die Abscisse $x = AP$ geändert wird, geht man eben von einer Curve BC zu einer andern $\beta\gamma$ über.

Ist diese Aenderung unendlich klein, liegt also die Curve $\beta\gamma$ jener BC unendlich nahe; so heiſst diese unendlich kleine Aenderung von y, die Variation von y und wird durch δy bezeichnet. So wie also die unendlich kleine Aenderung dy von y, welche entsteht, wenn man in der nämlichen Curve BC, von einem Punct M zum nächstfolgenden, dem erstern unendlich nahe liegenden M' fortschreitet, das Differential von y ist; so ist jene unendlich kleine Aenderung δy, welche in y entsteht, wenn man von dem Puncte M der ersten Curve BC zu dem correspon-

direnden (in derselben Ordinate liegenden) Punct μ der zweiten oder der erstern unendlich nahe liegenden Curve $\beta\gamma$ übergeht, die Variation von y. Die Curve BC heifst dabei die variirende und $\beta\gamma$ die variirte Curve.

Da also die Variation δy nichts anderes als ein Differential von y, nur in einer andern Bedeutung genommen, ist; so fordert die Variationsrechnung im Grunde keine neuen Regeln und Grundsätze, sondern nur eine neue Anwendung der vorigen oder schon bekannten; und es müssen sofort auch alle Formeln der gewöhnlichen Differentialrechnung zugleich für die Variationsrechnung passen, wenn man nur darin den Buchstaben d mit jenem δ vertauscht*).

Da wir uns endlich hier auf die Entwicklung der Hauptsätze der Variationsrechnung, in so fern diese zur Auflösung von geometrischen Aufgaben dienen, beschränken müssen; so wollen wir nun auf diese Entwicklung selbst übergehen und das Wesentlichste hierüber in Kürze vortragen.

*) Diese Bezeichnung für die Variation, nach welcher der zu variirenden Gröfse der Buchstabe δ vorgesetzt wird, ist von *Lagrange*, welcher seine glänzende mathematische Laufbahn gleich mit der Erfindung des Variationscalculs (*Miscell. Soc. Taurin.* 1760 und 61) begann, eingeführt worden. Bei der Anwendung der Differential- und Variationsrechnung auf geometrische Untersuchungen, wird also das Zeichen d gebraucht, um in derselben Curve von einem Punct zum nächstfolgenden überzugehen; dagegen bedient man sich des Zeichens δ, wenn man von einem Punct einer Curve zum correspondirenden oder derselben Abscisse entsprechenden Punct der nächstfolgenden Curve übergeht.

Da man ferner z. B. bei einem in Bewegung begriffenen Körper, nicht nur von einem Puncte seiner Oberfläche zum nächstfolgenden übergehen, d. i. die Coordinaten zweier auf einander folgenden Puncte in demselben Augenblicke, nämlich das Differential der Ordinate, sondern auch die beiden, einem und demselben Punct entsprechenden Ordinaten in zwei aufeinander folgenden Momenten oder Zeittheilchen, nämlich die Variation der Ordinate, betrachten kann; so läfst sich leicht erachten, dafs sich die Variationsrechnung auch in der Mechanik mit grofsem Nutzen wird anwenden lassen; was auch in der That schon *Lagrange* bewies, indem er den neuen Calcul sogleich auf Gegenstände der Mechanik von der gröfsten Wichtigkeit und mit dem glücklichsten Erfolge mit anwendete.

§. 3.

Da die beiden Zeichen d und δ zwei verschiedene und von einander unabhängige Differenzen anzeigen, so ist es, wenn diese in einer Operation zusammen vorkommen, völlig gleichgiltig, in welcher Ordnung diese hinter einander stehen oder angewendet werden; denn soll eine Gröfse auf zwei verschiedene, von einander unabhängige Arten verändert werden, so wird immer dasselbe Resultat erhalten, in welcher Ordnung man auch diese Aenderungen vornehmen mag. Es wird also $d\delta x = \delta d x$, $\delta d^2 x = d^2 \delta x = d \delta d x$ u. s. w. seyn.

Aus dem nämlichen Grunde darf man auch die Ordnung in den Zeichen δ und $\int$ nach Willkür wählen und verändern.

Diese beiden Eigenschaften, welche das Hauptprincip der Variationsrechnung bilden, lassen sich aber auch auf folgende Art erweisen:

1. Bezeichnet $f(x)$ den ursprünglichen Werth von y, und $f'(x)$ jenen nach der Variation von y; so ist $\delta y = f'(x) - f(x)$ eine neue Function von x, die sofort auch wegen der ursprünglichen Relation $f(x) = y$ eine gewisse Function von y seyn wird, welche wir durch $\varphi(y)$ bezeichnen wollen, so, dafs man hat:

$$\delta y = \varphi(y) \quad . \; . \; . \; (\alpha$$

und eben so:

$$\delta(y + dy) = \varphi(y + dy) \quad . \; . \; . \; (\beta.$$

Es ist ferner $dy = (y + dy) - y$, und wenn man auf beiden Seiten variirt:

$$\delta . dy = \delta(y + dy) - \delta y = \varphi(y + dy) - \varphi(y)$$

[mit Rücksicht auf die Gl. (α u. (β]; da endlich (Abschn. 1, §. 1.)

$$\varphi(y + dy) - \varphi(y) = d . \varphi(y) = d . \delta y$$

[mit Beziehung auf die Gl. (α] ist, so hat man in der That:

$$\delta . dy = d . \delta y \quad . \; . \; . \; (1.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber weiters

$$\delta d^2 y = \delta d d y = d \delta d y = d d \delta y = d^2 \delta y;$$

und indem man dieses Verfahren gehörig fortsetzt, kommt man endlich auf die allgemeine Gleichung:

$$\delta d^n y = d^n \delta y \ . \ . \ . \ (2\ *).$$

Anmerk. Dieser hier erwiesene Satz läſst sich der Unveränderlichkeit in den Gesetzen der Variationsrechnung wegen, auch auf Functionen mehrerer Variablen ausdehnen, so, daſs wenn z. B. U eine Function von x, y und den Differentialen von y ist, auch dann noch die Gleichungen bestehen:

$$\delta d U = d \delta U \text{ und allgemein } \delta d^n U = d^n \delta U.$$

2. Setzt man $\int U = U_1$, so wird $d U_1 = U$, folglich auch $\delta d U_1 = \delta U$, oder mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (1: $d \delta U_1 = \delta U$. Nimmt man nun beiderseits das Integral, so erhält man $\delta U_1 = \int \delta U$, d. i.

$$\delta \int U = \int \delta U \ . \ . \ . \ (3.$$

Auch läſst sich dieser Satz wieder auf höhere Integrale ausdehnen, indem man

$$\delta \int\int U = \int \delta \int U = \int\int \delta U, \text{ d. i. } \delta \int^2 U = \int^2 \delta U,$$

und endlich allgemein

$$\delta \int^n U = \int^n \delta U$$

erhält.

Fig. 68. *) Aus der Betrachtung der Curven BC, $\beta\gamma$ (Fig. 68) ergibt sich diese Gleichung (1 auf folgende Art:

Ist $PM = y$, $PP' = dx$ und μr mit MM' parallel gezogen; so ist $RM' = \rho r = dy$, $M\mu = \delta y$ und $\mu' r$, als Aenderung von dy von einer Curve zur andern, die Variation von dy, nämlich $\mu' r = \delta dy$. Es ist also

$$P'\mu' = P'M' + M'r + r\mu' = y + dy + \delta y + \delta dy \ . \ . \ . \ (\gamma.$$

Da aber auch, als folgende Ordinate von jener $P\mu$ in der variirten Curve

$$P'\mu' = P\mu + d \cdot P\mu = (y + \delta y) + d(y + \delta y)$$

ist; so erhält man durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke:

$$y + dy + \delta y + \delta dy = y + \delta y + dy + d\delta y;$$

woraus sofort ebenfalls die genannte Relation: $\delta dy = d\delta y$ folgt.

Berücksichtigt man ferner, daſs

$$P'\mu' = P'M' + M'\mu' = (y + dy) + \delta(y + dy)$$

ist; so folgt, wenn man diesen Ausdruck mit dem vorigen (γ vergleicht, zugleich noch:

$$\delta(y + dy) = \delta y + \delta dy;$$

was sofort mit der bekannten Regel der Differentialrechnung übereinstimmt.

§. 4.

Wir haben im §. 1. bemerkt, dafs die nämlichen Rechnungsoperationen, mittelst welcher man das Differential einer Function erhält, auch die Variation dieser Function geben, wenn man nur den Buchstaben d in jenen δ verändert; und in der That, ist z. B. U eine Function von x, y und den Differentialen dieser Variablen, so mufs man, um die Variation von U zu erhalten, x in $x+\delta x$, y in $y+\delta y$, u. s. w. übergehen lassen und von der geänderten Function die ursprüngliche abziehen; behält man sodann nur jene Glieder bei, in welchen die Variationen von x, y u. s. w. blofs in der ersten Potenz vorkommen, so hat man offenbar nichts anderes, als das gewöhnliche Differential von U in Bezug auf die Variablen x, y und ihre Differentiale, jedoch hinsichtlich des Buchstabens δ genommen. Es sind nämlich die Differentiale nach δ oder die Variationen von x, y, dx, dy, d^2y, . . . beziehungsweise:

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta dx,\ \delta dy,\ \delta d^2y,\ \ldots$$

und wenn das gewöhnliche Differential von U

$$dU = Mdx + Nd^2x + Pd^3x + \ldots + M'dy + N'd^2y + P'd^3y + \ldots$$

ist, so darf man nur, um daraus die Variation von U zu erhalten, überall das erste, von der gewöhnlichen Differentiation von U herrührende d in δ verändern; man erhält nämlich dadurch:

$$\delta U = M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + \ldots$$
$$+ M'\delta y + N'\delta dy + P'\delta d^2y + \ldots$$

Kann man U auf die Form Vdx bringen, so ist dann, wenn man dabei y als Function von x ansieht, V eine Function von x, y, $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$ u. s. w. und das Differential von V:

$$a)\quad dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \ldots$$

oder auch

$$dV = \left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dy}\right)dy + \left(\frac{dV}{dp}\right)dp + \ldots$$

folglich die Variation von V:

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \ldots$$

oder auch

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta p + \left(\frac{dV}{dq}\right)\delta q + \ldots;$$

dabei kann man nun ebenfalls, wie bei der gewöhnlichen Differentiation, $\delta p = \delta . \frac{dy}{dx}$ unter der Voraussetzung entwickeln, dafs dx entweder constant, oder veränderlich ist; dasselbe gilt auch in Absicht auf δq, δr etc. Nimmt man diese Variationen unter der letztern Voraussetzung, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \delta p &= \delta . \frac{dy}{dx} = \frac{dx\,\delta dy - dy\,\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dy - p\,\delta dx}{dx} \\ \delta q &= \delta . \frac{dp}{dx} = \frac{dx\,\delta dp - dp\,\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dp - q\,\delta dx}{dx} \\ \delta r &= \delta . \frac{dq}{dx} = \frac{dx\,\delta dq - dq\,\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dq - r\,\delta dx}{dx} \end{aligned}\right\} \ldots (A.$$

u. s. w.

Soll also die Variation von $V = f(x, y, p, q, \ldots)$ entwickelt werden, wenn dx selbst noch veränderlich ist; so mufs man in dem obigen Ausdrucke von δV für δp, δq, .. noch die hier gefundenen Werthe (A setzen.

Diese Entwicklungen lassen sich offenbar auch leicht auf Functionen von mehr als zwei Variablen ausdehnen.

Anmerk. Da von den höhern Variationen von

$$V = f(x, y, p, q, \ldots)$$

wo y als Function von x angesehen wird, höchstens noch die zweite eine Anwendung findet; so wollen wir nur diese noch hersetzen.

Es ist ganz einfach, wenn man auch die Variationen δx, δy, δp, ... noch als veränderlich nimmt, nach (Abschn. 1.) §. 20., Entwickl. k), in der Anmerk. (weil die zweite Variation nur eine zweite Differentiation unter dem Zeichen δ ist):

$$w)\quad \delta^2 V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\delta^2 x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta^2 y + \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta^2 p + \left(\frac{dV}{dq}\right)\delta^2 q + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)\delta x^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)\delta x\,\delta y + 2\left(\frac{d^2V}{dx\,dp}\right)\delta x\,\delta p + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\delta y^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dy\,dp}\right)\delta y\,\delta p + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)\delta p^2 + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Soll, wie es in der Anwendung häufig der Fall ist, von der Variation der absolut Variablen x abstrahirt werden; so darf man nur jene Glieder dieser Entwicklung auslassen, in welchen δx als Factor erscheint.

§. 5.

Hat man ein Integral von der Form $\int U$, wo U (wie im vorigen Paragraphe) eine Function von x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, ... ist; so wird auch (§. 3.) $\delta \int U = \int \delta U$, oder, wenn man für δU den Werth aus dem vorigen Paragraphe substituirt, auch

$$\delta \int U = \int(M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + Q\delta d^3x + \ldots)$$
$$+ \int(M'\delta y + N'\delta dy + P'\delta d^2y + Q'\delta d^3y + \ldots)$$

Dieser Ausdruck läfst sich reduciren, indem man unter dem Integralzeichen alle Glieder wegzuschaffen sucht, in welchen die Zeichen d und δ vereint vorkommen; was dadurch erreicht wird, dafs man den Buchstaben δ hinter jenen d bringt und hierauf theilweise integrirt. Es ist nämlich:

$$\int M\delta x = \int M\delta x$$
$$\int N\delta dx = \int N d\delta x = N\delta x - \int \delta x dN$$
$$\int P\delta d^2 x = \int P d^2 \delta x = P d\delta x - \int d\delta x dP$$
$$= P d\delta x - dP.\delta x + \int \delta x d^2 P$$
$$\int Q\delta d^3 x = \int Q d^3 \delta x = Q d^2 \delta x - \int d^2 \delta x dQ$$
$$= Q d^2 \delta x - dQ.d\delta x + \int d\delta x.d^2 Q$$
$$= Q d^2 \delta x - dQ d\delta x + d^2 Q \delta x - \int \delta x d^3 Q$$

u. s. w.

Auf die nämliche Weise erhält man:

$$\int M'\delta y = \int M'\delta y$$
$$\int N'\delta dy = N'\delta y - \int \delta y dN'$$
$$\int P'\delta d^2 y = P' d\delta y - dP'\delta y + \int \delta y d^2 P'$$
$$\int Q'\delta d^3 y = Q' d^2 \delta y - dQ' d\delta y + d^2 Q'\delta y - \int \delta y d^3 Q'$$

u. s. f.

Werden daher diese Werthe in dem vorigen Ausdrucke von $\delta\int U$ substituirt, so erhält man, wenn alles nach δx, $d\delta x$, $d^2\delta x$ u. s. w. geordnet wird:

$$\begin{aligned}
1)\quad \delta\int U = &(N - dP + d^2 Q - ..)\delta x + (P - dQ + ..) d\delta x \\
&+ (Q - \text{etc.}) d^2\delta x + \ldots \\
&+ (N' - dP' + d^2 Q' - ..)\delta y + (P' - dQ' + ..) d\delta y \\
&+ (Q' - \text{etc.}) d^2\delta y + .. \\
&+ \int (M - dN + d^2 P - d^3 Q + \ldots)\delta x \\
&+ \int (M' - dN' + d^2 P' - d^3 Q' + \ldots)\delta y,
\end{aligned}$$

nämlich einen Ausdruck, welcher aus zwei vollkommen ähnlichen Theilen, von denen der eine durch die Variation von x, der andere durch die Variation von y erzeugt wurde, besteht.

Kommt in U auch noch die Variable z mit ihren Differentialen vor, so darf man, um $\delta\int U$ zu erhalten, zu den beiden vorigen nur noch einen ähnlichen dritten Theil in Bezug auf die Variation von z hinzufügen; so wie man überhaupt wieder die vorhergehende Entwicklung 1) auf Functionen von jeder beliebigen Anzahl variabler Gröſsen ausdehnen kann.

Anmerk. Für den Fall, daſs die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} M - dN + d^2 P - d^3 Q + \ldots &= 0 \\ \text{und}\quad M' - dN' + d^2 P' - d^3 Q' + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} (m$$

bestehen, erscheint diese Entwicklung 1), wie man sieht, von jedem Integralzeichen befreit, also vollkommen integrirt. Diese Relationen (*m* sind aber auch in der That nichts anderes als die Bedingungsgleichungen für die Integrabilität von U, was sich mit Hilfe der Variationen auf folgende Weise zeigen läſst.

Ist U ein vollständiges Differential und z. B. $U = dU'$, so ist auch

$$\delta U = \delta d U' = d \delta U';$$

also δU ebenfalls ein vollständiges oder genaues Differential $(d . \delta U')$. Hat man nun in der Entwicklung von $\int \delta U$ alle Glieder, welche integrabel sind, von ihren Integralzeichen befreit, so müssen sich die übrigen Glieder, welche noch unter diesen Zeichen stehen bleiben, von selbst, ohne daſs man erst eine gewisse Bedingung zwischen x, y, δx und δy anzunehmen genöthigt ist, aufheben; es sind also die obigen Gleichungen (*m* in der That zugleich jene, welche die Bedingungen ausdrücken, unter welchen U ein vollständiges Differential, also $\int U$ integrabel ist *).

§. 6.

Läſst sich die Function U auf die Form $V dx$ bringen, so, daſs also V bloſs x, y und die Differentialquotienten von y enthält; so führt die Variation $\delta \int U$ auf eine merkwürdige Reduction. Es ist in diesem Falle

$$\delta \int V dx = \int \delta (V dx) = \int (\delta V dx + V \delta dx) = \int \delta V dx + \int V d \delta x,$$

oder wegen $\int V d \delta x = V \delta x - \int d V \delta x$, auch:

$$\alpha) \quad \delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \, \delta V - d V \, \delta x).$$

Setzt man ferner in dieser Formel für dV und δV die Ausdrücke aus §. 4., so wird

$$dx \, \delta V - dV \, \delta x = N(dx \, \delta y - dy \, \delta x)$$
$$+ P(dx \, \delta p - dp \, \delta x) + Q(dx \, \delta q - dq \, \delta x) + \ldots;$$

*) Ist z. B. $U = x d^2 y - y d^2 x$, so ist

$$dU = - dy \, d^2 x - y d^3 x + dx \, d^2 y + x d^3 y,$$

folglich (§. 4)

$$M = 0, \; N = - dy, \; P = - y, \; Q = 0, \ldots$$
$$M' = 0, \; N' = dx, \; P' = x, \; Q' = 0, \ldots$$

es sind daher die Bedingungsgleichungen (*m* für diesen Fall:

$$d^2 y - d^2 y = 0 \text{ und } - d^2 x + d^2 x = 0$$

erfüllt oder identisch Null, zum Beweis, daſs U ein vollständiges oder richtiges Differential ist; und in der That, es ist $U = d(x dy - y dx)$.

es ist aber weiters, wegen $dy = p\,dx$ und $\delta p = \frac{\delta dy - p\,\delta dx}{dx}$ [§. 4., (A)]:

$$dx\,\delta y - dy\,\delta x = dx\,\delta y - p\,dx\,\delta x = dx(\delta y - p\,\delta x),$$

$$dx\,\delta p - dp\,\delta x = \delta dy - p\,\delta dx - dp\,\delta x$$

$$= d\delta y - p\,d\,\delta x - dp\,\delta x = d.(\delta y - p\delta x)$$

oder mit Berücksichtigung der vorhergehenden Gleichung, endlich

$$dx\,\delta p - dp\,\delta x = d\left(\frac{dx\,\delta y - dy\,\delta x}{dx}\right);$$

und eben so, wozu man in diesem letztern Ausdruck nur y in p und p in q verändern darf:

$$dx\,\delta q - dq\,\delta x = d\left(\frac{dx\,\delta p - dp\,\delta x}{dx}\right);$$

und nach diesem Gesetze weiter.

Setzt man also Kürze halber $\delta y - p\delta x = v$, so wird

$$dx\,\delta y - dy\,\delta x = v\,dx;\ dx\,\delta p - dp\,\delta x = dv;$$

$$dx\,\delta q - dq\,\delta x = d.\frac{dv}{dx};\ \text{u. s. w.}$$

folglich ist, wenn man diese Werthe gehörig substituirt:

$$\int(dx\,\delta V - dV\,\delta x) = \int Nv\,dx + \int P\,dv + \int Q\,d.\frac{dv}{dx} + \ldots$$

also endlich, wenn dieser Werth in a) gesetzt wird:

$$\delta\int V\,dx = V\,\delta x + \int Nv\,dx + \int P\,dv + \int Q\,d.\frac{dv}{dx} + \ldots$$

oder wenn man jene Glieder, in welchen sich die Differentiationen auf v beziehen, theilweise integrirt, wodurch

$$\int P\,dv = Pv - \int v\,dP,$$

$$\int Q\,d.\frac{dv}{dx} = Q\frac{dv}{dx} - \int dv\frac{dQ}{dx} = Q\frac{dv}{dx} - \frac{dQ}{dx}v + \int v\,d.\frac{dQ}{dx}$$

u. s. w.

wird, auch

$$2)\quad \delta\int V\,dx = V\delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx} + \ldots\right)v + (Q - \text{etc.})\frac{dv}{dx} + \ldots$$

$$+ \int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\,d.\frac{dQ}{dx} - \ldots\right)v\,dx.$$

Dieses letztere, im zweiten Theile vorkommende Integral zerfällt, wenn man für v wieder den Werth $\delta y - p\,\delta x$ herstellt, in die beiden Integrale:

$$\int \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d.\frac{dQ}{dx} - \ldots \right) dx\, \delta y$$

$$- \int \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d.\frac{dQ}{dx} - \ldots \right) p\, dx\, \delta x;$$

und diese Darstellung zeigt sofort die Beziehung, in welcher die Coefficienten von δy und δx zu einander stehen, die in der obigen Entwicklung 1) (§. 5) von $\delta \int U$ nicht ersichtlich ist. Bezeichnet man nämlich den Coefficienten von δy durch ψ, jenen von δx durch φ; so ist, wie man sieht:

$$a) \ldots \varphi = - p \psi,$$

so, daſs also, wenn der erstere Null wird, auch der letztere verschwindet.

Anmerk. In dem gegenwärtigen Falle hat man als Integrabilitätsbedingung von $V dx$ bloſs die eine Gleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d.\frac{dQ}{dx} - \text{etc.} = 0 \ldots (n$$

woraus sofort folgt, daſs jene Bedingungsgleichung, welche sich bloſs auf die Variable x bezieht [wie im Systeme $(m$, §. 5., die erste] überflüssig wird, wenn die Function U auf die Form $V dx$, wo V nur x, y und die Differentialquotienten von y enthält, gebracht werden kann*).

Wir gehen nun, ohne uns auf die Entwicklung und Ableitung der mit den vorigen analogen Ausdrücke für höhere Integrale einzulassen, sofort auf die Bestimmung der gröſsten und kleinsten Werthe des unbestimmten Integrals $\int V dx$ über.

*) Daſs diese Transformation von U in $V dx$ nicht immer möglich ist, zeigen z. B. die beiden einfachen Functionen:

$$U = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2} \text{ und } U = \frac{dx\, d^2y + dy\, d^2x}{dx^2}.$$

Setzt man nämlich

$$dy = p\, dx,\; d^2y = p\, d^2x + dp\, dx = p\, d^2x + q\, dx^2;$$

so entsteht für die erstere: $U = q\, dx$ und für die letztere: $U = \frac{2 p\, d^2x + q\, dx^2}{dx}$; es verschwindet also das zweite Differential d^2x nur in der ersten Function, so, daſs man in der letztern y nicht als unmittelbar von x abhängig ansehen, also auch U nicht auf die Form $V dx$ bringen kann.

Ueber die gröſsten und kleinsten Werthe der unbestimmten Integralformeln.

A) Absolute Maxima und Minima *).

§. 7.

Integrale wie $\int y\,dx$, $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ sind unbestimmt, so lange keine Relation zwischen x und y an-

*) Die Lehre vom Max. und Min. enthält, in der gröſsten Allgemeinheit genommen, drei wesentlich verschiedene Theile: Der erste und einfachste beschäftigt sich mit der Aufgabe, in einer Gleichung zwischen x und y jene Werthe von x aufzufinden, für welche y ein Gröſstes oder Kleinstes wird; eine Aufgabe, die gänzlich in das Gebiet der Differentialrechnung gehört und von uns bereits auch am gehörigen Orte (Capitel 5) vollständig aufgelöst worden.

Im zweiten Theile wird die Relation selbst gesucht, welche zwischen x und y Statt finden muſs, damit ein gegebener unbestimmter Integralausdruck zwischen bestimmten Grenzen genommen, unter allen möglichen Relationen, welche zwischen x und y Statt finden können, ein Max. oder Min. werde. Soll z. B. die Curve gefunden werden, welche, indem sie zwei gegebene Puncte mit einander verbindet, durch Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt; so kommt es offenbar darauf an, jene Relation oder Gleichung zwischen x und y aufzufinden, für welche das unbestimmte Integral [§ 178., (1] $2\pi \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ innerhalb bestimmter, durch die beiden gegebenen Puncte bedingten Grenzen genommen, ein Kleinstes wird. Solche Gröſste und Kleinste werden nach *Euler (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici etc. Lausannae et Genevae,* 1744*)* absolute Maxima und Minima genannt.

Der dritte Theil endlich beschäftigt sich mit der Aufgabe, unter allen Relationen zwischen x und y, für welche ein oder auch mehrere gegebene unbestimmte Integralausdrücke, diese innerhalb derselben Grenzen genommen, den nämlichen Werth erhalten, jene aufzufinden, für welche ein anderer, ebenfalls gegebener unbestimmter Integralausdruck zwischen denselben Grenzen genommen, ein Max. oder Min. wird. So würde sich z. B. die Aufgabe, unter allen Curven, welche zwischen zwei gegebenen Puncten einerlei Länge besitzen, diejenige zu finden, die durch Umdrehung um die Abscissenaxe die kleinste Oberfläche erzeugt, offenbar auf die Auffindung jener Relation oder Gleichung zwischen x und y reduciren, für welche von den beiden Integralausdrücken [§. 46., (1. und §. 178., (1.]:

genommen oder festgesetzt ist. Auch haben wir bereits in der Einleitung (§. 1) bemerklich gemacht, dafs solche Integrale, selbst wenn die Relation oder Gleichung $y = f(x)$ gegeben ist, nur innerhalb bestimmter Werthe von x ein Max. oder Min. haben können, indem diese nur zwischen solchen Grenzen einen festen Werth besitzen.

Die gröfsten und kleinsten Werthe solcher unbestimmter Integrale zwischen gegebenen Grenzen, werden nun mittelst der Variationsrechnung, und zwar zufolge des Satzes bestimmt, dafs für ein Max. oder Min. der variirenden Function u, die Variation δu gleich Null seyn mufs; denn ist u eine wachsende Gröfse und variirt dieselbe, so geht sie über in $u + \delta u$; ist sie dagegen eine abnehmende, so geht sie bei ihrer Variation in $u - \delta u$ über. Nimmt nun u zu und dann wieder ab, so, dafs u an irgend einer Stelle ein *Max.* erreicht, so geht die Variation δu aus den positiven in den negativen Zustand über, und geht also durch Null (oder Unendlich); das Umgekehrte findet für ein Min. Statt, in welchem Falle u zuerst ab, dann wieder zunimmt, also δu aus dem negativen in den positiven Zustand ebenfalls durch Null geht. In beiden Fällen ist also, im Puncte des Ueberganges, d. i. für ein Max. oder Min. von u (von den äufserst selten vorkommenden Fall von $\delta u = \infty$ abstrahirt): $\delta u = 0$. Das Umgekehrte hingegen findet nicht nothwendig Statt, und es kann die Variation $\delta u = 0$ seyn, ohne dafs für die aus dieser Bedingungsgleichung gefundenen Relation zwischen x und y, die Function u ein Max. oder Min. wird, d. h. ohne, dafs das unbestimmte Integral u innerhalb der gegebenen Grenzen genommen, für diese gefundene Relation gröfser oder kleiner wird als die Nachbarwerthe dieses Integrals, welche entstehen, indem man

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \quad \text{und} \quad 2\pi \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

diese zwischen den durch die beiden festen Puncte bestimmten Grenzen genommen, das erstere constant und das letztere ein Minimum wird.

Solche Gröfste und Kleinste heifsen (ebenfalls nach *Euler*) relative Maxima und Minima.

diese Relation zwischen x und y sich allmählig oder stetig ändern läſst. Man findet dann noch als nächste Bedingung, daſs für ein Max. $\delta^2 u < 0$ und für ein Min. $\delta^2 u > 0$ seyn muſs *).

*) Der analytische Beweis dieses Satzes ist, wie leicht zu begreifen, mit jenem in §. 42., Abschn. 1. (und der demselben am Schlusse angehängten Note) identisch. Ist nämlich

$$u = f(x, y, dx, dy)$$

und $u' = f(x + \delta x, \; y + \delta y, \; dx + \delta dx, \ldots)$,

so folgt nach der *Taylor*'schen Reihe (Abschn. 1., §. 19.):

$$u' - u = \left(\frac{du}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{d\,dx}\right)\delta dx + \left(\frac{du}{d\,dy}\right)\delta dy + W,$$

wo W die Summe aller übrigen, durchaus höhere Potenzen von δx, δy, ... enthaltenden, Glieder bezeichnet.

Aus den im angeführten §. 42. entwickelten Gründen müssen aber für die gröſsten oder kleinsten Werthe von u die mit den ersten Potenzen von δx, δy, ... verbundenen Glieder, weil diese mit den Variationen δx, δy, ..., die man positiv oder negativ nehmen kann, das Zeichen ändern, Null werden; und da ferner (§. 4.) die Summe dieser Glieder: $\left(\frac{du}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \ldots$, nichts anderes als die Variation von u ist, so hat man für ein Max. oder Min. von u: $\delta u = 0$.

Daſs man nicht umgekehrt aus $\delta u = 0$ unmittelbar auf ein Max. oder Min. von u schlieſsen darf, indem dazu noch erfordert wird, daſs auſserdem die Glieder, welche die zweiten Potenzen der Variationen enthalten, immer dasselbe Zeichen beibehalten, oder wenn diese Null werden, dann auch die mit den dritten Potenzen der Variationen verbundenen Glieder verschwinden, u. s. f., ist ebenfalls in dem erwähnten §. 42., wo man nur statt den Zunahmen h, k, ... die Variationen δx, δy, ... setzen darf, gehörig aus einander gesetzt worden.

Für den besondern, aber am gewöhnlichsten vorkommenden Fall, daſs $u = \int V dx$, und wenn y als Function von x angesehen wird,

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = f(x, y, p, q, \ldots)$$

ist, kann die Bedingung des Maxim. und Minim. auch auf folgende einfachere Art entwickelt werden.

Denkt man sich jene Relation zwischen x und y gefunden, für welche u oder das obige Integral innerhalb der gegebenen Grenzen genommen ein Max. oder Min. wird, und diese dann auf irgend eine Weise verändert, wodurch u in u_i übergeht; so hat man [Anmerk. auf S. 549, Reihe (p)]

$$u_i - u = \delta u \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 u \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \delta^3 u \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Ist nun $u = \int U$, so ist $\delta u = \int \delta U$, folglich für ein Gröſstes oder Kleinstes von $\int U$ auch $\int \delta U = 0$; dabei ist jedoch zu merken, daſs in dieser Bedingungsgleichung das Integral $\int \delta U$ zwischen den nämlichen Grenzen genommen werden muſs, zwischen welchen es eben ein Max. oder Min. seyn soll.

Ist U von der Form $V dx$, so ist die gemeinschaftliche Bedingungsgleichung des Max. und Minim.:

$$\delta \int V dx = \int \delta V . dx = 0,$$

wobei noch überdieſs für ein Max. $\delta^2 \int V dx = \int \delta^2 V dx < 0$, und für ein Minim. $\delta^2 \int V dx = \int \delta^2 V dx > 0$ seyn muſs; alles innerhalb der gegebenen Grenzen genommen.

Nun besteht aber die Entwicklung von $\int \delta U$ [§. 5., (1)] aus zwei wesentlich verschiedenen, ungleichartigen Theilen, indem der eine Theil vollkommen integrirt, der andere hingegen noch mit dem Integralzeichen behaftet und so lange nicht integrabel ist, als δx und δy ihre gegenseitige Unabhängigkeit oder vielmehr Unbestimmtheit, die aber gerade (§. 1. und 1. Note zu §. 7.) für die gegenwärtigen Untersuchungen die wesentlichste Bedingung ausmacht, beibehalten; es kann daher auch (ähn-

Es muſs aber offenbar für ein Maxim. oder Minim. von $u = \int V dx$ innerhalb der gegebenen Grenzen, selbst für die geringste Aenderung in der Relation zwischen x und y, d. i. für die kleinsten Werthe von i

$$\text{für ein Maxim.} \quad u_i - u < 0,$$
$$\text{und für ein Minim.} \quad u_i - u > 0$$

seyn, man mag i positiv oder negativ nehmen.

Berücksichtiget man also, daſs das Zeichen dieser Differenz $u_i - u$ für die kleinsten Werthe von i lediglich von jenem des ersten Gliedes der vorigen Reihe abhängt, und befolgt überhaupt genau die im ersten Abschnitt, §. 38. gebrauchte Beweisart; so findet man ganz einfach, wie dort, wenn man für u gleich seinen Werth setzt, als gemeinschaftliche Bedingung fürs

Maxim. und Minim.: $\delta \int V dx = \int \delta V dx = 0$;
Bedingung für ein Maxim.: $\delta^2 \int V dx = \int \delta^2 V dx < 0$;
Bedingung für ein Minim.: $\delta^2 \int V dx = \int \delta^2 V dx > 0$;

diese Integrale immer innerhalb der gegebenen Grenzen genommen (mit denselben Folgerungen, wie im angezogenen §. 38., wenn $\delta^2 u = 0$ seyn sollte).

lich dem Falle, in welchem in einer Gleichung rationale und irrationale Glieder vorkommen) diese Entwicklung nicht anders Null werden, als dafs die mit dem Integralzeichen behafteten Theile oder Glieder für sich Null werden. Bezeichnet man nämlich in diesen letztern die Coefficienten von δx und δy durch φ und ψ, so führt die Bedingungsgleichung $\int \delta U = 0$, welche sofort für ein Max. oder Min. von $\int U$ Statt finden mufs, auf jene

$$\int \varphi\, \delta x + \int \psi\, \delta y = 0,$$

und diese wieder auf die beiden folgenden:

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \psi = 0,$$

d. i. auf

$$\left.\begin{array}{r} M - dN + d^2 P - d^3 Q + \ldots = 0 \\ \text{und } M' - dN' + d^2 P' - d^3 Q' + \ldots = 0 \end{array}\right\} (\alpha.$$

Man sieht leicht, dafs für eine gröfsere Anzahl von variablen Gröfsen überhaupt eben so viele solcher Bedingungsgleichungen entstehen, als in δU von einander unabhängige Variationen vorkommen.

Enthält aber U blofs die beiden Variablen x, y, und läfst sich diese Function dabei auf die Form $V dx$ bringen; so folgt wegen $\varphi = -p\psi$ [§. 6., a)]:

$$\varphi = -\frac{dy}{dx}\psi \quad \text{oder} \quad \varphi dx + \psi dy = 0,$$

so, dafs also hier die eine Bedingung $\varphi = 0$ auch von selbst die andere $\psi = 0$ nach sich zieht, oder eigentlich beide Bedingungsgleichungen identisch, nämlich

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \ldots = 0 \quad (\beta$$

sind. Dasselbe findet auch für den vorigen Fall $\int \delta U$ Statt, wenn x nicht variirt und also $\delta x = 0$ ist; dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Grenzen dieses Integrals in Bezug auf x vollkommen festgesetzt sind.

Diese Bedingungsgleichungen (α im ersten, und jene (β im letztern Falle, sind genau dieselben, welche, wie wir in den §. §. 5. und 6. [(m und (n] gesehen haben, die Integralformeln $\int U$ und $\int V dx$ integrabel machen. Für

das Integral $\int V dx$ fallen sofort beide Bedingungsgleichungen zusammen und machen nur eine aus; diese Gleichung bestimmt dann, wenn sie nicht identisch, d. h. wenn nicht $V dx$ an und für sich schon integrabel ist, was aber bei den hieher gehörigen Problemen nicht ist und seyn darf, die Relation, welche zwischen x und y Statt finden muſs, wenn das unbestimmte Integral $\int V dx$ innerhalb gegebener Grenzen ein Max. oder Min. werden soll. *Lagrange* nennt diese Gleichung (β die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums; und bei geometrischen Problemen ist sie die Differentialgleichung der gesuchten Curve, welche eine gewisse verlangte Eigenschaft hinsichtlich eines Max. oder Min. besitzt. Es ist übrigens leicht zu sehen, daſs diese Differentialgleichung (β bis zur Ordnung $2n$ steigen kann, wenn in V noch der n^{te} Differentialquotient vorkommt *); es wird also auch die daraus hergeleitete Integralgleichung, die bei geometrischen Aufgaben sofort die Gleichung der gesuchten Curve selbst ist, im Allgemeinen $2n$ willkürliche Constanten enthalten.

Alles das hier Gesagte gilt auch von den beiden Gleichungen (α, welche auch hier die allgemeinen oder Bedingungsgleichungen des Gröſsten und Kleinsten heiſsen, in Bezug auf das Integral $\int U$.

*) Enthält z. B. V bloſs die Glieder x, y und $\frac{dy}{dx} = p$, so, daſs nur der erste Differentialquotient von y vorkommt; so ist dV von der Form (§ 4)

$$dV = M dx + N dy + P dp$$

oder auch $= \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dp}\right) dp$,

und für diesen Fall verwandelt sich die Differentialgleichung (β in folgende:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0, \quad \text{d. i.} \quad \left(\frac{dV}{dy}\right) - \frac{d\left(\frac{dV}{dp}\right)}{dx} = 0,$$

welche sofort von der zweiten Ordnung ist.

§. 8.

Nachdem nun zufolge der vorigen Bedingungsgleichungen (α der mit dem Integralzeichen behaftete Theil in der Entwicklung 1), §. 5. weggefallen ist, hat man noch

$$\int \delta U = A\delta x + Bd\delta x + Cd^2\delta x + \ldots$$
$$+ a\delta y + bd\delta y + cd^2\delta y + \ldots,$$

wenn man nämlich der Kürze wegen, die in der obigen Entwicklung vorkommenden Coefficienten von δx, $d\delta x$, ... δy, $d\delta y$, ... durch A, B, ... a, b, ... bezeichnet; oder es ist, wenn man die ganze Reihe gleich v setzt:

$$\int \delta U = v \ldots (n.$$

Um aber dieses Integral, wie es die Bedingung des Max. und Min. erfordert, zwischen den gegebenen Grenzen zu erhalten. darf man nur [Abschn. 2., §. 157., (5.] v für jede der beiden Grenzen bestimmen und dann die Differenz nehmen. Werden nämlich die Gröſsen x, y, ..., A, B, ..., a, b, ... für die erste Grenze oder den Anfang des Integrals mit einem, und für die zweite Grenze oder das Ende des Integrals mit zwei Accenten ausgezeichnet, und setzt man

$$A'\delta x' + B'd\delta x' + C'd^2\delta x' + \ldots$$
$$\ldots + a'\delta y' + b'd\delta y' + \ldots = v',$$
$$A''\delta x'' + B''d\delta x'' + C''d^2\delta x'' + \ldots$$
$$\ldots + a''\delta y'' + b''d\delta y'' + \ldots = v'';$$

so ist innerhalb der bestimmten Grenzen:

$$\int \delta U = v'' - v'.$$

Man erhält also für ein Gröſstes oder Kleinstes des Integrals $\int U$ zwischen den gegebenen Grenzen genommen, auſser jenen (α (§. 7.), noch die Bedingungs- oder sogenannte Grenzen-Gleichung:

$$v'' - v' = 0 \ldots (\gamma.$$

Diese Gleichung (γ enthält, wie man aus den Werthen von v' und v'' ersieht, keine andern als solche Gröſsen, welche sich auf die beiden Grenzen des Integrals $\int U$

beziehen, und die daraus folgenden Bedingungen dienen im Allgemeinen zur Bestimmung der bei der Integration der allgemeinen Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ eingeführten willkürlichen Constanten. Es können aber in dieser Bedingungsgleichung die Gröſsen δx, δy, $d\delta x$, u. s. w. Null, oder auch durch gegebene Bedingungen auf irgend eine andere Art mit einander verbunden seyn, je nachdem diese Grenzen *a*) fest oder *b*) veränderlich sind.

a) Das erstere findet z. B. Statt, wenn unter allen Curven, welche durch zwei bestimmte oder feste Puncte gehen, jene gesucht wird, deren Länge zwischen diesen Puncten ein Minimum ist; denn sind x', y' die Coordinaten des ersten, und x'', y'' jene des zweiten Punctes; so muſs das unbestimmte Integral $\int U$ zwischen diesen nämlichen Grenzen, d. i. so genommen werden, daſs es im erstern Puncte anfängt und im letztern endet. Da aber diese beiden Puncte zugleich allen Curven angehören, die man sich durch die stetige Veränderung, d. i. durch das Variiren der gesuchten, nur immer denken mag; so sind ihre Variationen gleich Null, und man hat

$$\delta x' = 0,\ \delta y' = 0 \text{ und } \delta x'' = 0,\ \delta y'' = 0.$$

Es fallen demnach in diesem Falle alle Glieder in $v'' - v' = 0$ von selbst heraus, welche diese Gröſsen enthalten; kommen auſser diesen keine andern Gröſsen darin vor, so wird diese Gleichung genau erfüllt, oder, ohne eine sonstige Bedingung oder Relation für die willkürlichen Constanten zu liefern, identisch Null. Die Curve, welche den Gleichungen (α) $\varphi = 0$, $\psi = 0$, oder wenn $U = V dx$, jener (β) $\varphi = 0$ entspricht, löst dann die Aufgabe vollständig auf, wenn man die erstere nur noch der Bedingung unterwirft, daſs sie durch die beiden Puncte x', y' und x'', y'' gehet; welches sich (um nur vom letztern Falle von $U = V dx$ zu reden) im Allgemeinen mittelst der beiden willkürlichen Constanten bewerkstelligen läſst, die in der, dieser Differentialgleichung $\varphi = 0$ der zweiten Ordnung (§. 7., indem V bei dieser Aufgabe nur den ersten Differentialquo-

tienten $\frac{dy}{dx}$ enthält) entsprechenden Integralgleichung, enthalten sind.

Kommen hingegen in dieser Gleichung $v'' - v' = 0$ außerdem noch die mit den Variationen $\delta dx'$, $\delta dy'$ und $\delta dx''$, $\delta dy''$ behafteten Glieder vor, und soll in dem hier gegebenen Beispiele, außer den vorigen beiden Bedingungen, die Curve auch noch so beschaffen seyn, daß die in den Grenzpuncten (x', y' und x'', y'') an diese Curven gezogenen Tangenten, eine gegebene Neigung besitzen; so werden auch diese Glieder noch von selbst herausfallen, indem in diesen Endpuncten dann die Differentiale dy, dx beständig, also ihre Variationen Null sind. Es ist aber leicht zu sehen, daß in diesem letztern Falle, wenn es möglich seyn soll, die Curve außer den beiden ersten (daß sie durch zwei fixe Puncte gehet) auch noch den beiden letztern Bedingungen, hinsichtlich der bestimmten Neigungswinkel der in den Grenzpuncten errichteten Tangenten zu unterwerfen, die resultirende Endgleichung (der Curve) um zwei willkürliche Constanten mehr, als im vorigen Falle enthalten, also die Differentialgleichung (oder allgemeine Bedingungsgleichung des Maximums oder Minimums) $\varphi = 0$ von der vierten Ordnung seyn muß.

b) Das letztere, oder daß die Grenzen veränderlich sind, findet z. B. in folgender Aufgabe Statt: Unter allen Curven BC, $B'C'$, . . . welche man zwischen
Fig. 69. den beiden gegebenen Curven GH, IK (Fig. 69) ziehen kann, jene zu finden, deren Länge ein Maximum oder Minimum ist.

Da hier die Endpuncte der gesuchten Curve nicht wie im vorigen Falle gegeben, sondern nur in so weit bestimmt sind, daß sie auf den beiden gegebenen Curven liegen sollen; so sind diese veränderlich und bewegen sich, so wie man in der stetigen Aufeinanderfolge der Curven (welche entstehen, wenn man sich die gesuchte Curve variirt denkt) von einer Curve BC zur nächstfolgenden $B'C'$ übergeht; es sind daher auch die Abscissen, welche dem Anfange und

Ende, d. i. den beiden Grenzen des Integrals entsprechen, nach der Variation desselben, nicht mehr die nämlichen, wie vor der Variation; die darauf bezüglichen Ordinaten aber haben sich nach dem, durch die Natur der beiden gegebenen Curven GH und IK bedingten Gesetze geändert. Sind nämlich $f(x, y) = o$ und $\varphi(x, y) = o$ die Gleichungen dieser beiden gegebenen Curven GH, IK; so ist die Relation der Coordinaten x', y' durch $f(x', y') = o$ und jener x'', y'' durch $\varphi(x'', y'') = o$ gegeben, und es werden die Werthe von $\delta x'$, $\delta y'$ und $\delta x''$, $\delta y''$ beziehungsweise durch die Variationen der Gleichungen $f(x', y') = o$ und $\varphi(x'', y'') = o$ erhalten, wodurch sofort auch der Zusammenhang oder die gegenseitige Beziehung dieser Variationen $\delta x'$, $\delta y'$ und $\delta x''$, $\delta y''$ bestimmt wird; es bestehen nämlich zwischen den Variationen der Abscissen und zugehörigen Ordinaten dieselben Relationen, welche zwischen ihren Differentialen in Bezug auf die Curven GH und IK Statt finden. Man wird also diese aus den beiden genannten Gleichungen abgeleiteten Variationen in die obige Bedingungsgleichung (γ einführen, und um derselben Genüge zu leisten, die Coefficienten der von einander unabhängigen Variationen, jeden für sich genommen, gleich Null setzen.

Man erhält auf diese Weise überhaupt, wenn die obige Bedingungsgleichung (β von der $2n^{ten}$ Ordnung ist, aus der Grenzengleichung (γ $2n$ Bedingungs- oder Grenzengleichungen zur Bestimmung der $2n$ willkürlichen Constanten der Integration dieser allgemeinen Gleichung (β des Maximums oder Minimums.

Enthält die Function $\int U$ auch Differentiale von höhern Ordnungen, so wird dadurch die Anzahl der in der Bedingungsgleichung $\rho'' - \rho' = o$ vorkommenden Glieder vergrößert, und man kann hinsichtlich der Grenzen noch neue Bedingungen, wie z. B. jene, daß die gesuchte Curve zugleich die beiden gegebenen GH und IK berühren solle, hinzufügen. Dieser letztern Bedingung zufolge, müssen nämlich in den Grenzen des Integralausdrucks nicht

blofs die Werthe von x und y, sondern auch noch jene ihrer Differentiale den Gleichungen der Curven GH und IK entsprechen; folglich sind in diesem Falle die Variationen $\delta dx'$, $\delta dy'$, $\delta dx''$ und $\delta dy''$ nicht mehr von einander unabhängig, sondern müssen mit den aus den Gleichungen der beiden Curven abgeleiteten zweiten Differentialien übereinstimmen.

Wir gehen nun sogleich, um das bisher Vorgetragene zu erläutern, zur Auflösung einiger interessanten Aufgaben über.

Aufgaben.

§. 9.

Aufgabe 1.

Die kürzeste Linie zu finden, welche man *a*) zwischen zwei gegebenen Puncten, und *b*) zwischen zwei gegebenen in einer Ebene liegenden Curven ziehen kann.

Auflösung.

Da die Länge einer ebenen Curve*) überhaupt durch das Integral (Abschn. 2., §. 174.) $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ dargestellt wird, so handelt es sich hier lediglich darum, jene Relation zwischen x und y zu finden, für welche dieses Integral, innerhalb bestimmter Grenzen, ein Minimum wird.

Es ist hier $U = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, folglich

$$\delta U = \delta \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \delta dx + dy \delta dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{dx \delta dx + dy \delta dy}{ds}$$

und daher

$$\int \delta U = \int \frac{dx}{ds} d\delta x + \int \frac{dy}{ds} d\delta y,$$

wenn man nämlich [§ 3., (1] das Variationszeichen hinter das Differentialzeichen setzt. Durch theilweise Integration

*) Es kann nämlich offenbar hier nur eine einfach gekrümmte Curve die Aufgabe auflösen, welche man in *b*) noch aufserdem in der Ebene der beiden gegebenen Curven annehmen wird.

[Abschn. 2., §. 124., (α] erhält man daraus

$$\int\delta U = \frac{dx}{ds}\delta x - \int\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\delta y - \int\delta y\, d\frac{dy}{ds}$$

oder $\int\delta U = \frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y - \int(d\frac{dx}{ds}\delta x + d\frac{dy}{ds}\delta y) \ldots (m;$

wird nun, wie es (§. 7.) die Bedingung für ein Maximum oder Minimum von $\int\delta U$ fordert, der summatorische oder mit dem Integralzeichen behaftete Theil gleich Null gesetzt; so erhält man die Bedingungsgleichungen [§. 7., (α]:

$$d\frac{dx}{ds} = 0 \text{ und } d\frac{dy}{ds} = 0 \quad (\varphi = 0 \text{ u. } \psi = 0)$$

also durch Integration daraus

$$\frac{dx}{ds} = c \text{ und } \frac{dy}{ds} = c',$$

folglich auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'}{c} = C \text{ oder } dy = C\,dx,$$

und daraus endlich:

$$y = Cx + C' \ldots (\alpha$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die sofort für die gesuchte Curve in beiden Fällen a) und b) gemeinschaftlich gilt *).

*) Da sich hier die Function U auf $V\,dx$ bringen läſst, indem dafür, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt, $V = \sqrt{(1 + p^2)}$ ist; so wollen wir, zur Uebung, diese Aufgabe auch mit Rücksicht auf diese Form auflösen.

Wegen $dV = \frac{1}{V}p\,dp$ ist, zufolge der Gl. a), §. 4.:

$$M = 0,\ N = 0,\ P = \frac{p}{V},\ Q = R = \ldots = 0;$$

folglich, wegen $\frac{dP}{dx} = \frac{V\,dp - p\,dV}{V^2\,dx}$ die Bedingungsgleichung des Maximums oder Minimums (β, §. 7.:

$$V\,dp - p\,dV = 0 \quad (\varphi = 0);$$

daraus folgt $\frac{dp}{p} = \frac{dV}{V}$, oder wenn man integrirt:

$$lp = lcV \text{ oder } p = cV, \text{ d. i. } p = c\sqrt{(1 + p^2)}$$
$$\text{oder } p^2 = c^2 + c^2p^2,$$

a) Da nun diese Gerade im ersten Falle noch die beiden gegebenen Puncte, deren Coordinaten wir durch x', y' und x'', y'' bezeichnen wollen, verbinden muſs, und da ferner die Gleichung (n, §. 8., hier folgende ist [wenn man in der obigen Gleichung (m den mit dem Integralzeichen behafteten Theil, in Folge der bereits erfüllten Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ wegläſst]:

und daraus erhält man

$$p = \frac{c}{\sqrt{(1-c^2)}};$$

Setzt man endlich für p seinen Werth, und statt des unbestimmten Bruches $c : \sqrt{(1-c^2)}$ die einfache unbestimmte Constante C; so erhält man:

$\frac{dy}{dx} = C$, oder $dy = C\,dx$, und daraus $y = Cx + C'$

wieder wie zuvor die Gleichung einer Geraden, welche die Aufgabe vollständig auflöst, indem auch hier die auf die Grenzen sich beziehende Bedingungsgleichung $v'' - v' = 0$ identisch Null wird; denn da hier der Integralausdruck 2), §. 6., nach Hinweglassung des summatorischen Theils (wegen $\varphi = 0$)

$$\delta \int V dx = V \delta x + \frac{p}{V}(\delta y - p\,\delta x) \quad (= v)$$

ist, so folgt für diese Bedingungsgleichung:

$$V(\delta x'' - \delta x') + \frac{p}{V}(\delta y'' - \delta y' + p\,\delta x' - p\,\delta x'') = 0,$$

welche sich offenbar, wegen $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta x'' = 0$ und $\delta y'' = 0$ von selbst erfüllt.

Noch einfacher ist folgender Gang:

Weil hier die Function U die Form $V dx$ hat, so ist eine einzige der beiden vorigen Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ hinreichend (d. i. es führen beide zu demselben Resultate); nimmt man davon z. B. gleich die erste, nämlich $d\frac{dx}{ds} = 0$; so erhält man daraus durch Integration:

$$\frac{dx}{ds} = c \text{ oder } dx = c\sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

und wenn man quadrirt:

$$dx^2 = c^2 dx^2 + c^2 dy^2,$$

oder wenn man dy bestimmt und $\frac{\sqrt{(1-c^2)}}{c} = C$ setzt:

$$dy = C\,dx;$$

daraus folgt endlich durch Integration wieder wie oben:

$$y = Cx + C'.$$

$$o = \frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y;$$

so erhält man für die Bedingungsgleichung (γ, §. 8., welche sich auf die Grenzen, innerhalb welcher das Integral zu nehmen ist, d. i. hier auf die festen Puncte x', y' und x'', y'' beziehet:

$$\beta)\ \frac{dx''}{ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{ds''}\delta y'' - \left(\frac{dx'}{ds'}\delta x' + \frac{dy'}{ds'}\delta y'\right) = o\ (v'' - v' = o)$$

eine Gleichung, welche sich, wegen $\delta x' = o$, $\delta y' = o$ und $\delta x'' = o$, $\delta y'' = o$ von selbst erfüllt oder identisch Null ist. Da nun diese letztere Gleichung keine weitere Relation liefert, so löst die gefundene Gleichung (α die Aufgabe vollständig auf, wenn man nur noch die beiden darin vorkommenden willkürlichen Constanten C, C' dergestalt bestimmt, dafs diese Gerade (α durch die beiden gegebenen Puncte x', y', x'', y'' geht. Dazu hat man aber aus (α ganz einfach: $y'' - y' = C(x'' - x')$, also

$$\gamma)\ C = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

und wegen $y - y' = C(x - x')$ endlich für die vollkommen bestimmte Gleichung der gesuchten Linie (vergl. Bd. II., §. 14., Aufg. 2.):

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

b) Für den zweiten Fall seyen die Differentialgleichungen der beiden gegebenen Curven, auf welchen die Endpuncte der gesuchten Linie liegen sollen: $dy = m\,dx$ und $dy = n\,dx$; so müssen die jetzt noch unbekannten Coordinaten x', y' und x'', y'' der Durchschnittspuncte der gesuchten Linie mit den gegebenen Curven, dergestalt bestimmt werden, dafs sie sowohl diesen beiden Differentialgleichungen, als auch der vorigen Bedingungsgleichung β) Genüge leisten. Nun folgt aus diesen beiden Differentialgleichungen:

$$\delta y' = m'\delta x' \text{ und } \delta y'' = n''\delta x'',$$

und wenn man diese Werthe in die genannte Gleichung β) substituirt:

$$\left(\frac{dx''}{ds''} + n''\frac{dy''}{ds''}\right)\delta x'' - \left(\frac{dx'}{ds'} + m'\frac{dy'}{ds'}\right)\delta x' = 0;$$

diese Gleichung zerfällt aber, weil die Variationen $\delta x'$ und $\delta x''$ von einander unabhängig sind, in die beiden folgenden:

$$dx'' + n''dy'' = 0 \text{ und } dx' + m'dy' = 0,$$

und daraus folgt:

$$\frac{dy''}{dx''} = -\frac{1}{n''} \text{ und } \frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{m'},$$

welche Gleichungen sofort die Bedingung ausdrücken, daſs (Abschn. 1., §. 45., Note, S. 150) die gesuchte Linie (α auf beiden gegebenen Curven normal seyn muſs.

Da nun aus der oben gefundenen Gl. [(α] $y = Cx + C'$, $\frac{dy}{dx} = C$, und zwar für alle Puncte der Geraden oder gesuchten Linie folgt; so werden die beiden vorigen Bedingungsgleichungen auch:

$$C = -\frac{1}{n''} \text{ oder } 1 + Cn'' = 0 \text{ und } 1 + Cm' = 0.$$

Da ferner, obschon die Werthe von x', y', x'', y'' noch unbekannt sind, dennoch [obige Gl. γ)]

$$C = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

seyn muſs; so folgt, wenn man diesen Werth in die beiden letzten Gleichungen substituirt:

$$(x'' - x') + n''(y'' - y') = 0$$
$$\text{und } (x'' - x') + m'(y'' - y') = 0.$$

Diese beiden Gleichungen, verbunden mit jenen beiden der gegebenen Curven, geben endlich durch Elimination die gesuchten Werthe oder Puncte x', y', x'', y'', durch welche die gefundene Gerade (α, welche unsere Aufgabe im zweiten Falle auflöst und sofort ein Kleinstes ist, gehen muſs.

Anmerk. Man kann auch zu denselben Gleichungen gelangen, wenn man zuerst die Grenzen als fest ansieht; dadurch erhält man, wie im vorigen Falle a), zwischen x und y die Gleichung:

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'),$$

und daher für das Integral $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ zwischen den Grenzen x', x'' genommen:

$$(x''-x')\sqrt{\left[1+\left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right)^2\right]}=\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2]}.$$

Von diesem Integralausdruck kann man nun nach der gewöhnlichen Methode durch bloſse Anwendung der Differentialrechnung das Minimum suchen, wenn man dabei noch die Abhängigkeit der Gröſsen x', y', x'', y'' von den beiden gegebenen Curven berücksichtiget.

§. 10.

Aufgabe 2.

Dasselbe Problem aufzulösen, wenn die vorigen Gröſsen im *Raume* gegeben sind.

Auflösung.

Da es sich in diesem Falle darum handelt, die Gröſsen y und z durch x so zu bestimmen, daſs (Abschn. 1., §. 98.) das Integral von $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=ds^2$ innerhalb gegebener Grenzen ein Minimum wird; so hat man wegen

$$\delta\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=\frac{dx\,\delta dx+dy\,\delta dy+dz\,\delta dz}{ds}:$$

$$\int\delta\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=\int\frac{dx}{ds}d\,\delta x+\int\frac{dy}{ds}d\,\delta y+\int\frac{dz}{ds}d\,\delta z$$
$$=\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z$$
$$-\int\left(d\frac{dx}{ds}\delta x+d\frac{dy}{ds}\delta y+d\frac{dz}{ds}\delta z\right)\,..\,(m',$$

wenn man nämlich wieder, wie im vorigen Falle, theilweise integrirt.

Der nicht integrirte Theil liefert sofort die drei Bedingungsgleichungen:

$$d\frac{dx}{ds}=0,\quad d\frac{dy}{ds}=0\quad\text{und}\quad d\frac{dz}{ds}=0;$$

daraus folgt durch Integration:

$$\frac{dx}{ds}=c,\quad \frac{dy}{ds}=c',\quad \frac{dz}{ds}=c'',$$

und daraus wieder durch Division:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{c}{c''} = C \text{ und } \frac{dy}{dz} = \frac{c'}{c''} = C';$$

endlich erhält man aus diesen beiden Gleichungen, durch abermalige Integration:

$$x = Cz + K$$
$$y = C'z + K'$$

die Gleichungen einer geraden Linie im Raume [Bd. II., §. 165., Gl. (1].

a) Sind die beiden Puncte x', y', x'', y'', durch welche diese Linie gehen soll, gegeben, also fest; so wird die obige Bedingungsgleichung [(γ, §. 8.] $v'' - v' = 0$ von selbst erfüllt und liefert also keine besondere Relation zwischen x', x'', y', y''; was aber auch nicht nöthig ist, indem sich die vorigen willkürlichen Constanten C, C', K, K' immer leicht so bestimmen lassen, daſs die Gerade in der That durch die gegebenen Puncte geht. Man findet nämlich nach dieser Bestimmung (Bd. II., § 168., Aufg. 1.), für die Gleichungen der gesuchten kürzesten Linie:

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z') \text{ und } y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z').$$

b) Soll die gesuchte Linie zwischen einem gegebenen festen Punct x', y' und einer krummen Fläche, deren Differentialgleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ ist, gezogen werden; so ist für die erste Grenze (den fixen Punct): $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z' = 0$, also auch $v' = 0$, und für die zweite Grenze:

$$\delta z'' = p'' \delta x'' + q'' \delta y'';$$

es ist daher [die aus dem integrirten Theil der Gl. (m' fliessende Bedingungsgleichung]:

$$\frac{dx''}{ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{ds''}\delta y'' + \frac{dz''}{ds''}p''\delta x'' + \frac{dz''}{ds''}q''\delta y'' = 0 \quad (v'' = 0)$$

oder auch, wenn man reducirt:

$$(dx'' + p''dz'')\delta x'' + (dy'' + q''dz'')\delta y'' = 0 \ldots (a,$$

welche Bedingungsgleichung, da $\delta x''$ und $\delta y''$ von einander unabhängig sind, sofort wieder in die beiden folgenden

$$dx'' + p''dz'' = o \text{ und } dy'' + q''dz'' = o$$

zerfällt und woraus also folgt, dafs die gesuchte Gerade auf der gegebenen Fläche normal seyn mufs [Abschn. 1., §. 88., (g].

c) Soll diese kürzeste Linie durch einen festen Punct und eine auf der vorigen Fläche liegende Curve gehen, so wird wieder $v' = o$ und man erhält, wenn die Differentialgleichung der Projection dieser Curve auf die Ebene der xy, $dy = m\,dx$ ist, wodurch auch $\delta y'' = m''\delta x''$ wird, für die Gleichung $v'' = o$ [wenn man diesen Werth von $\delta y''$ in der obigen Gl. (α substituirt]:

$$dx'' + p''dz'' + (dy'' + q''dz'')\,m'' = o;$$

und diese Gleichung drückt, wie man leicht findet, die Bedingung aus, dafs in diesem Falle die gerade Linie die gegebene Curve (von doppelter Krümmung) rechtwinkelig schneidet.

d) Sollen beide Endpuncte der kürzesten Linie auf zwei gegebenen krummen Flächen liegen, deren Differentialgleichungen (Abschn. 1., §. 82) $dz = m\,dx + n\,dy$ und $dz = p\,dx + q\,dy$ sind; so hat man

$$\delta z' = m'\delta x' + n'\delta y', \quad \delta z'' = p''\delta x'' + q''\delta y'',$$

also wieder (wegen $v'' - v' = o$):

$$(dx'' + p''dz'')\,\delta x'' + (dy'' + q''dz'')\,\delta y''$$
$$- (dx' + m'dz')\,\delta x' - (dy' + n'dz')\,\delta y' = o;$$

diese Bedingungsgleichung zerfällt in die vier folgenden:

$$dx'' + p''dz'' = o, \quad dy'' + q''dz'' = o$$
$$dx' + m'dz' = o, \quad dy' + n'dz' = o$$

und diese zeigen [Abschn. 1., §. 88., (g, wenn man daraus die Differentialgleichungen entwickelt], dafs die kürzeste Entfernung zweier krummen Flächen ihre gemeinschaftliche Normale ist.

e) Soll endlich die gesuchte Linie der ganzen Länge nach auf der krummen Fläche, deren Differentialgleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ ist, liegen und durch zwei gegebene Puncte derselben gehen; so müssen schon die allgemeinen Werthe von δx, δy, δz, welche noch vor der In-

tegration unterm Integralzeichen stehen, dieser Differentialgleichung Genüge leisten; oder es muſs $\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$ seyn.

Wird demnach dieser Werth in der obigen Integralgleichung (m' substituirt, so erhält man

$$\int \delta U = \int \frac{dx}{ds} d\delta x + \int \frac{dy}{ds} d\delta y + \int \frac{dz}{ds} d(p\,\delta x + q\,\delta y)$$
$$= \left(\frac{dx}{ds} + p\frac{dz}{ds}\right)\delta x + \left(\frac{dy}{ds} + q\frac{dz}{ds}\right)\delta y$$
$$- \int\left[\left(d\frac{dx}{ds} + p\,d\frac{dz}{ds}\right)\delta x + \left(d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds}\right)\delta y\right]$$

und daraus die beiden Bedingungsgleichungen ($\varphi = 0$ und $\psi = 0$):

$$m)\quad d\frac{dx}{ds} + p\,d\frac{dz}{ds} = 0 \text{ und } d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds} = 0;$$

von diesen reicht aber (§. 6) schon eine hin, weil hier die Function U auf die Form $V dx$ gebracht werden kann. Eine dieser beiden Gleichungen also, mit jener der gegebenen Fläche verbunden, bilden sofort die Gleichungen der gesuchten Curve, d. i. der kürzesten Linie, welche man in dieser Fläche zwischen zweien ihrer Puncte ziehen kann.

Wir wollen diesen letztern Fall noch durch einige Beispiele erläutern.

Beispiel 1.

Es sey z. B. die krumme Fläche der gewöhnliche gerade Cylinder vom Halbmesser a und die Axe der y zugleich dessen Axe; so ist die Gleichung dieser Fläche [Bd. II., §. 184., Gl. l), wo y mit z zu verwechseln ist]:

$$x^2 + z^2 = a^2,$$

folglich ihre Differentialgleichung:

$$dz = -\frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}\,dx,$$

so, daſs also hier $p = \frac{-x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ und $q = 0$ ist.

Die letztere der beiden vorigen Bedingungsgleichungen wird daher für dieses Beispiel:

$d\,\frac{dy}{ds} = 0$, und daraus folgt durch Integration: $\frac{dy}{ds} = C$

$$\text{oder: } dy = C\,ds = C\,dx\sqrt{\left[(1+p^2)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]},$$

$$\text{d. i. } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C^2\left[1+p^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right];$$

aus dieser letzten Gleichung folgt ferner, wenn man den unbestimmten constanten Factor $\frac{C}{\sqrt{(1-C^2)}} = b$ setzt:

$$\frac{dy}{dx} = b\sqrt{(1+p^2)} \text{ oder } dy = \frac{b\,a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

woraus endlich durch Integration folgt:

$$y = ab.\ arc.\ sin.\left(\frac{x}{a}\right) + C'.$$

Die Gleichungen der kürzesten Linie, welche zwei Puncte der Cylinderfläche verbindet, sind demnach:

$$x^2 + z^2 = a^2 \text{ und } y = ab.\ arc.\ sin.\left(\frac{x}{a}\right) + C'$$

welche sofort (Bd. II., §. 187., wo ebenfalls y mit z zu verwechseln ist) der Schraubenlinie angehören. Die Constanten der Integrationen C und C' sind aus den Bedingungen zu bestimmen, dafs die gesuchte Curve durch zwei gegebene Puncte gehen soll.

Die Richtigkeit des gefundenen Resultates erhellet auch aus dem Umstande, dafs wenn die Cylinderfläche in eine Ebene abgewickelt wird, die gesuchte Curve auch jetzt noch unter allen Curven welche in dieser Ebene zwischen den beiden gegebenen Puncten gezogen werden kann, die kürzeste, also eine Gerade seyn mufs; was in der That auch mit der Definition der Schraubenlinie übereinstimmt.

Beispiel 2.

Um auf der Kugel zwischen zwei gegebenen Puncten die kürzeste Linie zu finden, hat man, wenn ihr Mittelpunct zum Ursprung der rechtw. Coordinaten genommen wird, für die Gleichung dieser Fläche [Bd. II., §. 181, Gl. (2)]:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ oder } z = \sqrt{[(r^2 - x^2) - y^2]};$$

daraus folgt:

$$dz = \frac{-x\,dx}{z} - \frac{y\,ay}{z}$$

so, daſs also hier $p = -\frac{x}{z}$ und $q = -\frac{y}{z}$ ist.

Nimmt man zur Vereinfachung der Integration, beide Bedingungsgleichungen m) [gegenw. Paragr. (e], so erhält man, wenn darin für p und q die vorigen Werthe substituirt werden und ds als constant genommen wird:

$$\frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{ds} = 0 \text{ und } \frac{z\,d^2y - y\,d^2z}{ds} = 0;$$

daraus folgt durch Integration beziehungsweise:

$$z\,dx - x\,dz = c\,ds \text{ und } z\,dy - y\,dz = c'\,ds$$

wo c und c' die Constanten der Integration sind.

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen erhält man, wenn die unbestimmte Constante $\frac{c}{c'} = C$ gesetzt wird:

$$z\,dx - x\,dz = C\,(z\,dy - y\,dz)$$

oder wenn man mit dem integrirenden Factor $\frac{1}{z^2}$ multiplicirt, auch

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{z^2} = C\left(\frac{z\,dy - y\,dz}{z^2}\right);$$

diese Gleichung integrirt, gibt

$$\frac{x}{z} = C\,\frac{y}{z} + C' \text{ oder } x = Cy + C'z$$

welches sofort (Bd. II., §. 163., 1.) die Gleichung einer durch den Ursprung (Mittelpünct der Kugel) gehenden Ebene ist, wobei die beiden unbestimmten Constanten C, C' so zu bestimmen sind, daſs diese Ebene durch die beiden gegebenen Puncte der Kugelfläche gehet.

Da also diese letztere Gleichung, verbunden mit jener der gegebenen Kugelfläche, der gesuchten Linie angehören; so folgt, daſs der die beiden gegebenen Puncte verbindende größste Kreisbogen (wo von den beiden, wie gewöhnlich der kleinere verstanden wird) die gesuchte kürzeste Linie ist.

§. 11.

Aufgabe 3.

Die ebene Curve zu finden, welche zwei gegebene Puncte verbindend, durch Umdrehung um die Axe der x die *kleinste Oberfläche* erzeugt.

Auflösung.

Wird die Curve auf rechtw. Coordinaten-Axen bezogen, so ist die durch ihre Umdrehung um die Axe der x erzeugte krumme Oberfläche [§. 178., (1]:

$$w = 2\pi \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)};$$

und es muſs also der Bedingung der Aufgabe zufolge, die Relation zwischen x und y bestimmt werden, für welche das Integral $\int y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ zwischen den gegebenen Grenzen ein Minimum wird.

Es ist hier $U = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, folglich:

$$\delta U = y\frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{ds} + ds\,\delta y$$

und $$\int \delta U = \int \frac{y\,dx}{ds}\,d\delta x + \int \frac{y\,dy}{ds}\,d\delta y + \int ds\,\delta y$$

$$= \frac{y\,dx}{ds}\,\delta x + \frac{y\,dy}{ds}\,\delta y$$

$$- \int [d.\frac{y\,dx}{ds}\,\delta x + (d.\frac{y\,dy}{ds} - ds)\,\delta y].$$

Die Bedingungsgleichungen für das Maximum oder Minimum (§. 7., $\varphi = 0$ und $\psi = 0$) sind demnach:

$$d.\frac{y\,dx}{ds} = 0 \text{ und } d.\frac{y\,dy}{ds} - ds = 0$$

von denen jedoch wieder eine einzige hinreicht (oder welche beide identisch sind), indem sich auch hier die Function U auf die Form $V\,dx$ bringen läſst.

Benützt man davon die erstere als einfachere, so erhält man nach der ersten Integration:

$$y\,dx = c\,ds = c\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

oder, wenn man quadrirt: $(y^2 - c^2)\,dx^2 = c^2\,dy^2$, d. i.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y^2 - c^2)}}{c} \text{ oder: } dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{(y^2 - c^2)}} \text{ *)}.$$

Diese letzte Gleichung abermals integrirt, gibt [Abschnitt 2., §. 116., Form. (c)]:

$$x = c\,l[y + \sqrt{(y^2 - c^2)}] + c'$$

für die Gleichung der gesuchten Curve; dabei müssen die beiden unbestimmten Constanten c, c' dergestalt bestimmt werden, daſs diese Curve durch die beiden gegebenen Puncte geht.

Um die Natur dieser Curve näher zu untersuchen, wollen wir, da offenbar $y = c$ die kleinste mögliche Ordinate ist, den Durchschnitt dieser letztern mit der Abscissenaxe zum Ursprung nehmen; dadurch wird für $y = c$: $x = 0$, mithin ist $0 = c\,l\,c + c'$ und daraus $c' = -c\,l\,c$, so daſs nun unsere Gleichung in folgende übergeht:

$$x = c\,l\left(\frac{y + \sqrt{(y^2 - c^2)}}{c}\right).$$

*) Um zu sehen, wie auch die letztere der beiden obigen Bedingungsgleichungen zu demselben Resultate führt, hat man daraus:

$$d.\frac{y\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

oder, wenn man $\frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = u$ setzt:

$$d.\,uy = \frac{dy}{u}, \text{ d. i. } u\,dy + y\,du = \frac{dy}{u}$$

und aus dieser Gleichung:

$$\frac{dy}{y} = \frac{u\,du}{1 - u^2};$$

also, wenn man integrirt:

$$l\,y = l\,c - \tfrac{1}{2}\,l(1 - u^2) = l\,\frac{c}{\sqrt{(1 - u^2)}}$$

oder $y = \frac{c}{\sqrt{(1 - u^2)}}$, und wenn man quadrirt und für u wieder den Werth herstellt, auch: $y^2 = c^2 + c^2\,\frac{dy^2}{dx^2}$, woraus endlich wie oben folgt:

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{(y^2 - c^2)}}.$$

Nimmt man hingegen jenen Punct der Curve selbst, dessen Ordinate hier $= c$ ist, zum neuen Ursprung und durch diesen die Abscissenaxe mit der vorigen parallel; so muſs man in dieser letzten Gleichung statt y: $c + y$ setzen; dadurch wird endlich, wenn man auch noch die Abscissen- mit der Ordinatenaxe verwechselt, die Gleichung unserer Curve:

$$y = cl\left(\frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c}\right),$$

und dieſs ist [Abschn. 2., §. 213., *A*)] die Gleichung der gemeinen Kettenlinie (*Catenaria*), bei welcher die durch den Scheitel gehende Verticallinie die Abscissenaxe und der Scheitel den Ursprung der Coordinaten bildet; eine mit der Ordinatenaxe parallele Gerade, welche vom Scheitel nach abwärts um die Gröſse c absteht, bildet für die gegenwärtige Aufgabe die Umdrehungsaxe für diese durch die beiden gegebenen Puncte gehenden Curve, durch deren Umdrehung die Oberfläche ein Kleinstes wird, da hier offenbar nach der Natur der Kettenlinie, kein Maximum möglich ist.

§. 12.

Aufgabe 4.

Nach Grundsätzen der höhern Mechanik, braucht ein schwerer Punct, um in einer, in einer Verticalebene liegenden krummen Linie, von einem Puncte B bis zu einem andern, mit dem vorigen nicht in derselben Verticallinie befindlichen Puncte M, herabzugleiten, die Zeit $t = \int \frac{ds}{2\sqrt{[g(h-y)]}}$, wobei $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ das Element des Bogens, h die verticale Ordinate des höchsten Punctes B, y jene des veränderlichen Punctes M, und g den Fallraum frei fallender Körper in der ersten Secunde bezeichnet. Dieſs vorausgesetzt, soll die Na-

tur jener krummen Linie bestimmt werden, für welche diese Zeit t ein Minimum ist.

Auflösung.

Hier ist, wenn man Kürze halber $\sqrt{[4g(h-y)]} = v$ setzt:

$$U = \frac{ds}{v},$$

folglich $\int \delta U = \int \frac{v\,\delta ds - ds\,\delta v}{v^2} = \int \frac{\delta ds}{v} - \int \frac{ds}{v^2}\,\delta v$

oder wegen $\delta ds = \delta\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{ds}$ und

$\delta v = \delta\sqrt{[4g(h-y)]} = \frac{-4g\delta y}{2v} = -\frac{2g\delta y}{v}$, auch:

$$\int \delta U = \int \frac{dx}{v\,ds}\,d\delta x + \int \frac{dy}{v\,ds}\,d\delta y + \int \frac{2g\,ds}{v^3}\,\delta y$$

$$= \frac{dx}{v\,ds}\,\delta x + \frac{dy}{v\,ds}\,\delta y$$

$$- \int \left[d.\frac{dx}{v\,ds}\,\delta x + \left(d.\frac{dy}{v\,ds} - \frac{2g\,ds}{v^3}\right)\delta y\right].$$

Die Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ sind daher für dieses Beispiel:

$$d.\frac{dx}{v\,ds} = 0 \text{ und } d.\frac{dy}{v\,ds} - \frac{2g\,ds}{v^3} = 0,$$

von denen aber wieder eine hinreicht, weil U die Form $V\,dx$ annimmt.

Behält man die erstere, als einfachere bei; so erhält man nach der ersten Integration:

$$\frac{dx}{v\,ds} = C, \text{ oder:}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 2C\sqrt{[g(h-y)]},$$

welches die Differentialgleichung der Cycloide ist. Denn setzt man $h - y = z$, so wird

$$\frac{dx^2}{dx^2 + dz^2} = 4C^2 g z$$

und daraus: $dx = \frac{2C\sqrt{g}.\,dz\sqrt{z}}{\sqrt{(1-4C^2gz)}} = \frac{z\,dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{4C^2g}\,z - z^2\right)}}$

oder wenn die willkürliche Constante C durch $\frac{1}{\sqrt{(8cg)}}$ er-

setzt wird, wo nun c die unbestimmte Constante bezeichnet, auch [wie im ersten Abschnitt, §. 71., (3]:

$$dx = \frac{z\,dz}{\sqrt{(2cz - z^2)}}.$$

Nimmt man den ersten oder höchsten Punct B zum Ursprung der rechtw. Coordinaten x, z; so verschwindet in der, der vorigen Gleichung entsprechenden Integralgleichung, da für $x = 0$ auch $z = 0$ wird, die willkürliche Constante. Sind ferner α, β die Coordinaten des zweiten oder tiefern Punctes, so wird die obige Constante c (der Halbmesser des Erzeugungskreises) aus der Bedingung bestimmt, dafs für $x = \alpha$, $z = \beta$ seyn mufs.

Anmerk. 1. Obschon auch hier aus der Natur der Sache folgt, dafs kein Maximum, sondern nur ein Minimum Statt finden kann; so wollen wir dennoch, wenigstens an diesem Beispiele, die Anwendung von $\delta^2 \int V\,dx$ (§. 7.) zur Unterscheidung des Maximum und Minimum zeigen.

Da im gegenwärtigen Falle $V = \frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{g}.(h-y)^{\frac{1}{2}}}$ kein x enthält, und ferner auch die Grenzen, zwischen welchen die einzelnen Integralausdrücke genommen werden sollen, fest sind; so folgt aus der Entwiklung w) im §. 4., (Anmerk.) für dieses Beispiel:

$$n)\quad \delta^2 \int V\,dx = \int \left(\frac{d^2 V}{dy^2}\right) \delta y^2\,dx$$
$$+ 2\int \left(\frac{d^2 V}{dy\,dp}\right) \delta y\,\delta p\,dx + \int \left(\frac{d^2 V}{dp^2}\right) \delta p^2\,dx.$$

Nun ist aber, wie man ganz einfach findet:

$$\left(\frac{d^2 V}{dy^2}\right) dx = \frac{3(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\,dx}{8\sqrt{g}.(h-y)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3\,ds}{8\sqrt{[g(h-y)^5]}}$$

$$\left(\frac{d^2 V}{dy\,dp}\right) dx = \frac{p\,dx}{4\sqrt{g}.(h-y)^{\frac{3}{2}}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dy}{4\sqrt{[g(h-y)^3(1+p^2)]}}$$

und $$\left(\frac{d^2 V}{dp^2}\right) dx = \frac{dx}{2\sqrt{[g(h-y)(1+p^2)^3]}}.$$

Die oben für's Maximum und Minimum gefundene Bedingungsgleichung $d.\frac{dx}{v\,ds} = 0$ gibt, da hier dx und ds als constant anzusehen sind: $-\frac{dx\,dv}{v^2\,ds} = 0$, oder, wenn man für

v den Werth wieder herstellt:

$$\frac{2\sqrt{g}\cdot\frac{1}{2}(h-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy}{4g(h-y)\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{dy}{4\sqrt{[g(h-y)^3(1+p^2)]}} = 0$$

zu welchem Resultate man auch durch die 2. der beiden obigen Bedingungsgleichungen (obschon weniger einfach) gelanget.

Da also von den drei vorhergehenden Werthen oder Differentialquotienten, wie man sieht, der mittlere Null ist; so erhält man durch Substitution derselben in die Gleichung n):

$$\delta^2 \int V\,dx = \int \frac{3\,ds}{8\sqrt{[g(h-y)^5]}}\,\delta y^2$$
$$+ \int \frac{dx}{2\sqrt{[g(h-y)(1+p^2)^3]}}\,\delta p^2.$$

Da nun, indem die Quadratwurzel natürlich positiv zu nehmen ist, dieser Ausdruck unabhängig von δy und δp (d. h. es mag δy und δp positiv oder negativ genommen werden) die Integrale innerhalb der gegebenen festen Grenzen genommen, positiv bleibt; so entspricht unsere Auflösung in der That einem Minimum.

Anmerk. 2. Die Gleichung $v'' - v' = 0$ [§. 8., (γ)] ist für das gegenwärtige Beispiel:

$$\frac{dx''}{v''\,ds''}\,\delta x'' + \frac{dy''}{v''\,ds''}\,\delta y'' - \frac{dx'}{v'\,ds'}\,\delta x' - \frac{dy'}{v'\,ds'}\,\delta y' = 0.$$

Sind demnach, wie hier angenommen worden, die beiden Endpuncte der gesuchten Curve fest; so wird diese Bedingungsgleichung von selbst erfüllt oder identisch Null. Sollen dagegen diese Endpuncte z. B. auf zwei gegebenen Curven liegen, so findet man daraus [wie in der 1. Aufgabe, b)] dafs die gesuchte Curve auf den beiden gegebenen zugleich normal seyn mufs *).

*) Diese zuletzt behandelte Aufgabe bildet das berühmte Problem der Brachystochrone oder Linie des schnellsten Falles, welches *Joh. Bernoulli* in den *Act. Erud.* 1696 den Geometern seiner Zeit zur Auflösung vorlegte, und von welchem im nächstfolgenden Jahre (*Act. Erud.* 1697 und Philosoph. Transact. 1797) nebst seiner eigenen Auflösung, noch jene von Leibnitz, Newton, l'Hôspital u. m. A. bekannt wurden. Diefs war das erste Problem aus der Classe der absoluten Maxima und Minima, und von da an datirt sich auch die Entdeckung einer für diese Art von Untersuchungen, welche in der Folge unter der allgemeinen Benennung der isoperimetrischen Aufgaben begriffen wurden, passende Rechnung, die, nachdem *Euler*, wie in allen mathematischen Zweigen, auch hier wieder das Vorzüglichste

B) Relative Maxima und Minima.

§. 13.

Die Aufgabe der relativen Maxima und Minima besteht im Allgemeinen darin: unter allen Relationen zwischen x und y, bei welchen das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} U'$ einen gegebenen Werth A unverändert beibehält, diejenige aufzufinden, für welche das Integral $\int U$ innerhalb derselben Grenzen von $x = x'$ bis $x = x''$ genommen, ein Maximum oder Minimum wird.

Dieses Problem wird aufgelöst, indem man von der Function $\int U + a\int U'$, wo a einen constanten unbestimmten Factor bezeichnet, nach dem Vorhergehenden das absolute Maximum oder Minimum bestimmt, nämlich die Variation dieser Function gleich Null setzt. Denn hat man jene Relation zwischen x und y gefunden, für welche diese Function ein Maximum oder Minimum ist, so ist zu gleicher Zeit, da für alle übrigen Relationen $\int U'$ (der Bedingung gemäſs) immer denselben Werth A beibehält, auch $\int U$ selbst ein Maximum oder Minimum. Der unbestimmte Factor a dienet, die Gleichung $\int U' = A$ zu erfüllen, und er wird aus dieser gegebenen Gleichung selbst bestimmt. *)

geleistet hatte, endlich auf die Erfindung der Variationsrechnung durch *Lagrange* führte.

*) Die Regel, daſs man in diesem Falle für die Function $\int U + a\int U'$ das absolute Maximum oder Minimum suchen müsse, wurde schon, vor Erfindung der Variationsrechnung von *Euler* gegeben.

Allgemeiner noch läſst sich das vorliegende Problem so aussprechen: den unbestimmten Integralausdruck $\int U$ zwischen den gegebenen Grenzen $x = x'$, $x = x''$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, so, daſs zugleich eine willkührliche Anzahl von gegebenen Integralausdrücken: $\int U'$, $\int U''$, $\int U'''$, . . . zwischen denselben Grenzen genommen, die constanten gegebenen Werthe: A', A'', A''', . . . erhalten. Auch hier muſs man zur Auflösung dieses Problems für den Ausdruck

$$\int U + a'\int U' + a''\int U'' + a'''\int U'''' + \ldots$$

zwischen den gegebenen Grenzen das absolute Maximum

Ein Beispiel wird hinreichen, um das Gesagte zu erläutern.

§. 14.

Aufgabe 5.

Unter allen durch zwei gegebene Puncte gehenden gleich langen (isoperimetrischen) Curven diejenige zu finden, welche mit der Abscissenaxe und den beiden äussersten Ordinaten (§. 176., Erkl.) die gröſste oder kleinste Fläche einschlieſst.

Auflösung.

Da die gesuchte Curve bei gegebener Fläche die kleinste Länge, und bei gegebener Länge die gröſste Fläche einschlieſsen soll; so muſs die Länge der Curve, d. i. (§. 174) das Integral $\int\surd(dx^2 + dy^2)$ zwischen den gegebenen Grenzen ein Minimum, die Fläche hingegen (§. 176) $\int y\,dx$ ein Maximum seyn; es müssen also die Variationen beider dieser Integralausdrücke Null werden. Da aber beide genannten Eigenschaften bei ein und derselben Curve Statt finden sollen, so müssen auch beide Varationen mit einander verbunden werden. Multiplicirt man demnach, um einerlei Dimensionen herzustellen, das erste Integral mit dem constanten, unbestimmten Factor a; so hat man der Bedingung gemäſs:

$$\delta\int[y\,dx + a\surd(dx^2 + dy)^2] = 0 \quad (\delta\int U + \delta . a\int U' = 0).$$

Für $\surd(dx^2 + dy^2) = ds$ ist aber

$$\delta\surd(dx^2+dy^2) = \frac{dx\,\delta\,dx + dy\,\delta\,dy}{ds} \text{ und } \delta . y dx = y\,\delta\,dx + dx\,\delta y,$$

oder Minimum suchen, und die durch Integration der erhaltenen Bedingungsgleichungen eingeführten Constanten C, C', . . . aus den entstehenden Grenzgleichungen, die obigen willkürlichen Constanten a', a'', a''', . . . aber aus den gegebenen Gleichungen:

$$\int U' = A', \int U'' = A'', U''' = A''', \ldots$$

deren Zahl immer der Anzahl dieser Gröſsen a', a'', . . . gleich ist, bestimmen. (Vergl. auch die erste Note zu §. 7.)

folglich geht die vorige Bedingungsgleichung über in:

$$\int y\, d\delta x + \int dx\, \delta y + \int \frac{a\,dx}{ds}\, d\delta x + \int \frac{a\,dy}{ds}\, d\delta y = 0$$

oder, wenn man theilweise integrirt, in jene:

$$\left(y + \frac{a\,dx}{ds}\right)\delta x + \frac{a\,dy}{ds}\,\delta y$$
$$- \int \left[\left(dy + a\,d.\frac{dx}{ds}\right)\delta x + \left(a\,d.\frac{dy}{ds} - dx\right)\delta y\right] = 0.$$

Daraus erhält man als Bedingungsgleichungen für das Maximum oder Minimum ($\varphi = 0$ und $\psi = 0$):

$$dy + a\,d.\frac{dx}{ds} = 0 \text{ und } dx - a\,d.\frac{dy}{ds} = 0,$$

von denen wieder eine einzige hinreicht; die Rechnung wird indeſs einfacher, wenn man beide beibehält.

Durch Integration dieser Gleichungen erhält man:

$$y + a\,\frac{dx}{ds} = C \text{ und } x - a\,\frac{dy}{ds} = C', \text{ d.i.: } y - C = -\frac{a\,dx}{ds}$$
$$\text{und } x - C' = a\,\frac{dy}{ds}.$$

Werden diese beiden Gleichungen quadrirt und dann addirt, so erhält man:

$$\alpha)\quad (y - C)^2 + (x - C')^2 = a^2\left(\frac{dx^2 + dy^2}{ds^2}\right) = a^2$$

also [Bd. II., §. 15., (α] die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser a. Dabei werden die beiden Constanten der Integration C, C' (die Coordinaten des Mittelpunctes) aus der Bedingung, daſs dieser durch zwei gegebene Puncte gehen soll; jene a (der Halbmesser) hingegen, aus der gegebenen Länge der Curve $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = A$ bestimmt. Sind nämlich x', y', x'', y'' die Coordinaten der beiden gegebenen festen Puncte; so hat man zur Bestimmung von C, C' und a die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(y' - C)^2 + (x' - C')^2 = a^2\\ (y'' - C)^2 + (x'' - C')^2 = a^2\end{array}\right\} (1$$

$$\text{und } \int_{x'}^{x''} dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = A.$$

Es folgt aber aus der obigen Gleichung α), wenn man differentiirt, ganz einfach:

$$\int dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = \int \frac{dy}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{y-C}{a}\right)^2\right]}}$$

$$= a \, arc.sin. \left(\frac{y-C}{a}\right) + Const. \; [§. 116., (d]$$

folglich ist (Abschn. 2., §. 157.)

$$\int_{x'}^{x''} dx \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} \text{ d. i.}$$

$$A = a\left[arc.\,sin.\left(\frac{y''-C}{a}\right) - arc.\,sin.\left(\frac{y'-C}{a}\right)\right] \quad (2.$$

Diese Gleichungen (1 und (2 zeigen, dafs C, C' und a doppelte Werthe erhalten und dafs namentlich a, d. i. der Halbmesser des Kreises, bei einerlei numerischem Werth, sowohl positiv, als auch negativ genommen werden, der Kreis also gegen die Abscissenaxe convex oder concav seyn kann. Aus einer einfachen Betrachtung erhellet, dafs im vorliegenden Falle ein Maximum oder Minimum Statt findet, je nachdem a negativ oder positiv, d. i. je nachdem der Kreis gegen die Abscissenaxe concav oder convex ist *).

Anmerk. Die hier behandelte Aufgabe ist die einfachste unter den isoperimetrischen, so genannt, weil man Anfangs blofs Curven von einerlei Umfang oder Länge bei diesen Untersuchungen betrachtete **).

*) Auf dieselbe Art wird man auch leicht das Problem auflösen: unter allen isoperimetrischen Curven, welche durch zwei gegebene Puncte gehen, diejenige zu finden, die durch Umdrehung um die Axe der x die kleinste oder gröfste Oberfläche erzeugt.

In diesem Falle ist $\int U = \int 2\pi y \, dx \sqrt{(1+p^2)}$

und $\int U' = \int dx \sqrt{(1+p^2)} = A$ (für $\frac{dy}{dx} = p$)

und man erhält, ganz so wie im §. 11., für die gesuchte Curve die Kettenlinie, welche ein Maximum oder Minimum gibt, je nachdem die Curve gegen die Abscissen- als Umdrehungsaxe, concav oder convex ist.

**) Im (von *Grunnert* herausgegebenen) II. Band des 5. Theils des Klügel'schen mathematischen Wörterbuches finden jene, welche dieser Gegenstand interessirt, nebst einer weitläufigeren Entwicklung der Sätze und ihrer Anwendung, auch noch eine recht gute geschichtliche Zusammenstellung und die Literatur der Variationsrechnung.

Berichtigungen.

Seite 12, 1. Zeile soll statt dx stehen: dX.
» 36, 9. Z. v. u. soll statt $= 3a + h +$ stehen: $= 3a + 2h +$
» 64, 13. » » soll statt $\left(\frac{dy}{dy}\right)$ stehen: $\left(\frac{du}{dy}\right)$.
» 74, 3. » » fehlt nach dem ersten Differential du das Zeichen $=$
» 76, 12. Zeile soll statt $\left(\frac{du}{dx}\right)$ stehen: $\left(\frac{du}{dy}\right)$.
» 77, 7. u. 17. Z. fehlt im Resultate von $\frac{d^2 y}{dx^2}$ beide Male der Bruch $-\frac{\cos.^2 x}{4a^2 x^2 y^3}$.
» 108, 7. Z. v. u. soll statt 14. stehen: 15.
» 139, 13. Zeile soll statt ^2du stehen: d^2u.
» 155, 17. » soll statt Fig. 14 stehen: Fig 15.
» 181, 4. » soll das zweite Mal statt Evolute stehen: Evolvente.
» 235, 7. Z. v. u. soll statt $u = r$ stehen: $u = -r$.
» 321, 14. » » soll statt $\sqrt{(B^2 + G^2)}$ stehen: $\sqrt{(B^2 + C^2)}$.
» 351, 10. » » soll im letzten Integral statt X stehen: $\sqrt{X}$.
» 399, 7. Zeile ist bei A'_{n-1} der Accent undeutlich.
» 403, letzte Z. fehlt im Schlufsfactor $\frac{z^2}{2}$ der Exponent 2.
» 434, 21. Zeile ist das erste und durchzustreichen.
» 443, 13. » soll statt $AC'M'$ stehen: ACM'.
» — 16. » » » Cpm » CPm.
» — 18. » » » DCp » DCm.
» 536, 5. » soll statt dem stehen: den.
» 541, 6. » der Anmerk. statt mit den, soll stehen: mit dem.
» 590, 11. Z. v. u. soll statt $(dx^2 + dy)^2$ stehen: $(dx^2 + dy^2)$.

Nachträgliche Verbesserungen zum Ersten Bande.

Seite 66, 10. Z. v. u. soll das zweite Mal statt $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ stehen: $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
» 68, 6. Zeile soll statt $nv + A_1 b_1$ stehen: $nv - A_1 b_1$.
» 102, 5. Z. v. u. soll statt 2) stehen: (3.
» 147, 16. Zeile soll statt $F_1 = -2{\cdot}824$ stehen: $F_1 = -1{\cdot}176$.
» — 18. » » » 2·495 stehen: 2·490.
» 221, 17. » fehlt nach a_n das Glied $+ \Delta^1 a_n$.
» 311, 3. » soll statt $u + y$ stehen $a + y$.
» 404, vorletzte Zeile soll im Nenner statt 6^6 stehen: 5^6.

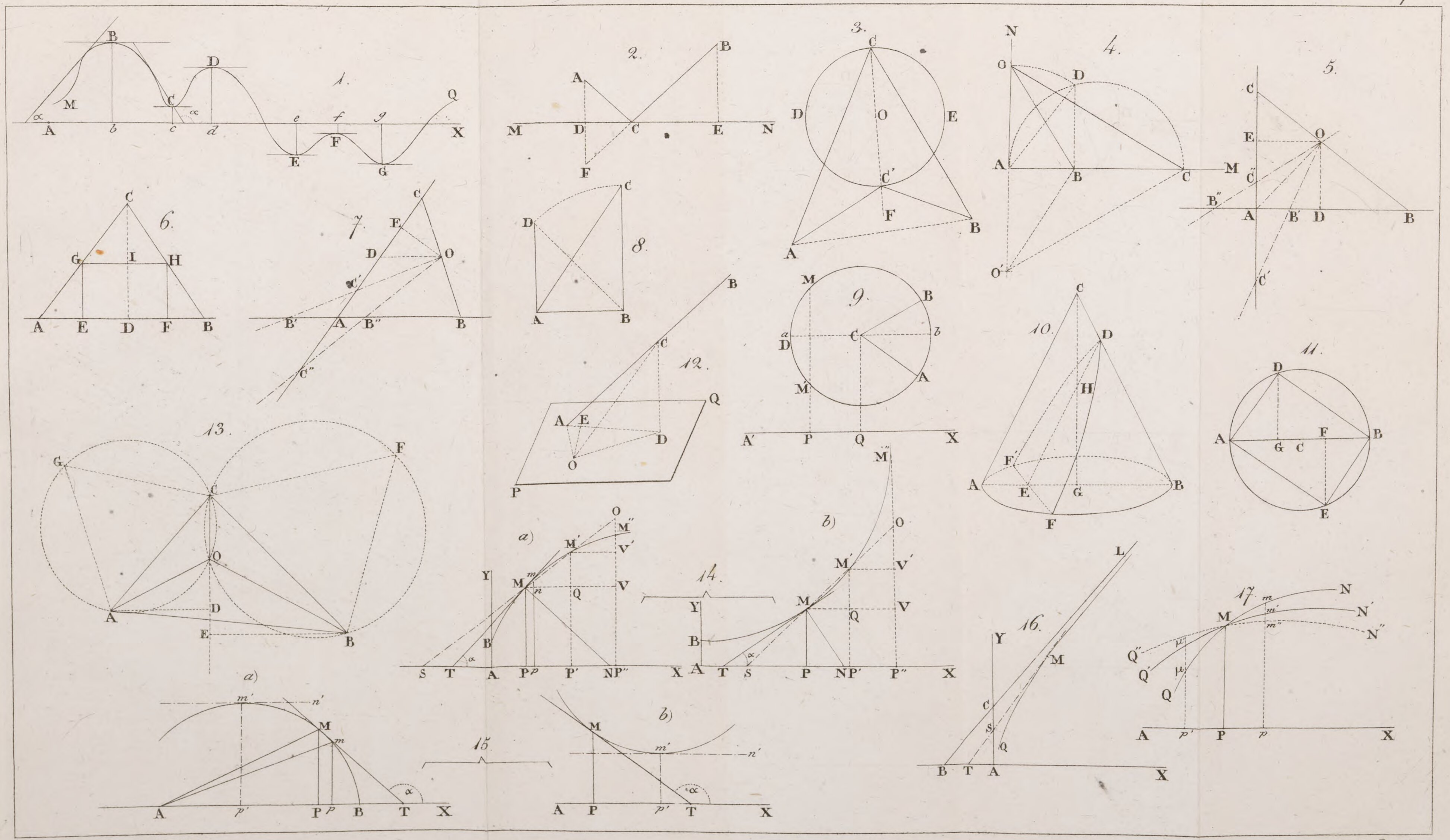
Zum zweiten Bande.

Seite 54, 3. Z. v. u. soll statt $y =$ stehen: $y - y' =$
» 105, 3. » » im Nenner, statt $p^2 - r^2$ soll stehen: $r^2 - p^2$.

Staatliche Bibliothek Bamberg

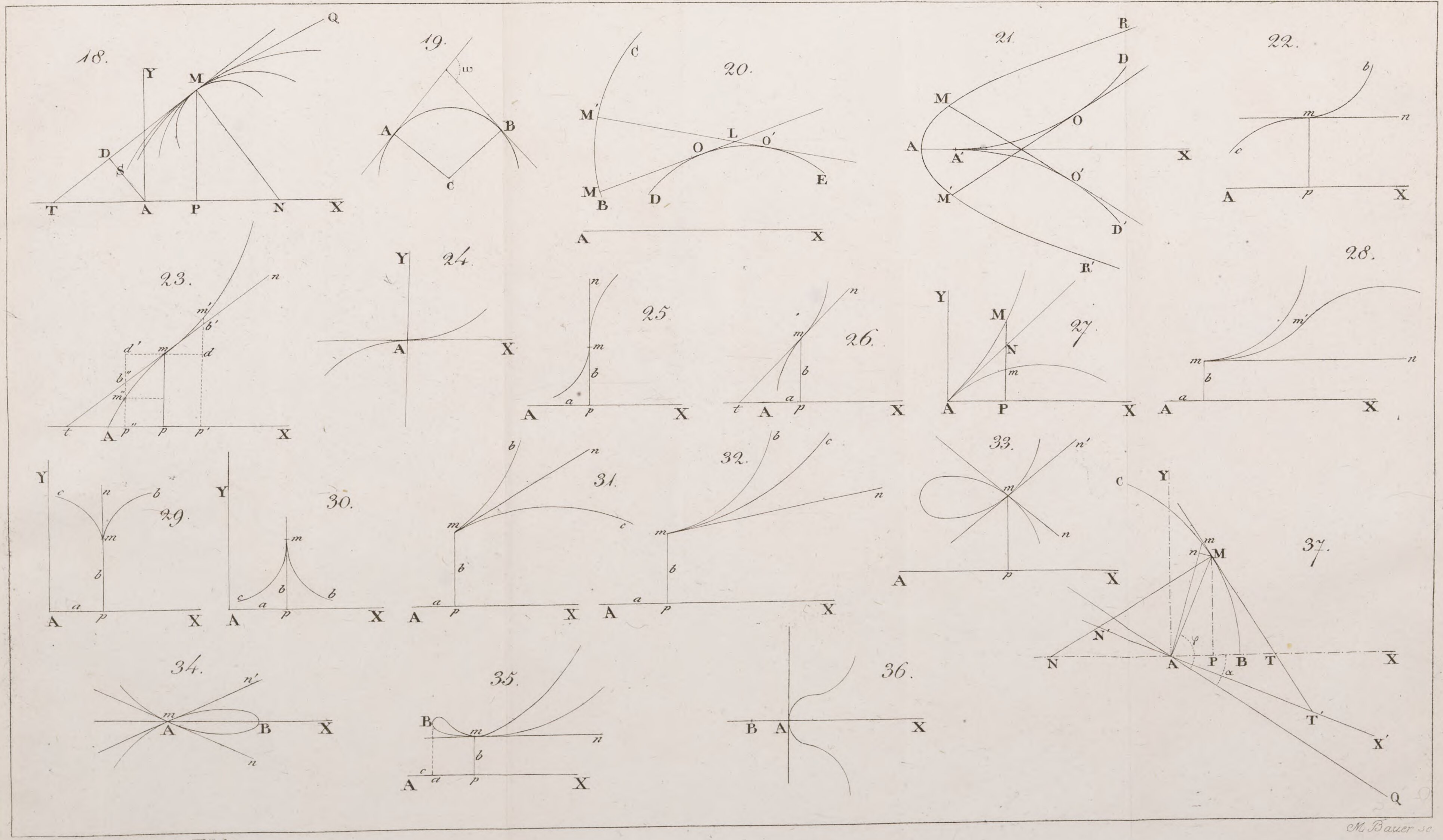
Berichtigungen.

Zum zweiten Bande.

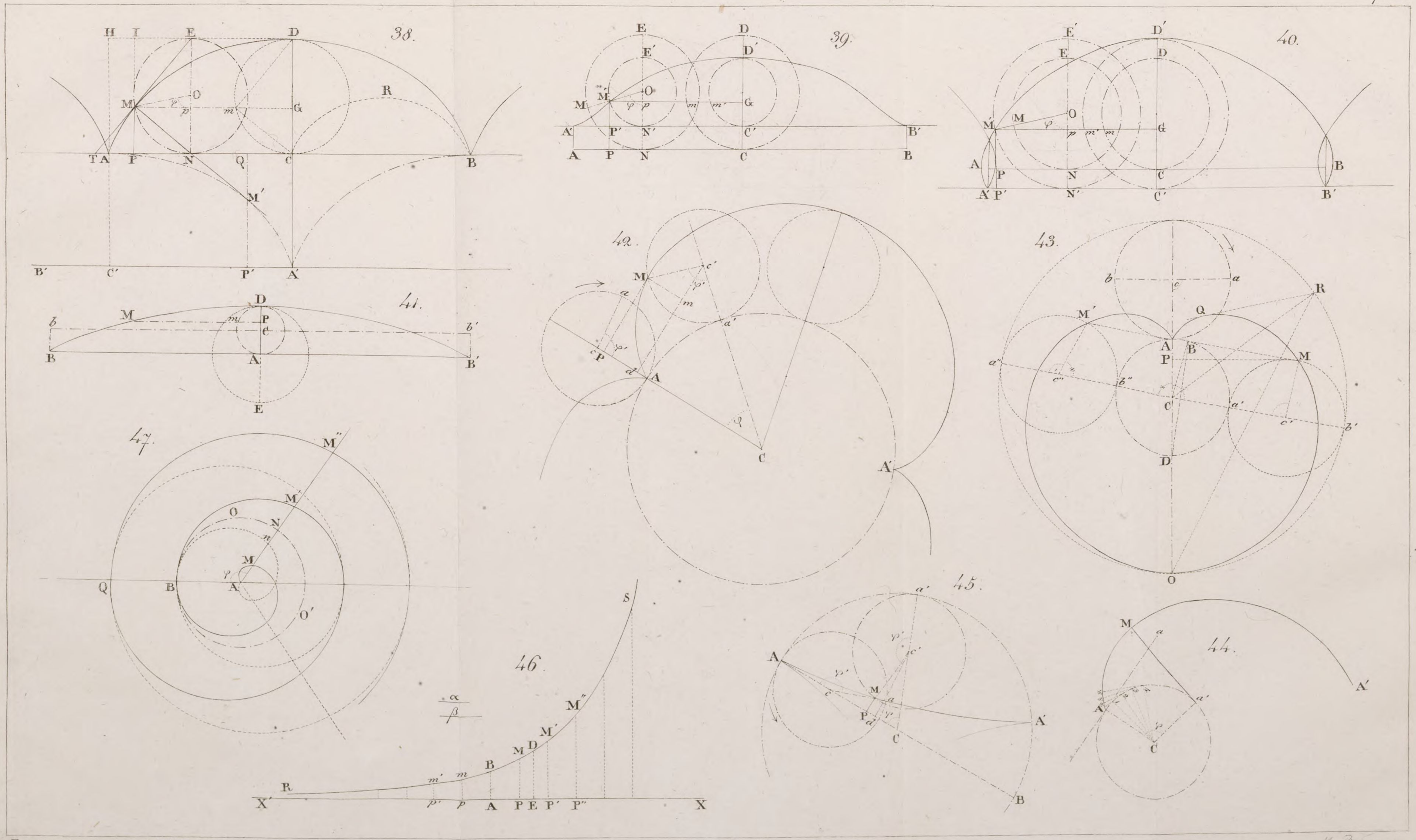


Burg's Mathematik III. Bd.

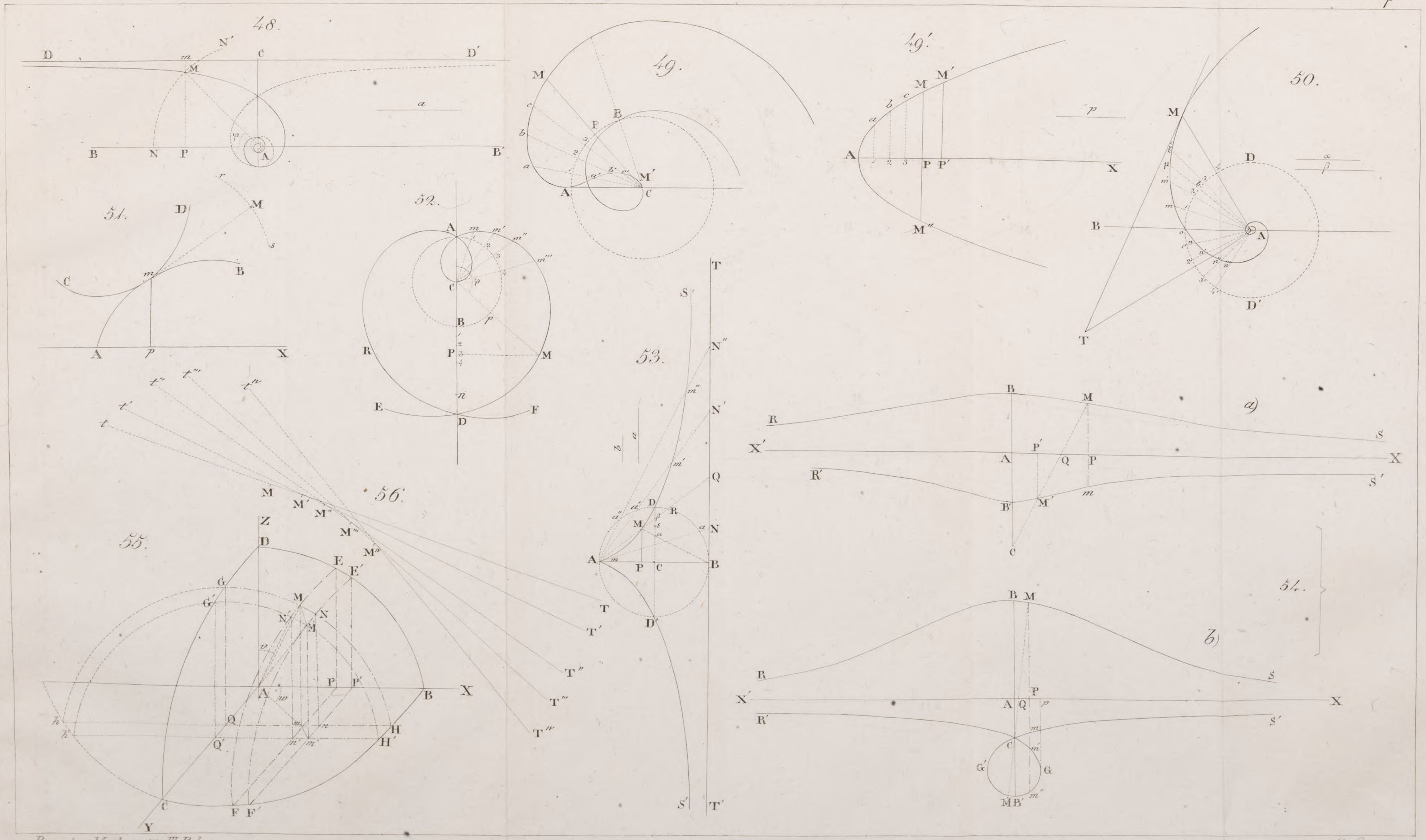
M. Bauer sc.



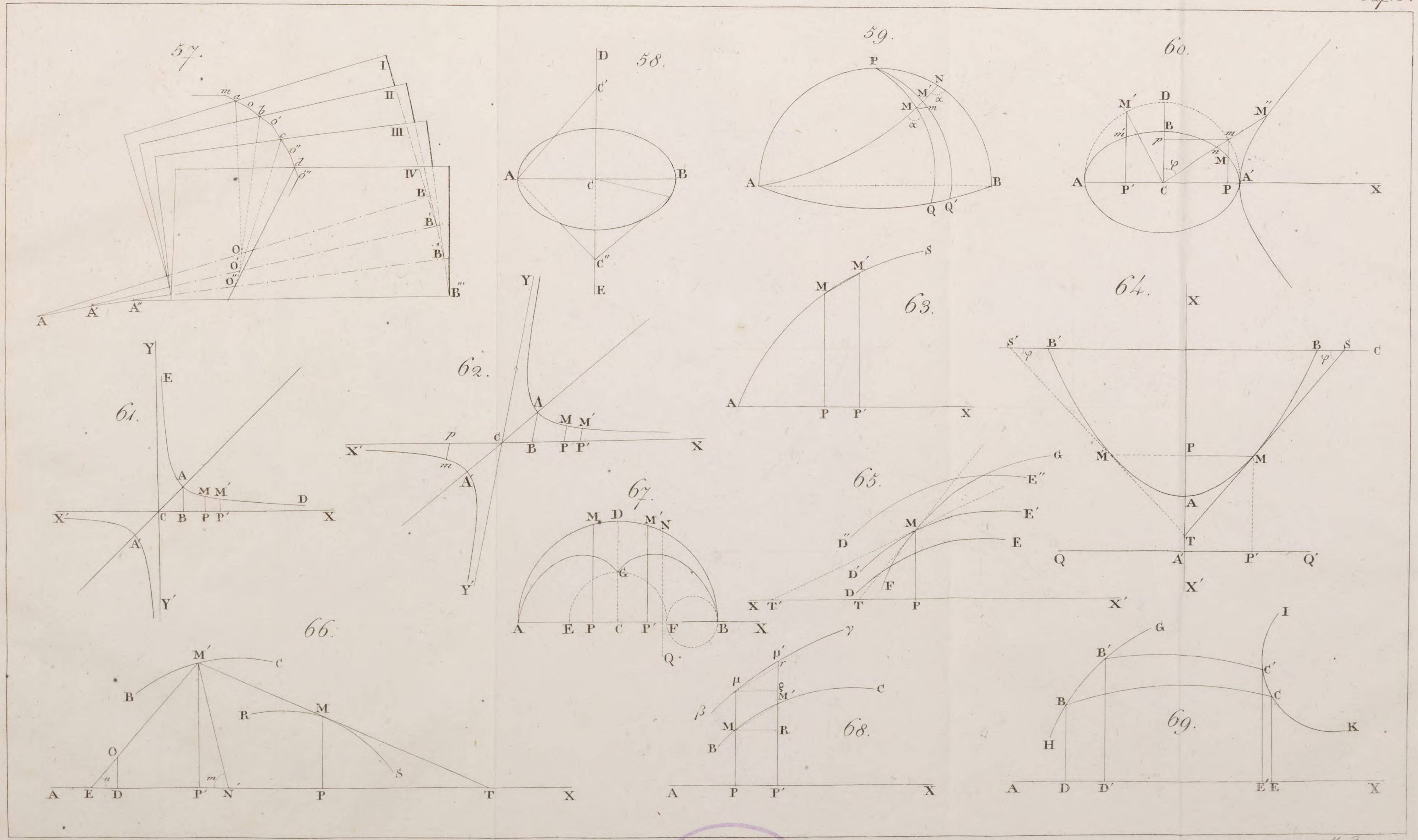
M. Bauer sc.



M. Bauer sc.



M. Baur sc.



Burg's Mathematik III. Bd.

M. Bauer sc.

Staatliche Bibliothek Bamberg

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Burg, Adam von

Ausführliches Lehrbuch der höhern Mathematik mit besonderer Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens

Bd.: 3

1833

Bamberg, Staatsbibliothek -- AGB P 2(3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11421396-8